STORIA

DEL

METODO SPERIMENTALE

IN ITALIA

OPERA

DI

RAFFAELLO CAVERNI

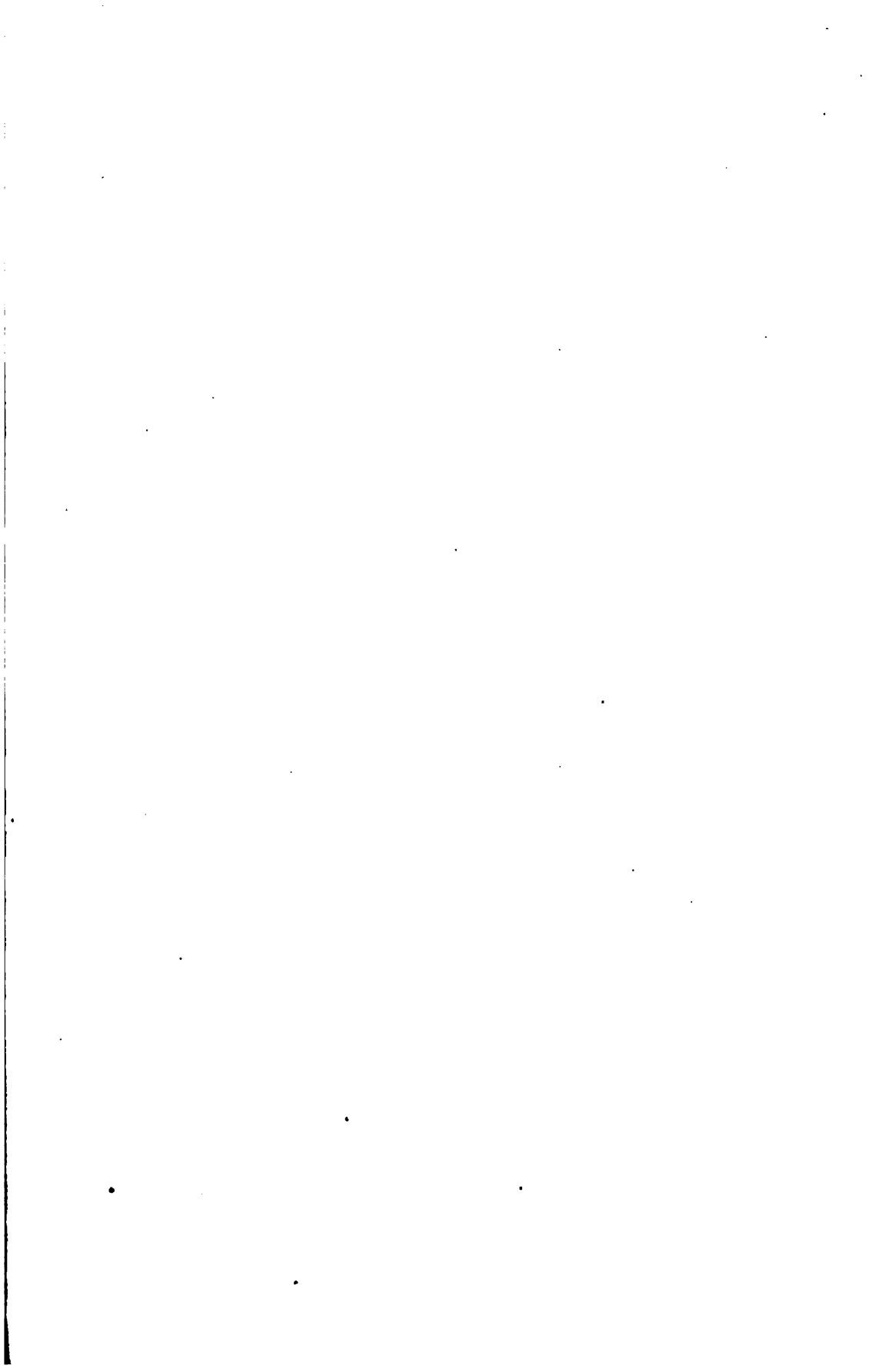
TOMO V.°

FIRENZE

STABILIMENTO G. CIVELLI - EDITORE

1898.

STORIA

DEL

METODO SPERIMENTALE IN ITALIA

a cui doveva succedere una quinta scena, la quale Galileo sperava di poter fare rappresentare in quella medesima veglia, ma per varie difficoltà attraversatesi venute meno così belle speranze, si lasciò lo spettacolo senza congedo. L'Elzevirio infatti, avendo già condotto a termine il dialogo quarto, aspettava il manoscritto del rimanente, e avuto avviso dall'Autore che non l'aveva in ordine, e ch'era costretto di lasciar la stampa a quel punto, rispondeva d'Amsterdam, il dì 4 Gennaio 1638: « In quanto al trattato Della percossa e Dell'uso della catenella, se V. S. non lo può condurre a perfezione, farò il compimento secondo il suo ordine » (Alb. X, 252). Tornava pochi giorni appresso pur d'Amsterdam a ripetere le medesime cose a Galileo, soggiungendogli che, dovendosi così lasciar l'opera incompleta, gli mandasse a dire in che modo ci dovesse significarlo ai lettori, dopo l'appendice Dei centri di gravità, « acciocchè non si commettano errori » (ivi, pag. 260). Ma l'Elzevirio non ebbe a ciò risposta, e gli attori taciti, come si diceva, e senza congedo, si lasciarono sparire dietro la scena.

Aveva Galileo però la speranza che vi si dovessero ricondur presto, per cui non curò il mormorio che si farebbe tra gli uditori, curiosi di vedere il fine dell'opera, così disgustosamente rimasta a mezzo. Per ridurla infatti a quel fine desiderato, non bisognando altro all'Autore che d'aggiungervi i discorsi delle catenuzze e della percossa, i materiali già preparati non richiedevano che il tempo necessario a ricever ordine conveniente, e vaghezza di forma. La speranza dunque di tornar presto in scena, e con l'occasione del compierla correggere e perfezionare quella parte dell'opera già pubblicata, non sarebbe nell'animo di Galileo stata illusoria, se non fosse venuta a infirmarla prima, e poi a dissiparla affatto una grande sventura. Il dì 2 Gennaio 1638 faceva, piangendo, scrivere da Arcetri a Elia Diodati: « Ahimè, signor mio, il Galileo vostro caro amico e servitore, da un mese in qua è fatto irreparabilmente del tutto cieco » (Alb. VII, 207).

Il sacerdote fiorentino Marco Ambrogetti, chiamato in casa pochi mesi prima, perchè traducesse in latino l'opere, che l'Elzevirio aveva promesso di stampar tutte insieme; serviva al povero cieco di amanuense, ma, non avendo uso delle Matematiche, non valeva d'alcuno aiuto là dove si trattasse di tornar sopra una dimostrazione, illustrata da qualche figura complessa, e perciò difficile a ritenersi nell'immaginazione ferma, e come innanzi agli occhi presente. Don Clemente Settimii, che spesso, dal collegio di S. Carlo, saliva ad Arcetri, poco poteva trattenervisi, occupato nel fare scuola, e legato alle discipline dell'ordine religioso; intanto che Galileo si stava nelle tenebre ad incubare lo svolgimento de' suoi luminosi pensieri, aspettando qualche provvida mano, per mezzo della quale, guidata dall'intelligenza, potesse significarli: nè la provvidenza indugiò molto a venire.

Frequentava le scuole di S. Carlo, dove il Settimii era maestro, un giovane sui diciott'anni, a cui era bastato spiegare le prime proposizioni di geometria, perchè si mettesse da sè, senz'altra guida, a dimostrar le rimanenti, che si leggono nei libri di Euclide. Quel giovanotto si chiamava Vincenzio

Viviani, che, invaghito ogni giorno più di così nobile studio, impaziente di vederne l' applicazione alla Scienza dei moti naturali, si dette a leggere i Dialoghi, allora allora venuti alla luce. Desideroso di conoscere un Autore di tanta fama, il Settimii un giorno lo condusse seco ad Arcetri, dov' ebbe da Galileo tale accoglienza, che diventarono di lì in poi le visite quasi quotidiane. Proseguendo in tanto l' incominciata lettura; arrivato a quel principal supposto che le velocità dei mobili, naturalmente discendenti per declivii d' una medesima elevazione, siano uguali fra loro, dubitò il Viviani, non già della verità dell' assunto, ma dell' evidenza di poterlo suppor come noto, ond' ei richiese a voce lo stesso Galileo di qualche più chiara confermazione di quel principio (Scienza universale delle proporz., Firenze 1674, pag. 99).

La domanda trovò la mente del Vecchio solitario, a cui si rendeva difficile l' internarsi in più profondi pensieri, tutta occupata nelle tenebre notturne, com' egli stesso scrisse un giorno al Baliani, intorno alle prime e più semplici proposizioni dei moti naturali, riordinandole e disponendole in miglior forma ed evidenza (Lettere per il trecentes. natal., Pisa 1864, pag. 45): sicchè in queste disposizioni s' abbattè facile Galileo a dimostrar quello, che il Viviani desiderava. Di ciò occorrerebbe ora a dire, ma crediam bene di dover prima risalire alle origini, ed accennar le vicende, che precedettero alla tanto festeggiata dimostrazione.

Che l' assunto, posto da Galileo per fondamento alla Dinamica nuova, fosse quello medesimo, di che si veniva a informare la Statica antica, lo abbiamo fatto già notare altra volta: e come il Nemorario e il Tartaglia dicevano esser l' impeto uguale nell' ugual rettitudine del discenso; così in egual forma sentenziava il Salviati che « due mobili uguali, ancorchè scendenti per diverse linee, senza veruno impedimento, fanno acquisto d' impeti uguali, tuttavolta che l' avvicinamento al centro sia uguale » (Alb. I, 28). L' evidenza dunque del principio era universalmente riconosciuta, e i semplici esempi de' pendoli, e dei liquidi ne' sifoni, bastavano per confermarla. In mezzo a questo pacifico consenso dei Matematici sentì piuttosto Galileo il bisogno di rispondere ai peripatetici, sottilmente scoprendo la fallacia delle loro ragioni. Dicevano essi, come poi il Cabeo e il Cazr, così valorosamente confutato dal Gassendo, non esser possibile che, venendo da C (fig. 1) per la CA lentamente, e per la CB a precipizio, abbia il mobile guadagnato in A e in B i medesimi gradi di forza. Quanto poi al particolare esempio del pendolo diceva il Cabeo che l' impeto di risalire da B in I (fig. 2) doveva

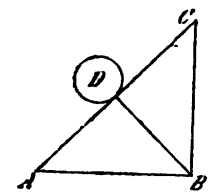
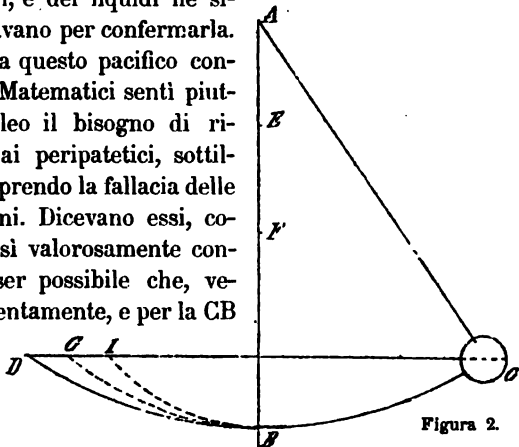



Figura 1.

Figura 2.

esser maggiore dell' impeto di risalir dal medesimo punto in G, « cum acquirat idem mobile impetum ascendendi breviori tempore, et per lineam magis erectam » (Comment. metheor., T. I, Romae 1646, pag. 93).

Queste sono, nel primo dialogo dei Massimi Sistemi, le medesime difficoltà, che promove Simplicio, a cui il Salviati domanda quand' egli creda di poter dire che due mobili sono ugualmente veloci. E rispondendo Simplicio: quando passano spazi uguali in tempi uguali, gli vien fatto osservare che, a render la definizione universale, conveniva aggiunger di più che le velocità sono uguali « quando gli spazi passati hanno la medesima proporzione dei tempi, ne' quali son passati » (Alb. I, 30).

In fallacie simili a quelle dell' immaginario Simplicio incorreva in realtà l' ingegner Bartolotti, ammettendo che in due alvei d' ugual caduta, ma di varia lunghezza, vadan l' acque nel più lungo con moto molto più lento. Galileo affermava invece che i due moti erano uguali, per dichiarar la qual proposizione, che aveva l' apparenza di un paradosso, « non credo, scriveva a Raffaello Staccoli, auditore del tribunale delle acque in Toscana, che dall' ingegner Bartolotti nè da altri mi sarà negato verissimo essere il pronunziato di colui, che dirà le velocità di due mobili potersi chiamare eguali, non solamente quando essi mobili passano spazi eguali in tempi eguali, ma quando ancora li spazi passati in tempi diseguali avessero tra di loro la proporzione dei tempi de' loro passaggi. Così per esempio quello, che in quattr' ore andasse da Firenze a Pistoia, non si può chiamare più pigro d' un altro, che in due ore andassse da Firenze a Prato, tuttavolta che Pistoia fosse lontana venti miglia, e Prato solamente dieci, perchè a ciascheduno tocca sottosopra ad aver fatto cinque miglia per ora, cioè avere in tempi eguali passati spazi eguali. E però, qualunque volta due mobili scendano per due canali disuguali, se passassero in tempi, che avessero la medesima proporzione che le lunghezze degli stessi canali, si potranno veramente chiamare essere ugualmente veloci. Ora bisogna che quelli, ai quali sin qui è stato ignoto, sappiano che due canali, quanto si voglia disuguali in lunghezza, purchè le totali pendenze loro siano uguali, vengono dall' istesso mobile passati in tempi proporzionali alle loro lunghezze » (Alb. VI, 354).

Si riduce a questa medesima conclusione il discorso nel dialogo dianzi citato, dove la risoluzion del dubbio si fa dipendere dal teorema, che il tempo della scesa per CA, nella prima figura qui poco addietro, al tempo della caduta per CB, ha la medesima proporzione che la linea CA alla CB « ma la dimostrazione, dice il Salviati agli amici, aspettatela un'altra volta » (Alb. I, 32).

Di qui traspariscono chiari i pensieri di Galileo, e s' intende perch' egli allora non si desse nessuna sollecitudine di dimostrar matematicamente un principio, che scendeva per corollario immediato dalla proposizione VI in ciascuno de' due primi trattati manoscritti intorno ai moti locali. Dimostrato infatti, come ivi si fa, che i tempi stanno come gli spazi, ne conseguiva necessariamente che le velocità fossero uguali. Come unica intenzione perciò rimaneva quella, che poco fa si diceva, e che si pone in bocca al Salviati,

di rimover cioè l' incredulità dalla mente dei peripatetici (ivi, pag. 32), argomentandosi di raggiunger l' intento in vari modi. Uno di questi modi, e dei non meno efficaci, ha grandissima somiglianza con quello tenuto già con Guidubaldo del Monte, per persuadergli come possa esser vero che una palla pendula scenda, o per l' arco di un grado o per tutto un quadrante, nel medesimo tempo: perchè, come qui le maggiori velocità ragguagliano i tempi, così là il maggior tempo riduce le velocità ad essere uguali. Le due proposizioni, soggiungeva lo stesso Galileo « non hanno seco per avventura più inverosimilitudine di quello che si abbia che i triangoli tra le medesime parallele e le basi uguali sieno sempre uguali, potendone fare un brevissimo, e l' altro lungo mille miglia » (Alb. VI, 22). Come infatti è verissimo ch' essendo le basi HI, CH (fig. 3) uguali, i triangoli IAH, HAC sono uguali; così è vero che in D e in F, in C e in I le velocità sono uguali, benchè i piani AI, AC siano così differenti, che l' uno possa essere anche mille miglia più lungo dell' altro.

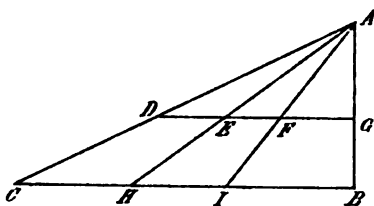



Figura 3.

Vien confermato insomma, per queste considerazioni, che, ne' primi ordinamenti della Dinamica galileiana, si teneva avere i cadenti da uguali altezze uguali velocità come principio tanto secondario, da sottintendersi qual ovvia e natural conseguenza della VI proposizione nel primo, e nel secondo trattato manoscritto dei moti locali. Come poi fosse quello stesso principio posto per fondamento all' edifizio dinamico, si disse nel precedente tomo della nostra Storia, al capitolo VI. Bandito il Teorema meccanico, da cui si concludeva che nelle scese da uguale altezza i tempi son proporzionali agli spazi, quel che lasciavasi sottintender per corollario, che cioè, dove sono i tempi proporzionali agli spazi convien che le velocità vadano uguali, s' esaltò al grado di proposizion principale, senza pensar di nobilitarla dalla prima sua nativa umiltà, o di renderla così cospicua, che potesse sostener la nuova dignità, a cui veniva assunta. Il proposito era stato già fatto, quando Galileo scrisse in margine a quel suo foglio 88, raccolto nel secondo tomo della quinta parte de' suoi Manoscritti: *credo utile, si non necessarium, demonstrasse mobile in B* (nella precedente figura) *esse eiusdem momenti quod in C.* Ma o fosse per dimenticanza, o per qualche difficoltà trovata nella dimostrazione, il principio, da cui scende nel terzo dialogo galileiano tutta la scienza del moto, si rimase nelle umili condizioni di un semplice postulato.

Quando venne dunque a farsi al solitario Vecchio di Arcetri la domanda del Viviani, dovè risovvenirsi del proposito scritto, e o sentir pentimento della dimenticanza, o mortificazione delle difficoltà incontrate nel mandarlo ad effetto. In qualunque modo, se l' aveva prima creduta utile, doveva ora parergli necessaria quella dimostrazione, nella quale felicemente s' incontrò una notte dell' Ottobre 1638, mentre dolorando vegliava in mezzo a quelle sue tenebre

luminose. Ritenuto per dimostrato nel suo primo trattato *Della scienza meccanica* il teorema del Tartaglia, e nelle prime proposizioni del suo dialogo terzo la legge dei moti accelerati, un semplice triangolo, che si poteva senza gran difficoltà tenere innanzi rappresentato in immagine, bastò a Galileo per condurre così il discorso alla desiderata conclusione.

Sia ABC (fig. 4) quel triangolo, e CB rappresenti il perpendicolo della caduta, AC la scesa obliqua di un medesimo grave. Dà il Teorema meccanico che il momento per CB sta al momento per AC reciprocamente, come AC a CB, e omologamente come CB sta a CD, presa questa linea terza proporzionale dopo AC e CB. Ma essere i due momenti omologamente come CB a CD non vuol dir altro se non che, presa la CB per la misura dell' impeto in B, la misura dell' impeto in D è CD: ciò che ci viene significato per l' equazione $B : D = BC : CD$, chiamati B, D gl' impeti respettivi o i momenti.

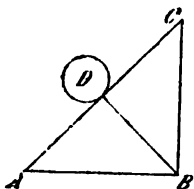



Figura 4.

Ma essendo per la legge dei cadenti naturali (chiamati A, D gl' impeti in A e in D) $A : D = \sqrt{AC} : \sqrt{CD} = \sqrt{AC} . DC : DC$, ed avendosi $\sqrt{AC} . DC = BC$ per costruzione, sarà dunque $A : D = BC : CD$, che, confrontata con la proporzion precedente, dà $B = A$, come dovevasi dimostrare.

Era la dimostrazione riuscita di così insolita facilità, da rimanerne lo stesso Galileo compiacentemente stupito, ma ebbero la compiacenza e lo stupore a crescere molto più, quando, in contemplar la nuova luce apparita, la vide intorno intorno soavemente irradiarsi di quelle verità principali, ch' egli era andato prima cercando per sì lunghe vie faticose. Se per CB e CD, rappresentandoci sempre innanzi l' ultima figura, gl' impeti stanno come gli spazi, dunque i tempi sono uguali: e perchè, congiuntisi i punti B, D, la BD scende sopr' AC perpendicolare, vien così dunque risoluto il problema: trovare nel perpendicolo e nell' obliqua gli spazi, che sarebbero in tempi uguali passati da due mobili uguali, nel medesimo punto partitisi dalla quiete. Potendosi poi sempre intorno al triangolo rettangolo CBD circoscrivere un semicerchio, che abbia la metà dell' ipotenusa BC per raggio, dunque la corda DC è isocrona al diametro. Questo mirabile isocronismo, con sì inaspettata facilità concluso, veniva di più a farsi ala per condurre agile la proposizione III del III dialogo, che, portata già come grave pietra fondamentale dell' edifizio, era costata a Galileo tante ambagi e tanti sudori. È, per la legge dei moti accelerati, $T^o . AC : T^o . DC = \sqrt{AC} : \sqrt{DC} = AC : \sqrt{AC} . DC$. Ma $\sqrt{AC} . DC = BC$ e $T^o . DC = T^o . BC$, resta dunque concluso $T^o . AC : T^o . BC = AC : BC$, come per legittima conseguenza dell' essere, nel cadente e nell' obliqua, le velocità sempre uguali.

Se fossero state così riformate tutte le proposizioni, il trattato Dei moti locali nel terzo dialogo galileiano vinceva di facilità e d' eleganza quel maraviglioso inarrivabile trattato del Torricelli, ma essendo Galileo costretto dalla vecchiezza e dalla cecità a rimanersi intorno a ciò in sterili desiderii contemplativi, ebbe a chiamarsi contento di aver finalmente potuto mettere ad

effetto un proposito antico, e di aver sodisfatto al Viviani, e a tutti gli altri, che fossero studiando venuti ne' medesimi dubbi di lui.

Un altro giovane era allora in Firenze, che, se cedeva al Viviani nell'acutezza matematica dell'ingegno e nell'ardor degli studii, lo superava di gran lunga per lo splendor dei natali. Il principe Leopoldo dei Medici veniva istruito nelle Matematiche, e in particolare nell'Algebra, secondo che Galileo diceva quasi scherzando (Alb. VII, 212), dall'aulico don Famiano Michelini, il quale, appena sparsasi la nuova della ritrovata dimostrazione, così da Siena scriveva il dì 6 Novembre 1638, in una sua lettera indirizzata ad Arcetri:

« Il serenissimo signor principe Leopoldo mio signore mi ha comandato scrivere a V. S. che S. A. S. desidera la dimostrazione nuovamente da lei ritrovata, che, dei gravi sopra diversi piani inclinati, mentre abbino la medesima elevazione sopra il piano orizontale, le velocità acquistate siano uguali sopra il detto piano orizontale: poichè S. A. ha difficoltà in ammetter per noto l'assunto, che ella suppone nel bellissimo suo libro del moto. Il Serenissimo ha di già visti i sei libri di Euclide, e di presente vede l'undecimo, e il detto libro Del moto, col pensiero di veder prima le opere di V. S. Ecc.^{ma}, e poi il resto dei Matematici..... Il latore della presente è un vetturale di palazzo, al quale S. A. desidera che V. S. dia la dimostrazione suddetta, perchè senz'essa le pare di andare al buio, ancorchè quelle esperienze ch'ella pone nel libro sieno poco meno che dimostrazione » (MSS. Gal., P. VI, T. XIII, fol. 112).

Ventitre giorni dopo lo stesso Michelini ringraziava Galileo, per essersi compiaciuto d'inviargli la dimostrazione « circa l'uguaglianza delle velocità dei mobili di uguale elevazione, quando siano arrivati per qualunque inclinazione al piano orizontale » (Alb. X, 316, 17), soggiungendo che si trovava allora, per un fiero dolor di testa, così ottuso l'ingegno, da disperar di scoprire la verità o la falsità delle cose dimostrate. Forse la difficoltà dipendeva in gran parte dall'aver dovuto Galileo dettare a qualcuno poco pratico di quelle materie, e compendiare con qualche scapito della chiarezza quel suo sottile discorso, che poi disse il Michelini di avere inteso, e di averlo trovato concludere il vero. « La difficoltà, soggiungeva, tornando a scrivere il dì 11 di Dicembre al medesimo Galileo, proveniva dal mio poco giudizio, e dallo stare più applicato al ritrovamento della mia, che al penetrar la sua bellissima dimostrazione » (ivi, pag. 321).

Il Michelini dunque attendeva a ritrovar del supposto galileiano una dimostrazione sua propria, ingegnandosi, com'egli dice, di persuadere altrui « che in tempi uguali li spazi passati dal moto accelerato stiano come gl'impeti » (ivi). E bench' egli stesso soggiunga esser questa una bagattella, che ogni bambino la saprebbe dimostrare, e confessi che il discorso tornava a quel medesimo di Galileo, poco avendoci del suo; nonostante è notabile la varietà del processo. Anch'egli, il Michelini, poneva il Teorema meccanico per principio, ma nel servirsi del mezzo differiva dai modi tenuti da Galileo, perchè, mentre questi direttamente dimostrava che gl'impeti in B e in D, secondo l'ultima figura, stanno come le linee CB, CD, egli invece s'ingegnava di persuadere

il medesimo dall'esser per quelle stesse linee i tempi uguali. Quali però si fossero di una tale persuasion le ragioni non si rileva chiaro dalla citata lettera del Michelini. Ma dicendovi essere unico suo assunto « che gl'impeti stieno in reciproca proporzione degli spazi, nei diversi piani inclinati » (ivi, pag. 321) si può credere che ragionasse così, come, indipendentemente dai teoremi dimostrati nelle nuove Scienze, dice di aver fatto già il Beriguardo. Supposto che nel solito triangolo il lato AC sia triplo di CB, « quando globus (si legge nel VI dei *Circoli pisani*, parte III) saliens ex C pervenerit ad D, aut aliud punctum lateris inclinati praedicti utlibet, si quis velit assignare punctum in latere BC, producto similiter, ad quod aequali tempore perveniret idem globus, aut alter aequalis, si demittatur simul ex puncto C per latus CB; si quis inquam hoc velit, sumatur in latere CB punctum triplo magis distans a puncto C, quam punctum D distet ab ipso C, sitque puntum illud B: nam quando globus ex C pervenerit ad D, idem aut aequalis ex C perveniet ad B aequali tempore » (Patavii 1660, pag. 310).

Il modo poi facile di ritrovar il punto B prosegue a dire esser quello d'alzar sopra AC in D una perpendicolare, la quale venga a descrivere il triangolo DCB, ch'essendo simile ad ACB darà, per la somiglianza, che BC è media fra le AC e DC. Dimostratosi dunque anche dal Michelini, al modo sopra detto o in altro simile, che i tempi per CB e per CD sono uguali, ne concludeva che gl' impeti in B e in D stanno come gli spazi, e dietro l'applicazion della legge dei moti accelerati, e l' invenzione della DC, terza proporzionale dopo AC, CB, riusciva a dimostrar finalmente, con i medesimi processi di Galileo, che anche gl' impeti in A e in B sono uguali.

Sembra che la dimostrazione fosse dal padre Settimii letta a Galileo, il quale la lodò molto (Alb. X, 327), specialmente per quel suo modo tenuto in dimostrare che la CD e la CB erano passate dal mobile nel medesimo tempo. Salendo pochi giorni dopo quel medesimo Settimii ad Arcetri, portava seco, da consegnarsi a Galileo, un libro, e una lettera del Baliani. Era quella lettera scritta da Genova il dì 17 Dicembre 1638, per accompagnare il detto libro, ch'era quello *De motu naturali*, pregando lui, a cui veniva presentato, a leggerlo per favore, e a volergliene dire il suo parere. Se sarà Galileo stato ad ascoltare quella lettura, specialmente alla VII proposizione, si sarà dovuto maravigliare che l'Autor di lei e il Michelini si fossero così incontrati nel medesimo modo di dimostrar che la linea, condotto da un punto della verticale perpendicolarmente sull' inclinata, prefinisce qui come là due spazii, che son passati dal mobile nei medesimi tempi.

Comunque sia, Galileo mandava per contraccambio a Genova i suoi dialoghi Del moto, accompagnandoli con lettera del dì 20 Giugno 1639 al Baliani. il quale rispondeva il dì primo Luglio appresso, dicendo che, sebbene non avesse avuto per leggere e per intender le cose scritte nel libro nè il tempo necessario, nè l'ozio, nonostante, mentr'egli in generale ammirava la bellezza e la bontà delle dottrine, avrebbe pure avuto a notarvi qualche cosa, particolarmente quanto ai supposti fatti al fol. 166, i quali, consentendo in

ciò col Viviani e col Michelini, scriveva « io li tengo verissimi, ma dubito che vi sia tanta evidenza, quanto par che sia necessario nei principii » (ivi, pag. 354). A sodisfare ai quali dubbi vennero presto le seguenti parole, scritte in una lettera del dì primo Agosto da Arcetri:

« Che poi il principio che io suppongo, come V. S. nota, a facce 166, non le paia di quella evidenza che si ricercherebbe nei principii da supporsi come noti, glielo voglio concedere per ora, ancorchè Ella medesima faccia la stessa supposizione, cioè che i gradi di velocità, acquistati sopra l'orizzonte da mobili discendenti per diversi piani della medesima altezza, siano uguali. Ora sappia V. S. Ill.ma che, dopo aver perso la vista, e per conseguenza la facoltà di potere andare internando in più profonde proposizioni e dimostrazioni, mi sono andato nelle tenebre notturne occupando intorno alle prime e più semplici proposizioni, riordinandole e disponendole in miglior forma ed evidenza, tra le quali mi è occorso di dimostrare il sopraddetto principio, nel modo che a suo tempo Ella vedrà, se mi succederà di avere tanto di forza, che io possa migliorare ed ampliare lo scritto e pubblicato da me sin qui intorno al moto, con aggiungervi altre speculazioncelle, ed in particolare quelle attinenti alla forza della percossa, nell'investigazion della quale ho consumate molte centinaia e migliaia di ore, e finalmente ridottala ad assai facile esplicazione, sicchè altri, in manco di mezz'ora di tempo, può restarne capace » (Lettere pel trecent. natal. cit., pag. 45, 46).

Ricevuta così la notizia della dimostrazion del principio, che Galileo aveva prima semplicemente supposto come vero, il Baliani, inclinatissimo a speculare intorno alla verità delle cose (Alb. X, 369), piuttosto che aspettar l'altrui, amò meglio di tentare la propria fortuna, la quale pareva arridergli già, avendolo fatto incontrare in quella settima proposizione, dalla quale Galileo e il Michelini avevano così facilmente concluse le loro dimostrazioni. Quella VII *De motu naturali* era ivi infatti messa in questa forma, com'a pag. 34 dello stesso trattato, che più ampiamente l'Autore condusse nel 1646: « Data linea perpendiculari, per quam grave descendat, cui annectatur linea, seu planum declinans; in declinante reperire punctum, quo grave perveniat eo tempore, quo pertransiverit perpendicularem. »

Rappresentando BC quella perpendicolare e AC l'inclinata, come nella figura ultimamente qui addietro posta, si risolve il problema, conducendo la BD normale ad AC, d'onde, come da Galileo si conclude che le velocità in B e in D son proporzionali agli spazi, e, come dal Michelini, che le CB, CD son passate dal mobile nei medesimi tempi. Ma aveva il Baliani prevenuto altresì Galileo in una cosa ben'assai più importante, in servirsi cioè del corollario che le CB, CD sono isocrone insieme per lemma, a dimostrar la proposizione sua XV, ivi a pag. 36 così formulata: « Si duo gravia descendunt, alterum quidem perpendiculariter, alterum vero super plano declinante, perveniunt ad idem planum orizontale tali ratione, ut sit eadem proportio inter diuturnitates eorum, quae inter perpendicularem et declinantem. » Ha la dimostrazione aria di novità, e tutt'insieme di eleganza, perchè, essendo

per la legge dei moti accelerati, ritenuta la medesima figura, DC : AC $=$ T°. DC^2 : T°. AC^2 $=$ T°. BC^2 : T°. AC^2, in virtù del precedente Lemma, e per la similitudine de' triangoli ABC, CDB essendo CD : AC $=$ CB^2 : AC^2, immediatamente se ne conclude CB^2 : AC^2 $=$ T°. CB^2 : T°. AC^2, e però anche i semplici spazi staranno, secondo il proposito, come i semplici tempi.

Ripensando Galileo fra sè, in farsi leggere il trattatello del Baliani, a queste conclusioni, avrà dovuto maravigliarsi di trovar che altri avevan già penetrato quel che solitario era ito speculando in mezzo alle tenebre. Non si vedeva però in quelle dimostrazioni concluso l'intento principale, perchè il Baliani relegava in settimo luogo tra i postulati anche questo: « ductis planis inclinatis et linea perpendiculari inter lineas parallelas orizontales, gravia super illis mota, ubi perveniunt ad parallelam inferiorem, habent aequales velocitatis gradus, et proinde, si ab inde infra sortiantur parem inclinationem, aequivelociter moventur. » Ei riteneva come Galileo la cosa probabile, sì per l'esperienza dei pendoli, *quae quamtumvis longiora aut breviora, et proinde circa finem magis aut minus inclinata, pariter ascendunt si pariter descendant;* e sì per l'esempio dell'acqua, la quale, essendo per sifoni retti o inclinati in qualunque modo condotta, *videmus pariter ascendere, si pariter descendat.* Ma più che in questi fatti fisici s'affidava il Baliani della verità del suo postulato in veder ch'egli aveva una dipendenza immediata dalla proposizione sua XV, *quia, si diuturnitates sunt longitudinibus proportionales, credibile est motus in fine esse aequales.*

Si vede bene insomma che, a raggiunger l'intento principale, mancava a fare al Baliani un passo solo, tentando, per non avere a invidiare quella di Galileo, la sua propria fortuna, che felicemente gli riuscì in questo modo. Riferendosi sempre all'ultima impressa figura, è dimostrato T.° CB : T.° AC $=$ CB : AC. Ma per la legge dei moti accelerati gli spazi stanno come i quadrati dei tempi, o come i rettangoli delle velocità e dei tempi; dunque, significandosi con V.^{a} la velocità, come con T.° si significa il tempo, sarà T.° CB : T.° AC $=$ T.° CB . V.^{a} CB : T.° AC . V.^{a} AC, e perciò V.^{a} CB $=$ V.^{a} AC.

Quel ch'era dunque prima supposto nell'operetta *De motu naturali,* o come semplicemente probabile ritenuto, ottenne in tal guisa la sua matematica dimostrazione, la quale il Baliani, occorrendogli di far ristampare un foglio per un errore trascorso, fece inserir nel volume, revocando quelle poche copie già uscite, e non approvando che le altre così corrette. Volle una di queste mandar subito a Galileo, accompagnandogliela con una lettera del dì 16 Settembre 1639, nella quale, dop' altre in proposito, soggiungeva queste parole: « Ho avuto per bene di mandarle una copia di detta mia operetta così racconcia, pregandola che la faccia degna di star in un canto della sua libreria, con stracciar l'altra che le mandai prima, che non vorrei che ci stesse in alcun modo. Io credo che sia buona dimostrazione, supposto per principio che la proporzione degli spazi si compone della proporzione dei tempi e delle velocità, e ne ho fatta una giunta alla dimostrazione del settimo postulato » (Alb. X, 369).

Così, infin dal Settembre del 1639, dava il Baliani al pubblico la sua

Dinamica confermata già sul suo più stabile fondamento, mentre Galileo, con speranza assai più lunga di quel che l' infermità e la vecchiezza gli avrebbero dato per misura, aspettava il tempo e l' occasione di una ristampa dei Dialoghi, ch' egli attendeva a correggere e ampliare. Intanto, essendogli il Viviani di frequente visitatore divenuto ospite permanente, volle facesse il disteso della dimostrazione, che finalmente gli sortì d' incontrare, di che mandò subito copia al Castelli, accompagnandola con una lettera del dì 3 Dicembre 1639, nella quale, dop' essersi compiaciuto dell' invenzione così soggiungeva: « È scritta in dialogo, come sovvenuta al Salviati, acciò si possa, quando mai si stampassero di nuovo i miei Discorsi e dimostrazioni, inserirla immediatamente dopo lo scolio della seconda proposizione del suddetto trattato, come teorema essenzialissimo allo stabilimento delle Scienze del moto da me promosse » (Alb. VII, 238, 39).

I Dialoghi si stamparono insieme con le altre opere in Bologna, dove il disteso, da diciassett' anni già preparato, apparve postumo, facendosi il Viviani geloso esecutore testamentario delle ultime volontà del suo Maestro. L' edizion bolognese era diretta da Carlo Rinaldini, e si faceva stampando a parte via via i trattati, ch' erano prima venuti a mano, e raccogliendoli poi insieme in due volumi. Il primo era nel 1655 già pronto, e l' anno dopo si mandò fuori il secondo, dove in ultimo si raccoglievano i Discorsi e le dimostrazioni intorno alle due nuove Scienze del moto. Il Viviani stesso in proposito di scrivere in una sua lettera al Rinaldini, *della nuova impressione delle dette Opere, promossa ed ultimata per mezzo solo di V. S. E.*, soggiungeva: « Vi è ancora quella dimostrazione del principio supposto, che pone il signor Galileo avanti alla Scienza del moto accelerato, ed a quella maniera che fu distesa da me di suo ordine, in tempo ch' io mi trovavo appresso di lui, che fu poco dopo ch' ei la ritrovò, quando già era composto il suddetto libro Del moto, ed è l' istessa che si mandò fuori a diversi amici dal medesimo signor Galileo » (MSS. Gal. Disc., T. CXLII, fol. 3).

Che veramente dopo il Castelli fosse stata mandata la dimostrazione a diversi amici in Italia e fuori ci vien confermato dai documenti, ed era il medesimo Viviani che ricopiava e spediva, sotto gli ordini di Galileo, questa specie di circolari. Erano però, per maggior brevità e per essere inutili allo scopo, tralasciate le parti, che dovevano servir per le attaccature e per le articolazioni del dialogo, rimanendo la nuda dimostrazione in discorso disteso. L' original forma di così fatta scrittura circolare s' ha da carte 11-13 del tomo IV, parte V, dei Manoscritti di Galileo, non con molta proprietà dal Viviani stesso intitolata *Dimostrazione trovata dal gran Galileo l' anno 1639,* perchè, sebben fosse messa in forma in quest' anno, l' invenzion nonostante, com' apparisce dalle cose narrate, risale all' anno precedente. Sembrerebbe fosse questo il luogo opportuno di rendere alla notizia dei nostri Lettori nella sua propria forma questo discorso, ma ei ce la esibirà fra poco in fedel copia uno di coloro, a cui fu mandato, collega e amico a quel Torricelli, ch' è per aver gran parte in questo episodio della storia della Meccanica.

II.

Mentre Galileo, come albero annoso, rimaneva sopra il colle di Arcetri solitario, un rampollo di lui, Benedetto Castelli, spandeva in Roma i rami rigogliosi, sotto l'ombra de' quali si raccoglievano a filosofare Evangelista Torricelli, Raffaello Magiotti, Antonio Nardi e Michelangiolo Ricci. Prediletto argomento a quei filosofici discorsi si porgeva dalla lettura dei nuovi dialoghi Del moto, e incontrò specialmente al Torricelli quel ch' era in Firenze incontrato al Viviani, di mettere cioè dubbio intorno alla evidenza dell' assunto di Galileo. Entrato più addentro alle dimostrazioni di lui, gli parve che l'andare i mobili per varie obliquità di scesa ugualmente veloci, dopo cadute uguali, fosse una verità da non doversi semplicemente supporre, ma da potersi con facilità dimostrare. Del modo poi volle farne alcun cenno al Ricci, a cui bastò per condurre una dimostrazione ch' ei conferì col Magiotti, rallegrandosi di vederla tale quale specchiata nelle Opere stampate dello stesso Torricelli, a cui, sulla fin del Settembre 1644, scriveva queste parole: « Mi son rallegrato di trovarvi sopra sette o otto proposizioni, con le sue dimostrazioni per l' appunto, come le avevo pensate io, ed in particolare la prova di quella supposizione fatta dal Galileo ne' libri Del moto la conferii al signor Magiotti due o tre anni sono, avendola rintracciata con quel lume, che ebbi da V. S. » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 52).

Posto così dunque il fondamento, vi andò il Torricelli sopra edificando, e riuscì a dimostrare molte proposizioni *De motu* in diverso modo, più facile e più elegante di quello stesso tenuto da Galileo, componendone un nuovo trattato. Il Castelli in leggerlo n' ebbe a stupire, e scrivendo da Roma il dì 2 Marzo 1641 ad Arcetri avvisava il suo vecchio Maestro che, venendo presto a Firenze per riverirlo, gli avrebbe portato un libro fatto da un suo discepolo, il quale, avendo avuti i primi principii di geometria dieci anni fa alla sua scuola, aveva poi fatto tal progresso da mostrar quanto fossero fecondi i germi, nei nuovi Dialoghi seminati in materia del moto (Alb. X, 408). Dopo tredici giorni infatti, salito una mattina il Castelli ad Arcetri, entrava nella camera, dove giacevasi Galileo, presentandogli un volume manoscritto, con una lettera che l'accompagnava. Scusavasi quivi l' Autore di avere scritti que' fogli *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* « non per bisogno che io giudicassi averne le sue dottrine, ma per necessità che aveva io di formar questo memoriale di erudizione alla mia poca intelligenza, e pel desiderio che teneva di mostrare al mio Maestro lontano come, anco in assenza, aveva propagato con qualche studio mio la sua disciplina » (ivi, pag. 412).

Nell' ascoltare il processo tenuto dal Torricelli nelle prime cinque proposizioni del primo libro, per concluder quello, che due anni fa era andato fra le tenebre così affannosamente cercando; Galileo non ebbe a stupir meno

degli altri. Di questi suoi sensi fatte scrivere le espressioni in una letttera andata smarrita, tornava il dì 27 Settembre di quel medesimo anno 1641 a dire al Torricelli la grande stima, che faceva de' suoi trovati e delle sue conclusioni, riserbandosi a trattarne poi seco a bocca i particolari. « Mando questa, così terminava la lettera, sotto una del signor Nardi, dal quale ella la riceverà, insieme colla dimostrazione di quello che io supponeva nell' ultimo mio dialogo come principio conceduto. Vedanla insieme e l' emendino, comunicandola anche al terzo mio riverito padrone il signor Magiotti, ed a tutto il triumvirato con reverente affetto bacio le .mani » (Alb. VII, 367).

Il Nardi ci conservò la scrittura avuta da Galileo, inserendola nella IX veduta della seconda scena col titolo: *D' un principio meccanico del Galileo,* e con questo motto per semplice introduzione: « Così scrivevami sopra tal materia il mio maestro Galilei : »

« I gravi scendenti dalla medesima sublimità sopra l' orizonte avere acquistati uguali gradi di velocità (proposizione da me sin qui supposta, e solo con esperienze e probabili discorsi confermata) potremo nel seguente modo dimostrativamente provare, pigliando com' effetto notissimo le velocità dello stesso mobile esser diverse sopra diverse inclinazioni, e la massima essere per la linea perpendicolarmente sopra l' orizonte elevata, e per le altre inclinate diminuirsi tal velocità, secondo che più dal perpendicolo si discostano, cioè più obliquamente s' inclinano, dal che si scorge che l' impeto, il momento, l' energia, o vogliam dire il talento del discendere, viene determinato nel mobile dal suggetto piano, sopra il quale s' appoggia e discende. »

« E per meglio dichiararmi, intendasi AB (fig. 5) perpendicolarmente eretta sopra l' orizonte AC: pongasi poi la medesima in diverse inclinazioni verso l' orizonte, piegata come in AD, AE, AF, ecc., dico che l' impeto massimo e totale del grave per discendere è nella perpendicolare BA, minore nella AD, minore ancora nella EA, e successivamente andarsi diminuendo nella FA, e finalmente esser del tutto estinto nella orizontale CA, dove il mobile non ha per sè stesso inclinazione alcuna, nè in conseguenza resistenza all' esservi mosso. »

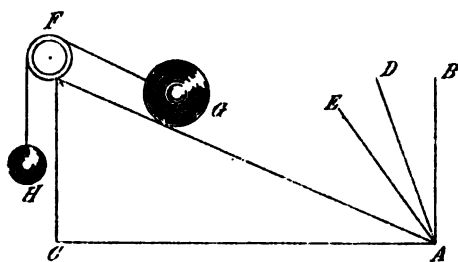



Figura 5.

« Appresa questa mutazione d' impeto, mi fa mestieri ritrovare e dimostrare con qual proporzione ella si faccia, come per esempio nel piano inclinato AF. Tirisi la sua elevazione sopra l' orizonte AC, cioè la linea FC, per la quale l' impeto ed il momento del discendere è il massimo: cercasi qual proporzione abbia ad esso l' impeto per l' inclinata FA. È manifesto tanto essere questo impeto e talento del discendere quanta è la resistenza o forza minima, che basta per proibirlo e fermarlo. Per tal forza e resistenza e sua misura mi voglio servire della gravità di un altro mobile grave. »

« Intendasi sopra il piano FA posare il mobile G, il quale venga ritenuto col filo che, cavalcando sopra FC, pendendo a perpendicolo, abbia attaccato un peso H, il quale, gravando a perpendicolo, proibisca al G lo scendere per la inclinata FA. Riducendosi a memoria quello che si dimostra in tutti i casi dei movimenti meccanici, che cioè la velocità del moto d'un mobile men grave compensa con reciproca proporzione della gravità la minor velocità dell'altro mobile più grave, che è quanto a dire che gli spazi passati nell'istesso tempo abbiano reciproca proporzione della gravità; consideriamo che lo spazio della scesa a perpendicolo del grave H è bene uguale a tutta la salita del mobile G per l'inclinata AF, ma non già per la salita a perpendicolo, nella quale esso G esercita la sua resistenza, il che è manifesto, imperocchè, considerando nel triangolo AFC il moto da A in F esser composto del trasversale orizzontale AC, e del perpendicolare CF, ed essendo che, quanto all'orizzontale, nessuna è la resistenza del mobile, resta la resistenza esser solamente rispetto alla perpendicolare CF. Mentre che dunque il mobile G, movendosi da A in F, resiste solo nel salire lo spazio perpendicolare CF, ma che l'altro grave scende a perpendicolo quanto è tutto lo spazio FH, possiamo molto ragionevolmente affermare le velocità o gli spazi passati nel medesimo tempo da tali mobili dover rispondere reciprocamente alle loro gravità, e basterà per impedire la scesa del G che l'H sia tanto men grave di quello, quanto lo spazio CF è minore della inclinata FA. E perchè siamo convenuti che tanto sia l'impeto, l'energia, il momento ed il talento del mobile al moto, quanta è la forza e resistenza che basta a fermarlo, concludiamo dunque, come si è detto, l'impeto per l'inclinata, all'impeto massimo per la perpendicolare, stare com'essa perpendicolare, cioè l'elevazione della inclinata, alla medesima inclinata. »

« Stabilito ciò, e posto che il mobile grave, partendosi dalla quiete e naturalmente scendendo, vada con eguali giunte accrescendo la sua velocità, onde, come quindi dimostro, gli spazi passati sono in duplicata proporzione dei tempi, ed in conseguenza dei gradi di velocità, la quale, come abbiamo detto, cresce con la proporzione del tempo; dimostreremo la nostra conclusione, cioè i gradi di velocità nell'orizonte essere eguali: quelli cioè acquistati dal mobile, che dalla quiete si parta da qualsivoglia altezza, e per quali si siano inclinazioni pervenga all'orizonte. »

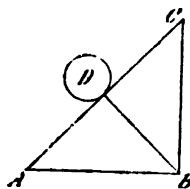
« E qui devesi avvertire che, stabilito che in qualsivogliano inclinazioni il mobile dalla partita dalla quiete vada crescendo la velocità con la proporzione del tempo, sia qualsivoglia l'inclinazione e in conseguenza la quantità dell'impeto; quali furono gl'impeti nella prima mossa, tali saranno i gradi della velocità guadagnata nello stesso tempo, poichè e questi e quelli crescono con la medesima proporzione, che cresce il tempo. »

« Ora sia il piano inclinato AC (fig. 6) elevato sopra l'orizonte, la perpendicalare CB e la orizontale AB. E poichè l'impeto per la perpendicolare CB, all'impeto per

Figura 6.

l' inclinata AC, sta come CB ad AC, prendasi nella AC la CD, terza proporzionale della AC, CB: l'impeto dunque per CB, all'impeto per AC, sta come la CB alla CD. Il mobile dunque, nello stesso tempo che passasse uno spazio uguale alla CB nella perpendicolare CB, passerebbe uno spazio uguale alla CD nell' inclinata AC, ed il grado della velocità in B, al grado di velocità in D, avrebbe la medesima proporzione della CB alla CD. Ma il grado di velocità in A, al grado in D, ha la medesima proporzione che la media tra AC, CD, e la media tra la AC, CD è la CB; adunque i gradi in A e in B, al grado in D, hanno la medesima proporzione, e però sono uguali, che è quello che bisognava dimostrare. »

« Di qui possiamo immediatamente dimostrare un' altra proposizione: cioè il tempo per l' inclinata, al tempo per la perpendicolare, aver la medesima proporzione di essa inclinata e perpendicolare. Imperocchè diciamo che, quando CA (nella solita ultima figura) sia il tempo per CA, il tempo per DC sarà la media tra esse CA, DC, cioè sarà BC. Ma quando il tempo per CD sia CB, è anco il tempo per CB; dunque, quando AC sia il tempo per AC, CB sarà il tempo per CB. Dunque, come AC a CB, così il tempo per AC al tempo per CB. » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 277-83).

Il triumvirato della matematica Repubblica romana avrà con gran desiderio letta questa dimostrazione, la quale si faceva dipendere, com' era naturale, dal Teorema meccanico, venutosi ora a restaurare dopo quella total demolizione, di cui nel cap. VI del Tomo precedente si narrarono le origini e le vicende. È a notar però che, nel suo primo libro manoscritto, Galileo rimandava per quel Teorema alla *Scienza meccanica,* dove il processo dimostrativo è diverso, e sono altresì diversi i principii, che in questa decrepita scrittura conservataci dal Nardi appariscono in abito nuovo, e con un rigoglio giovanile di vita. Attendendo bene infatti è tutto il vigore impartito al Teorema dal principio dei moti misti, risolvendosi la forza AF, nella quinta figura qui addietro, in altre due, delle quali la sola FC rimane attiva. Ora essendo misurata la forza dalla quantità della materia o dal peso, moltiplicato per la velocità o per lo spazio, saran dunque nel presente caso G . FC, H . FA le due forze, che si fanno insieme equilibrio, d' onde G : H = FA : FC che è la conclusione, da Galileo condotta e raggirata per troppo lungo discorso. D' onde ancora sarebbe venuta a rendersi manifesta l' intenzion principale, perchè tutti gl' impeti diretti per le oblique che, movendo da F, vanno a raggiungere in AC l' orizonte, sono uguali ciascuno all' impeto per FC, e perciò necessariamente uguali fra loro, che è insomma, in dimostrar la verità del supposto galileiano, il ragionamento che prima di tutti avea fatto Luca Valerio.

Quello però, che da noi s' è chiamato vigor giovanile, mal giudicato dal Nardi, non era reputato troppo sincero, come non sincero stimavalo forse il Torricelli, il quale, tenendosi perciò affezionato più che mai ai modi suoi proprii, nel dover mandare alla luce il libro, che tre anni prima il Castelli aveva presentato a Galileo manoscritto, vi premetteva fra le altre queste pa-

role: « Scio Galileum, ultimis vitae suae annis, suppositionem illam demonstrare conatum, sed quia ipsius argumentatio cum libro De motu edita non est, pauca haec de momentis gravium libello nostro praefigenda duximus, ut appareat quod Galilei suppositio demonstrari potest » (Opera geom., P. I, Florentiae 1644, pag. 98).

La torricelliana dimostrazione del supposto galileiano muove dal Teorema meccanico, condotto però da un principio, che nella Storia della scienza apparisce del tutto nuovo. È quel principio che due corpi rimangono nella posizione, in cui sono equilibrati, quando il loro comun centro di gravità, essendogli impossibile scendere, si trova sempre nella medesima linea orizzontale. Il Viviani lo illustrava mirabilmente così, riducendolo in forma del seguente teorema:

Figura 7.

« Se i due pesi eguali A, B (fig. 7) sono legati ad un filo, passato sopra una carrucola o altro sostegno, che possano scorrere; questi staranno in equilibrio, dovunque si saranno situati. »

« Perchè, se si movessero, tanto acquisterebbe l'uno che scendesse, quanto perderebbe l'altro che salisse, essendo i loro moti eguali, e per linee perpendicolari. E se è possibile si muovano dal sito A, B nel sito C, D: è manifesto che, giunti li centri di gravità in linea retta, il centro comune di A, B verrà in mezzo, cioè in E, ed il centro comune di C, D verrà in mezzo, cioè in E: perch' essendo le CA, BD uguali tra loro e parallele, congiunte CD, AB si segano nella medesima proporzione e nel mezzo, onde il centro comune non si sarà mosso, e non avrà acquistato niente, sicchè i gravi A, B non si moveranno dal loro sito, in che furono posti. »

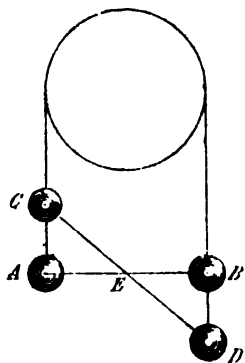
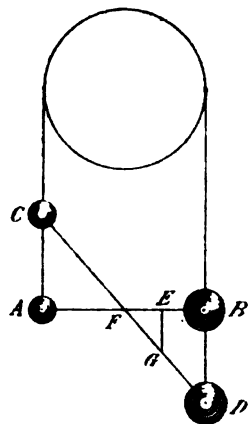



Figura 8.

« Ma se il peso B (fig. 8) sarà maggiore del peso A, quello scenderà, perchè il centro comune loro è fuori del mezzo della BA, come in E, più vicino al centro B, ed è in luogo che può scendere sempre per la linea perpendicolare EG. » (MSS. Gal., P. V, T. VII, fol. 72 a tergo).

Posto dunque questo principio, che il Viviani ci ha così ben dichiarato, ecco come il Torricelli dimostra la sua prima proposizione, che cioè « si in planis inaequaliter inclinatis, eamdem tamen elevationem habentibus, duo gravia constituantur, quae inter se eamdem homologe rationem habeant, quam habent longitudines planorum; gravia aequale momentum habebunt » (Op. geom. cit., pag. 99).

Siano AC, CD (fig. 9) i due piani inclinati, sopra i quali posino i due

gravi A, B con i loro pesi nelle dette proporzioni. Avranno ugual momento se, congiunti insieme dal filo ACB, scendendo l' uno in D, e risalendo l' altro in E, il loro comun centro di gravità rimanga sempre in un punto della orizontale AB, ciò che, chiamati E, D i due gravi, e da E condotta la EF parallela a CD, l' Autore dimostra con un discorso, da noi più brevemente significato per queste equazioni. E : D = AC : CB = AE : EF = BD : EF = GD : EG. G dunque è il comun centro di gravità de' pesi, nè s' è nulla rimosso dall' AB orizzontale.

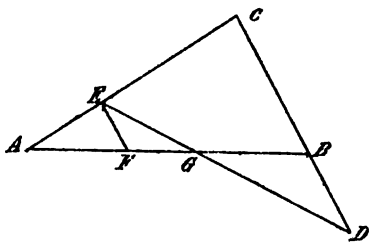



Figura 9.

Si passa di qui a proporre, in secondo luogo, che, posandosi sopra AB, BC (fig. 10), piani diversamente lunghi ma ugualmente elevati, due pesi uguali A, C, i loro momenti *sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum* (ibid., pag. 100): ciò che, presa D quarta proporzionale dopo AB, BC, A, per cui i momenti di A e di D sono uguali per la precedente, ed osservando ch' essendo C, D posati sul medesimo declivio hanno i momenti proporzionali alle moli, riman dimostrato dalle seguenti equazioni M.° C : M.° D = C : D = A : D = AB : BC. Donde si conclude il Teorema meccanico nella sua propria forma: « Momentum totale gravis, ad momentum quod habet in plano inclinato, est ut longitudo ipsius plani inclinati ad perpendiculum » (ibid., pag. 101).

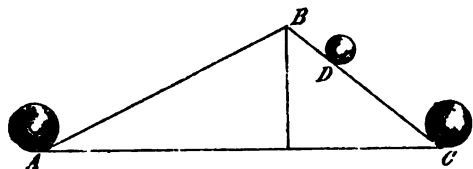



Figura 10.

La terza proposizione che, dopo un corollario e uno scolio elegantissimi relativi alla precedente, in questo libro del Torricelli, ricorre, non ha propriamente alcuna importanza, come principio di mezzo a concluder la verità del supposto galileiano, e solamente si scrive per supplir, come l' Autore credeva, al difetto di Galileo. Il difetto è però di chi non vide la cosa nel secondo modo come si dimostra la VI proposizione del Dialogo terzo, benchè con processo diverso da questo qui, che è tale: s' abbiano i piani AC, AB (fig. 11) di ugual lunghezza, ma variamente elevati in C e in B: che i momenti dei gravi, posti sopra questi piani, stiano come CE, BD, seni degli angoli delle elevazioni, è concluso dalle uguaglianze M.° AB : M.° BF = FB : AB = FB : AC = BD : CE, osservando che M.° BF = M.ª AC, per essere AC, BF ugualmente inclinate.

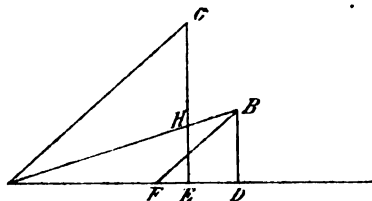



Figura 11.

Il corollario, lo scolio, e il lemma, per servire a una nuova dimostra-

zione della Sesta galileiana, sono di una grande importanza, ma per la via di concluder ciò, che ora a noi più preme, si rientra nella quarta proposizione, la quale, com' è presentata nel suo primo modo, non differisce per verità che di pochissimo dalle dimostrazioni di Galileo, del Michelini e del Baliani. Imperocchè, a provare che il tempo per BA, nella precedente figura, sta al tempo per BF come BA sta a BF, presa BH terza proporzionale dopo AB, BF, osserva che BF e BH sono isocrone, ond' è che, dall' aversi per la legge dei moti accelerati $T.^o AB : T.^o BH = \sqrt{AB} : \sqrt{BH} = AB : BF$, ne concludeva anche il Torricelli, come i sopra commemorati Autori, il suo intento.

Al Teorema meccanico, e a questa quarta bastava supplir la prima di Galileo (Alb. XIII, 166), per avere i mezzi necessari a dimostrar finalmente: « Gradus velocitatis eiusdem mobilis, super diversas planorum inclinationes acquisiti, tunc aequales sunt, cum eorumdem planorum elevationes aequales sunt » (Op. geom. cit., pag. 108). Siano, sempre riferendosi all' ultima figura, AB, FB i piani aventi la medesima elevazione BD. Sarà per la precedente $T.^o AB : T.^o FB = AB : FB$.. Ora, qualunque ella siasi, si chiami V la velocità, che acquista il grave giunto in A, e si chiami V' la velocità, qualunque ella pure si sia, acquistata dal grave giunto in F. Avremo, per la citata prima di Galileo, $T.^o AB = \frac{AB}{V : 2}$, $T.^o BF = \frac{BF}{V' : 2}$, ossia $\frac{V}{2} : \frac{V'}{2} = \frac{AB}{T.^o AB} : \frac{BF}{T.^o BF}$. Ma i termini di questa seconda ragione sono uguali, dunque uguali sono anche i primi, e perciò $V = V'$ come doveva dimostrarsi.

Ora si domanda: fu egli veramente conseguito il fine, per cui il Torricelli si dette a elaborare e, intanto che si rimaneva nelle lettere private quella di Galileo, divulgare in pubblico quest' altra sua dimostrazione? Si saranno eglino, i Matematici, persuasi che il supposto principio si veniva a rendere nel suo libro, per geometriche ragioni, evidente? Ma se fossero bastate le ragioni, il Baliani, da cinque anni, avrebbe dovuto fare l' effetto, non essendo la sua dimostrazione nè men bella di questa torricelliana, nè men concludente. Nel rifiutar dunque che si faceva da tanti, prima le probabilità degli sperimenti, e poi le ragioni della geometria, doveva esserci molta caparbietà, della quale il Torricelli stesso ebbe a fare esperienza.

Il Mersenno, dop' aver letta la prima parte del trattato *De motu gravium naturaliter descendentium,* prendeva la penna in mano per dire in una sua lettera all' Autore: « Expectamus abs te postulati rationem, ab experientia, si fieri potest, independentem » (MSS. Gal. Disc., T. XLI, fol. 69). — Ma non siete, padre, domandava il Torricelli maravigliato, giunto ancora alla quinta proposizione del mio primo libro? — E si sentiva rispondere: — Io ho per nulla quella dimostrazione, condotta dal supporre i momenti proporzionali alle velocità, che per me è un paralogismo vostro e di Galileo. — Alle quali accuse si rispondeva con l' eloquenza di queste ragioni:

« Quod ego suppono pag. 104 cum Galileo adeo manifestum mihi videtur, ut sine ulla dubitatione loco principii admitti et concedi posse videatur.

Ratio physica est: si fuerint a diversis planis duae sphaerae, ex. gr. vitreae et aequales, postquam ostendero momentum unius, ad momentum alterius, esse duplum, quis non concedat et velocitatem ad velocitatem esse duplam? Dupla enim causa duplum effectum parere debet in eodem subiecto. Moles supponuntur aequales eiusdemque materiae, virtus vero, quae impellit alteram molem, dupla demonstratur virtutis alterius: ergo, si dupla virtus est, duplam procul dubio velocitatem efficiet » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 76).

— Se così è, insisteva a questo punto del ragionamento il Mersenno, il momento di C (nella figura X qui poco addietro) dovrebbe esser tanto maggiore del momento di D, quanto la mole è maggior della mole: e nonostante voi, nella vostra proposizione seconda, dite che que' due momenti sono uguali. — Ma non badava, così dicendo, che i due gravi eran posati sul medesimo declivio, per cui il Torricelli, a rimuovere l'obiezione inconsiderata, proseguiva in tal guisa il suo discorso:

« Neque obstat quod obiici potest de gravibus in eodem plano constitutis, quae, sive sint eiusdem molis, sive non, aequali tamen velocitate feruntur. Nam omnia gravia, cuiuscumque molis, ponderis et figurae sint, libere demissa a loco absque impedimentis eadem velocitate feruntur deorsum, nempe tam sphaera aurea quam lapidea, ac etiam lignea, immo et ex materia laevissima eadem velocitate ex se descenderent. Si vero pusillum quoddam spatium graviores materiae videntur antecedere non procedit hoc ab inaequalitate virtutum moventium, quae ulla est, sed ab inaequalitate impedimentorum. Tantum enim est in unoquolibet corpore virtutis moventis, quantum est materiae. Exempli gratia in uncia auri, atque in uncia cerae, tantumdem est et materiae et virtutis moventis, licet caera appareat multum maiorem locum occupare. Propterea, dum quiescunt, pariter gravitant, et manifeste aequalitatem virtutum indicant. Quando vero moventur, aurum praecedit, sed longe minus quam pro ratione specierum gravitatis, ipsam caeram, quod quidem accidit quia, cum virtutes aequales sint in utraque materia, si altera cum maiori mole ambientis medii, altera cum minori luctari debet. »

« Quando vero consideremus duas sphaeras eiusdem materiae, sed alteram unius unciae, alteram vero decem librarum, aequaliter hae descendunt in eodem plano, quia in utraque sphaera virtutes illae arcanae, licet inaequales sint inter se, eamdem habent rationem quam resistentiae, hoc est corpora ipsa movendo. Vel si mavis, hoc modo: virtus minor, ad minus pondus a se movendum, eamdem habet rationem quam virtus maior, ad maius pondus a se movendum. Exiguum illud quod videtur aliquando praecedere gravius, quando maxima fuerit inter pondera proportio, oritur, non a principiis intrinsecis, sed ab externis impedimentis, nempe a densitate medii, quae, ut optime docet Galileus, magis impedit minores moles quam maiores, quandoquidem minores, cum maiorem superficem habeant, a maiori quantitate medii retardantur. »

« Mirum ergo non sit si metalla, lapides, ligna etc. tam in descensu libero, quam in eodem plano collocata, pene eadem velocitate descendere, cum

omnia gravia aequalem sibi ipsis virtutem moventem habeant. At in planis inaequaliter inclinatis, ubi ego ostendero duas sphaeras aequales et aeque graves inaequalia momenta habere, quid ni inferre possim illam, quae maius habet momentum, maiori velocitate delabi pro ratione momentorum? »

« Sed ego nimis fortasse provectus sum in hac causa, quae tanto patrocinio mihi non videbatur indigere. Satis enim erat inter pondus et momentum distinguere » (ibid., fol. 76, 77).

Se avesse avuto il Mersenno la mente libera da pregiudizi e l'animo da passioni, si sarebbe dovuto persuadere della verità delle cose, che tanto chiaramente veniva in questo discorso esponendogli il Torricelli, ma egli persisteva caparbiamente in dire che, nonostante la quinta proposizione dimostrata da lui, il supposto galileiano aveva tuttavia bisogno di prove. Soggiungeva un' altra difficoltà, ed era non si poter, dall' essere i tempi proporzionali agli spazi, concludere che le velocità sono uguali, altro che nei moti equabili; e che avrebbero dovuto perciò Galileo e il Torricelli dimostrar che gli spazi passati equabilmente dal mobile son proporzionali a quelli, che passerebbe nel medesimo tempo con moto accelerato. Sembrerebbe la cosa incredibile a chi sa e ripensa che s' incomincia a dimostrar ciò per l' appunto infino dal primo aprire, nel terzo dialogo delle Nuove scienze, il trattato del moto, ma Michelangiolo Ricci ce ne assicura con queste parole, scritte da lui in una lettera allo stesso Torricelli:

« Le opposizioni fatte al trattato del moto dal padre Mersenno si riducono a pochi capi: Oppone primieramente, e se ne reputa assai l'Autore, a quella riprova della volgare definizione data al moto accelerato, che si trova a carte 164, cioè che la velocità cresce secondo lo spazio. Dice esser vero nel moto equabile, che, sendo le velocità in proporzione delli spazi, sono questi passati in egual tempo, ma bisogna che il Galileo provi, il che non fa, che posta la definizione volgare ne segue che la velocità, con la quale un mobile passa v. g. BC, sia uguale ad un moto equabile, e la velocità, con la quale è passato lo spazio BA dallo stesso mobile, sia uguale ad un moto equabile, e poi questi due moti equabili abbiano la proporzione di BC a BA. Oppone nel secondo luogo che l' assunto primo fatto dal Galileo, ma da V. S. dimostrato, sia bisognoso di prova, e perciò o probabile o improbabile, ed in conseguenza le proposizioni sei seguenti asserisce esser tanto lontane dall' evidenza geometrica, quanto è impossibile aver certezza d' una conclusione dedotta da verosimile assunto. Finalmente dice esser difficilissimo il certificarsi dell' esattezza dell' esperienza fatta da Galileo, e riferita a carte 175 (misurando gli spazi in un regolo inclinato, lungo la incavatura del quale si faceva scendere una palla di bronzo, e i tempi nelle clessidre, con pesar, durante la scesa, l' acqua stillata) ed egli ne adduce in contrario una fallacissima, come l' avrà letta nella lettera del padre Mersenno. Con questi fondamenti presume il Gesuita d'alzar rocca inespugnabile ai danni del Galileo e della sua Scuola, e con mille vanti di sè medesimo e scherno del Galileo si dimostra non men leggero ne' costumi, che sia nella dottrina » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 116).

Chiamasi qui dal Ricci il Mersenno gesuita, non perchè fosse propriamente tale nell'abito esteriore, o nella profession religiosa, ma perchè consentiva e cooperava con i gesuiti in fare ogni sforzo per non veder altri prima di loro sorgere a instituire la nuova scienza del moto. L'ufficio però d'alzar rocca inespugnabile ai danni di Galileo non si stettero costoro in affidarlo allo zelante Frate minimo, estraneo al loro collegio, ma se l'assunsero per sè medesimi, deputandone particolarmente Pietro Cazr e Niccolò Cabeo. Il Gesuita italiano colse l'occasione d'infirmare i fondamenti della Scienza galileiana nelle *Questioni* intorno ai quattro libri della meteorologia di Aristotile, percorrendo agile e leggero, così portato com'era dal vento dell'ambizione, il campo universale della Scienza. Ma il Francese vi si dedicò di proposito, scrivendo una dissertazione, ai paralogismi della quale non si potè tener di rispondere il Gassendo, per salvar, nel difendere il vero, più l'onore della sua propria nazione, che quello di Galileo.

Era un giorno il Filosofo parigino nella sua stanza di studio, col libercolo del Cazreo aperto innanzi agli occhi, alla pagina, dov'ei diceva non essere il postulato galileiano sufficientemente confermato dall'esperienza, *cum rationes etiam non desint, quibus oppositum probabilius reddatur*, e aveva preso in mano la penna per seguitare a scrivere il § XIII della sua prima epistola *De proportione qua gravia decidentia accelerantur*, affine di confutar la temeraria sentenza; quando entra a visitarlo Pietro Carcavy, nobilissimo senatore e delle Matematiche studiosissimo, che, riconosciuta quella cazreana dissertazione, e compresa l'intenzion del Gassendo, gli annunziava esser già comparita in Parigi una copia del trattato *De motu* del Torricelli, dove, di quello stesso così disputato assunto galileiano, si dava la dimostrazione più vera e più concludente, che da un Geometra si potesse desiderare. « Praetereo autem, soggiunge esso Gassendo, ut, copia illius videndi statim impetrata, deprehenderim rem confectam quinque propositionibus » (Parisiis 1646, pag. 23), di ciascuna delle quali cinque torricelliane proposizioni prosegue ordinatamente a trascrivere l'enunciato.

Il fatto così da esso Gassendo narrato, in tuono di solennità e d'importanza, dice di per sè medesimo in quanta stima s'avesse il Torricelli in Francia, e quanto si credesse autorevole a persuadere i ritrosi con la elegante eloquenza delle sue dimostrazioni. Del Baliani non si fa motto, quasi non avess'egli, prima dello stesso Torricelli, dimostrato il medesimo. Anzi è notabile che, occorrendo al Gassendi nella citata epistola contro il Cazreo di commemorare il trattato del Matematico genovese, edito in quell'anno, che si pubblicarono i Dialoghi di Galileo; si limiti a dir ivi che anche il Baliani confermava essere ne' declivii di uguale altezza uguali le velocità, *argumento sumpto ab ipsis pendulorum vibrationibus*. Potrebb'esser che il Matematico parigino avesse letto il trattatello del Nostro in una di quelle prime copie, edite nel 1638, nella quale mancava la carta, fatta ristampar nel Settembre dell'anno dopo, aggiuntavi la dimostrazione del supposto galileiano, ma in ogni modo colui, che si voleva far passare per emulo invi-

dioso, dovè rimanersi indietro, nella fama e nella stima universale, a quell' altro, da per tutto acclamato come discepolo e promotore esimio di Galileo.

L' ingiustizia del pubblico giudizio, riconosciuta ora spassionatamente da noi, doveva esser tanto più vivamente sentita da chi n' era allora fatto segno, onde, attribuendo forse il Baliani alla esiguità del volume, al negletto abito esteriore, e alla trascuratezza della forma del libro l' essere così passata inosservata ai Matematici la sua propria dimostrazione; volle tornare ancora a tentare la sua fortuna, ampiando il trattato, e studiandosi di adornarlo con qualche fior di eloquenza. Lo distribuì in tre libri, in materia del moto dei solidi, aprendosi nelle respettive prefazioni largo campo di speculare: e ve ne aggiunse altri tre, in materia del moto dei liquidi, affinchè non avesse, nemmeno da questa parte, a rimanersi l' opera sua indietro a quella del Torricelli, che il pubblico ammirava già da due anni.

Si sente alitar da ogni pagina, per non dire da ogni parola, quello spirito di emulazione, che teneva agitato l' animo dell' Autore, ma perchè la sostanza era insomma la medesima, l' esser tornato a diffonderla, con tanta larghezza, par che faccia l' effetto de' liquori annacquati, i quali tanto guadagnano nel volume, quanto scapitano nel sapore e nella fragranza. Si può veder l' esempio di ciò, senz' uscire dall' argomento del nostro discorso, paragonando la dimostrazione del supposto galileiano, data nel trattatello del 1638, con quella che si volle ampliare nel 1646, derivandola da più alti principii, e conducendola per una serie più lunga di proposizioni.

Pregevoli in ogni modo son nell' opera del Baliani, sopra le altre, due parti, che, se non si fossero trascurate dal Torricelli, gli risparmiavano le opposizioni e le censure vanitosamente moleste del Mersenno. Sanno i nostri Lettori che la principale di quelle opposizioni nasceva dal non sapere intendere qual relazione avessero con le velocità gl' impeti o i momenti; a che il Baliani fu sollecito di rispondere: « Impetus differens est solum fortasse a velocitate, quia impetus sit velocitas in actu primo, ita ut aliquo pacto impetus sit causa velocitatis » (De motu natur., Genuae 1646, pag. 70).

L' altra censura del Mersenno consisteva nel dire che avrebbe dovuto il Torricelli dimostrar che i moti accelerati si riducono a proporzion degli equabili, ciò che il Baliani fa, dimostrando, in più semplice ed efficace modo di Galileo, la seguente proposizione, scaturita dai più intimi seni del principio d' inerzia: « Grave in motu naturali, sive perpendiculari sive inclinato, fertur sine ope gravitatis aequabili tempore per duplum spatii praecedentis » (ibid., pag. 58).

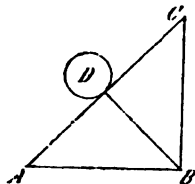



Figura 12.

Premesso ciò, e avendosi in secondo luogo per dimostrato, nell'oramai noto triangolo ACB (fig. 12), che la normale BD precide in D lo spazio CD isocrono con CB, si fa via il Baliani a concludere la verità dell' assunto galileiano, con questa proposizione: « Si linea perpendicularis et inclinata, ab eodem puncto digressae, per quas idem grave naturaliter ducatur, secentur a recta normali ad inclinatam; impetus in punctis sectionis sunt ut

portiones linearum infra sectiones » (ibid., pag. 72). Vuol dire, ritenuti i soliti simboli, essere V.ª B : V.ª D = CB : CD, ciò che immediatamente consegue dalle due premesse proposizioni, essendo per quellla V.ª B $= \frac{2\,CB}{T.^o\,CB}$, V.ª D $= \frac{2\,CD}{T.^o\,CD}$, e per questa T.° CB = T.° CD; d'onde V.ª B : V.ª D = CB : CD, come si voleva provare, e anche V.ª B : V.ª D = CA : CB, per la similitudine de' triangoli ACB, DCB.

Passa di qui il Baliani a dimostrare, in un'altra proposizione, che V.ª A : V.ª D = CA : CB, invocando per far ciò la legge dei moti accelerati, che dà AC : CD = V.ª A^2 : V.ª D^2; e osserva che, avendo i triangoli simili ABC, CBD la medesima altezza BD, le basi AC, DC stanno come i quadrati de'lati omologhi AC, CB, onde V.ª A^2 : V.ª D^2 = AC^2 : CB^2, ossia V.ª A : V.ª D = CA : CB, come volevasi dimostrare.

Per concludere poi la verità dell'assunto galileiano mette il Baliani in ordine un'altra proposizione distinta, la quale è però superflua, avendosi l'intento per corollario immediato dalle due precedenti: perchè, se questa dà V.ª A : V.ª D = CA : CB, e quella dà V.ª B : V.ª D = CA : CB; dunque V.ª A = V.ª B, senza bisogno d'altri discorsi.

Dopo dieci anni, da che il Baliani veniva così più solennemente a confermar la dimostrazione del Torricelli, usciva postuma in Bologna, inserita nel terzo dialogo delle Nuove scienze, che per la prima volta si ristampava; quella di Galileo, aspettata da tutti con tanto desiderio. Sembrava perciò che dovesse fra' Matematici finalmente cessare ogni mormorio, e che dovessero nella dimostrata verità quietar l'intelletto, quando, in un libro venuto d'Olanda, e in cui l'Autore, per sopredificarvi suntuosamente, veniva ricercando i fondamenti della scienza galileiana; dop' esservisi dimostrato che lo spazio percorso equabilmente dal mobile, col massimo grado della velocità acquistata, è doppio di quello che aveva prima passato acceleratamente, s'ebbe a leggervi con gran maraviglia soggiunte queste parole: « Hinc vero non difficile iam erit demonstrare propositionem sequentem, quam concedi sibi ut quodammodo per se manifestam Galileus postulavit. Nam demonstratio illa, quam postea adferre conatus est, quaeque in posteriori operum eius editione extat, parum firma meo quidem iudicio videtur. »

Si leggono queste parole a pag. 62 del primo tomo delle Opere di Cristiano Huyghens, stampate nel 1724 in Leida, e il nome dell'Autore, e il saper che dal primo libro dell'*Horologium oscillatorium* sono state trascritte, fruga vivamente la curiosità di veder com'altrimenti e meglio di Galileo abbia il celebre uomo, nella proposizione sua sesta, dimostrato: « Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitae, aequales sunt, si planorum elevationes fuerint aequales » (ibid.).

Siano, dice l'Huyghens, AB, CB (fig. 13) i due piani inclinati, e AE, CD le loro elevazioni uguali: se un mobile si faccia scendere ora da A, ora da C, giungerà in B col medesimo grado di velocità, benchè sia l'una scesa, co-

munque vogliasi, più precipitosa dell' altra. Il ragionamento che in tal forma procede, secondo le parole proprie dell' Autore, piglia valore dalla proposizione IV, nella quale era già dimostrato che risalirebbe in su il mobile da B nello stesso tempo, e passando per i medesimi gradi di velocità, coi quali era prima sceso da C: « Si enim per CB cadens minorem velocitatem acquirere dicitur, quam cadens per AB, habeat ergo per CB cadens eam dumtaxat, quam per FB acquireret, posita nimirum FB minore quam AB. Acquiret autem per CB cadens eam velocitatem, qua rursus por totam BC possit ascendere. Ergo, et per FB, acquiret eam velocitatem, qua possit ascendere per totam BC. Ideoque cadens ex F in B, si continuet motum per BC, quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest, ascendet usque in C, hoc est altius quam unde decidit, quod est absurdum » (ibid., pag. 63).

Figura 13.

Suppone dunque l' Huyghens che, sceso il mobile da F in B, nel riflettersi per BC o per qualunque altra inclinazione diversa, debba risalir giusto a tanta altezza, quanta fu la caduta: ma questo insomma era quello che dovevasi dimostrare, e intorno a che s' era sottilmente aggirato il discorso di Galileo. L' Huyghens tiene il medesimo filo, e lo conosce e lo confessa, dicendo di voler nella sua quinta proposizione dimostrar di nuovo quel che aveva già dimostrato nella seconda *Galilei methodum sequendo.* Quella quinta infatti dell' Orologio oscillatorio corrisponde con lo scolio alla proposizione XXIII del Dialogo terzo, dove graficamente si dimostra che, se lo spazio passato nello scendere acceleratamente si rappresenta dal triangolo, lo spazio passato con moto equabile nel medesimo tempo, e con l' ultimo grado di velocità acquistato nella discesa, vien rappresentato dal rettangolo ossia dal doppio.

Si fanno da ciò via ambedue gli Autori a considerare gli effetti del moto incidente e del riflesso, così Galileo concludendo il suo sottile discorso: « Ex his igitur rationabiliter asserere possumus quod, si per aliquod planum inclinatum fiat descensus, post quem sequatur reflexio per planum elevatum, mobile per impetum conceptum ascendet usque ad eandem altitudinem, seu elevationem ab horizonte. Ut si fiat descensus per CB (nella precedente figura) feretur mobile, per planum reflexum BG, usque ad horizontalem CG » (Alb. XIII, 202). Questo si fa conseguire dai principii già dimostrati, quando però gli angoli dell' incidenza e della riflessione siano uguali, ma Galileo soggiunge che il teorema è vero « non tantum si inclinationes planorum sint aequales, verum etiam si inaequales sint, qualis est plani AB « (ibid.) e per dimostrarlo invoca il principio, che nella prima edizione s' aveva per supposto, ma che nella seconda postuma si concludeva con matematico ragionamento. Non dando pure a questa conclusione, come vuol l' Huyghens, nessun assoluto valore, è un fatto che nel *Dialogo,* come fu stampato nel 1638 in

Leyda, s' ha disteso il medesimo discorso, che nell' *Orologio* stampato nel 1673 a Parigi, se non che, mentre là si supponeva un principio per la dimostrazione, qui supponesi invece quel medesimo, ch' era proposto di dimostrare.

Così essendo, sembra a noi che fosse lodevolissima l' intenzione di Alessandro Marchetti, di richiamar cioè alla memoria dei Matematici, i quali dietro la grande autorità dell' Olandese avrebbero potuto deviare, le più schiette e severe tradizioni della scuola italiana. Dell' essere esso Marchetti riuscito a dare a quelle tradizioni, così variamente maneggiate, una forma nuova, con troppa vanità si compiacque, e ciò dette a' suoi nemici occasione di calunniarlo, e con livore impotente di strascicarlo nel fango. Il Nelli, in cui aveva il Grandi insufflato l' odio ma non la scienza, concludeva così una sua questione storica: « Adunque è evidente ed innegabile che il signor Alessandro Marchetti non è l' autore dell' opera *De resistentia solidorum* » (Saggio di storia letter., Lucca 1759, pag. 53). Il principio e i termini di mezzo per questa conclusione sono assai bene strani, fondandosi sul giudizio poco favorevole fatto dai Matematici contemporanei intorno a varii opuscoli geometrici dello stesso Marchetti. Ma se fosse logica buona concludere da alcune proposizioni false o men perfettamente dimostrate l' inettitudine di un autore a condur da sè solo un' Opera, si dovrebbe dal recente esempio argomentare che non è l' Huyghens l' autore dell' Orologio oscillatorio, e a più forte ragione dedurre, dai tanti falli notati e notabili, non esser di Galileo i libri dei moti locali e dei proietti.

Faceva dunque propriamente al Nelli più difetto il senso comune che la logica, e che mancasse a lui la scienza necessaria per scriverne la storia è notissimo a chi ha letto que' suoi loquaci volumi; ma a cui fosse venuta meno la pazienza, può servire il sapere quel ch' egli dice a sfregiar le proposizioni dal Marchetti ordinate, per concludere in ultimo la verità dell' assunto galileiano. La seconda di quelle proposizioni, che dall' Autore si mette per *Fondamento alla scienza universale del moto,* è così formulata: « Momenta eiusdem ponderis, supra diversas planorum inclinationes, eam inter se habent rationem, quam perpendiculares orizonti demissae a sublimibus eorumdem planorum punctis, aequalesque ex ipsis longitudines abscindentibus » (Pisis 1674, pag. 9). « Questa, dice il Nelli, la propose e dimostrò prima di ogni altro a me noto il Galileo nella *Scienza meccanica,* dopo di cui la dimostrò ancora il Torricelli nella sua III proposizione, in tempo che questi, per quanto io argomento dal suo schietto parlare, non aveva ancora notizia del detto trattato di Galileo » (Saggio cit., pag. 24, 25). Chi scrisse così non doveva aver letta mai la *Scienza meccanica,* perchè Galileo suppone ivi solamente la verità del Teorema, che poi incidentalmente dimostrò nella sesta proposizione del Dialogo terzo, dove non avendo il Torricelli saputo riconoscere il già fatto, si lusingò d' esser egli stato il primo. Come non lesse il Nelli quel trattato meccanico, così può credersi che non leggesse e non intendesse gli altri di Galileo, a quel modo che non gli leggono e non gl' intendono tanti altri al pari di lui elogiatori del divino Uomo; ond' es-

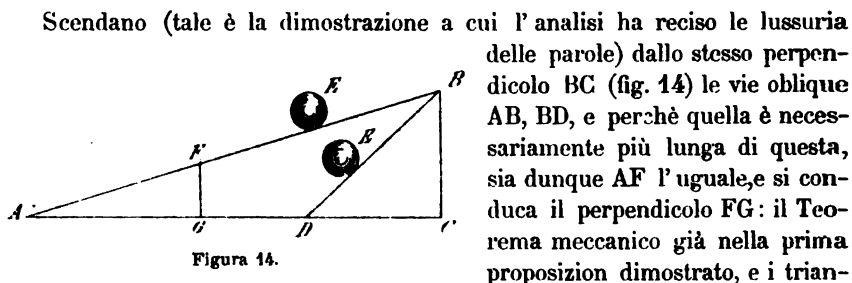
sendo la sentenza loro senza giudizio è meglio proceder oltre per vedere, giacch' è un' occhiata sola, qual sia quella nuova forma, che si diceva aver data il Marchetti alla sua seconda proposizione sopra annunziata, e dalla quale si facevano dipendere le altre tre concludenti la verità fondamentale della scienza universale del moto.

Scendano (tale è la dimostrazione a cui l' analisi ha reciso le lussuria delle parole) dallo stesso perpendicolo BC (fig. 14) le vie oblique AB, BD, e perchè quella è necessariamente più lunga di questa, sia dunque AF l' uguale,e si conduca il perpendicolo FG: il Teorema meccanico già nella prima proposizion dimostrato, e i triangoli simili ABC, AFG danno M.° DB : M.° AB = AB : BD = AB : AF = BC : FG, d' onde, osservando che M.° AB = M.° AF, è conseguito il proposito.

Figura 14.

La terza, nella quale si dimostra che i tempi per i piani ugualmente elevati son proporzionali agli spazi, e la quinta che, dall' aversi i tempi proporzionali agli spazi, conclude dover essere le velocità uguali, troppo risentono l' imitazione delle dimostrazioni date dagli Autori precedenti, perchè, presa BF (nella figura 14) terza proporzionale dopo AB, BD, anche il Marchetti dimostra che, avendo il grado della velocità in F la medesima proporzione tanto alla velocità in A, quanto alla velocità in D, queste debbono essere tra loro uguali. « Ergo gradus velocitatis in puncto F eamdem habebit proportionem, ad gradum velocitatis in puncto A, quam ad gradum velocitatis in puncto D: ideoque gradus velocitatis acquisiti in A et D aequales sunt » (Fundamenta cit., pag. 21). È vero dunque che la novità non s' introdusse dal Marchetti, altro che nella sua seconda proposizione, ma l' utile che conseguiva, o che poteva conseguire alla scienza da questo dispregiato opuscolo del professore pisano, era quello di ridurla sui sentieri prima aperti in Italia, e segnati da Galileo, dal Torricelli e dal Baliani.

III.

Tale, quale s' è da noi fin qui narrata, è la storia delle sollecite cure, che si dettero i Matematici, da Galileo infino all' Huyghens e al Marchetti, per confermar la verità del fondamento meccanico nelle menti combattute dal dubbio. L' importanza dell' argomento ci ha tirato fuori di quella via, alla quale intendiamo ora di ritornare, per salir dietr' essa nuovamente ad Arcetri, dove lasciammo Galileo che, perduta la vista e perciò la facoltà di potersi andare internando in più profonde speculazioni, s' occupava nelle tenebre notturne intorno ai primi e principali teoremi di Meccanica, per ordinarli

e disporli in miglior forma ed evidenza. Così dicendo egli stesso al Baliani, gli soggiungeva di aver la speranza di poter migliorare e ampliare lo scritto, fin allora da sè pubblicato intorno alle nuove scoperte proprietà del moto.

Uno de' primi frutti di quelle occupazioni fu il frammento dettato al Viviani, perchè alla prima occasione di una ristampa s' inserisse, dopo lo scolio alla proposizione seconda, nel terzo dialogo delle Scienze nuove. Non fu quella ristampa così sollecita come si credeva, e non ebbe perciò l' Autore il tempo di veder l' opera sua ampliata e migliorata, secondo gli studii fattivi attorno, e secondo la conceputa speranza. Anzi, quando fosse pure vissuto infino al 1656, avrebbe dovuto sentir sè, e rimandare i lettori non sodisfatti, in trovar che i perfezionamenti ai Dialoghi, già tanto ammirati, si riducevano alla sola dimostrazione inserita dopo il detto scolio dal nuovo editore di Bologna. In ripensare al fatto si sentono certi dubbi nascere nella mente che ci ragiona: o non son vere quelle occupazioni notturne, delle quali Galileo scriveva al Baliani, o de' frutti loro non si lasciò scritta o se ne smarrì la memoria. E dall' altra parte, dovendo quelle scritture esser rimaste in mano al Viviani, a cui furono dettate, com' era possibile che il discepolo zelantissimo volesse defraudare invidioso alla gloria o reluttar sacrilego alle ultime volontà del Maestro, ritenendosi que' fogli, invece di mandargli a Bologna al Rinaldini, che ne arricchisse la nuova edizione? Nè quelle aggiunte ai Dialoghi dovevano aver minore importanza o dar minore sodisfazione ai lettori delle lettere al Castelli e all' Antonini, che dalle mani del dottissimo signor Viviani, discepolo di sì gran maestro, diceva nella sua prefazione d' aver ricevute il bolognese tipografo Carlo Manolessi.

Dietro queste considerazioni, ci si rendeva probabile che le speranze di correggere e di ampliare gli scritti intorno al moto fossero, per l' impotente vecchiezza dell' Autore, tornate vane: nonostante ci mettemmo a cercar per i manoscritti galileiani con più diligenza che mai, e fu particolarmente trattenuta la nostra attenzione sul Tomo quarto della Parte quinta. Ivi ritrovansi veramente di mano del Viviani scritti vari frammenti di dialogo, relativi alle Nuove scienze, e la ben distinta calligrafia giovanile ci volle far credere da principio che fossero in que' frammenti, dettati al suo giovane ospite, raccolti da Galileo i frutti delle sue vigilie. Essendo poi per la maggior parte quegli argomenti riconosciuti da noi di grande importanza, e confermandoci in credere impossibile che, se Galileo gli avesse dettati a quel modo coll' intenzione d' inserirli nella prima nuova edizione, non avrebbe il Viviani in nessun modo mancato di adempire al suo sacrosanto dovere; ci volgemmo a pensare che non dettatura altrui ma esercizio proprio di chi gli scrisse fossero quegli elaboratissimi dialogismi. La probabilità poi parve ci si riducesse a certezza occorrendoci a notar nelle nostre ricerche quel che ora diremo.

Nel citato manoscritto, volume quarto, ci abbattemmo a leggere, autografo del Viviani, un colloquio, dove il Sagredo propone di dimostrar l' equilibrio nella bilancia di braccia disuguali, scansando quel comun principio dei Meccanici reputato vizioso, perchè s' introduceva la causa, invece dell' effetto

presente. Il Salviati approva come ragionevole il dubbio, e confessa di non essere nemmen egli sodisfatto di concludere da un moto in potenza le ragioni del moto attuale.

L' argomento, come ben si vede, è di grande importanza, trattandosi di decidere intorno alla verità o alla falsità del famoso principio delle velocità virtuali: che se il Salviati di questo frammento rappresentasse davvero il Salviati del Dialogo, avremmo di qui il documento più certo che Galileo, negli ultimi anni della sua vita, repudiò quel principio, di cui il Lagrange gli attribuiva la gloria dell' invenzione. Ma come assicurarsi dell' identità della persona, che qui e nelle Nuove scienze conversa? Il leggervi scritto di mano del Viviani *di questo ho l' originale* non ci quieta, potendogli noi domandare: a che dunque supplirvi con la copia? o di quale originale si tratta, essendo tolta all' Autore la facoltà di scrivere da sè medesimo? Ma la risoluzione di ogni dubbio ci avvenne, quando svolgendo noi, fra i manoscritti dei Discepoli di Galileo, il tomo CXXXV intitolato *Raccolta di esperienze senz' ordine e di pensieri diversi di me Vincenzio Viviani, in diversi propositi sovvenutimi intorno a materie meccaniche, fisiche, astronomiche, filosofiche e altro;* ci abbattemmo a leggere nei fogli 8, 9 quella scrittura da noi pubblicata a pag. 165-67 del Tomo precedente, dove la sostanza del frammento dialogizzato s' espone in discorso disteso come pensiero proprio, sovvenuto allo stesso Viviani, che chiama testimone di ciò Cosimo Galilei.

Proseguendo però nei nostri studii, che potrebbero parere di arida erudizione, ma che servono a noi di scandaglio per misurare le profondità del pensiero, e di filo per aggirarci negl' intricati laberinti del cuore dell' uomo, ci dovremmo persuadere, contro la nostra opinione, che l' aver fatti il Viviani suoi certi pensieri non vuol dire che non fossero stati prima di Galileo. Fu deliberato atto di usurpazione o incoscienza del tempo e del modo come gli erano sovvenuti i medesimi pensieri? La risposta sarebbe lunga, e senza alcuna probabilità di cogliere il vero, e perciò basti a noi porre i fatti, senza volerne penetrar le intenzioni, che forse traspariranno da ciò, che saremo per dire, prima che finisca il presente discorso.

Raccolti fra' *Pensieri varii* del Viviani si trovano, nel citato manoscritto, anche alcuni in materia de' proietti, ed è notabile fra questi quello, che noi pubblicammo a pag. 569 del Tomo precedente. Ora anche si osserva che alle cose messe qui in discorso disteso si dà nel IV tomo della parte V forma e andamento di dialogo, con manifesta intenzione d' inserirlo a pag. 270 dell' edizione di Leida, dopo la VII proposizione della quarta Giornata.

« Simplicio. — Di grazia, prima di passar più avanti, fatemi restar capace in qual modo si verifichi quel concetto, che l' Autore suppone come chiaro ed indubitabile: dico che, venendo il proietto da alto a basso descrivendo la semiparabola, cacciato per il converso da basso ad alto si debba ritornare per la medesima linea, ricalcando precisamente le medesime vestigia, non avendo per ciò fare altro regolatore, che la direzione della semplice linea retta toccante la già disegnata semiparabola: nella cui declinazione fatta dal-

l' alto al basso l' impeto trasversale orizontale mi quieta, nello ammettere la molta curvazione nella sommità, ma non so intendere nè discernere come l' impulso fatto da basso, per una retta tangente, possa restituire un impeto transversale, atto a regolare quella medesima curvità. »

« SALVIATI. — Voi, signor Simplicio, nel nominare la retta tangente, lasciate una condizione, cioè tangente ed inclinata, la quale inclinazione è bastante a fare che il proietto, in tempi eguali, si accosti orizontalmente per spazi eguali all' asse della parabola, come forse più a basso intenderemo. »

« SAGREDO. — Ma intanto, per ora, ditemi, signor Simplicio, credete voi che la linea descritta da un proietto da basso ad alto, secondo qualche inclinazione, sia veramente un' intera linea parabolica, e che niente importi che la proiezione si faccia da levante verso ponente o per l' opposito? »

« SIMPLICIO. — Credolo, purchè la elevazione sia la medesima, e che la forza del proiciente sia la stessa. »

« SAGREDO. — Come voi ammettete questo, fatto che si sia un tiro da qualsivoglia parte, che cosa v' ha mettere in dubbio che la semiparabola da basso ad alto del secondo tiro, che si faccia in contrario del primo, non sia la medesima, che la seconda semiparabola del primo tiro, sicchè il proietto ritorni per la medesima strada? Quando ciò non fosse, nè anco la parabola intera del secondo tiro sarebbe simile a quella del primo. »

« SIMPLICIO. — Già intendo, e mi quieta, però seguitiamo.... » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 4).

Ora è manifesto essere un tal colloquio l' esplicazione di quest' altro, che Galileo scriveva in semplice motto, di sua propria mano, a tergo del fol. 106, nel secondo volume della parte quinta de' suoi Manoscritti. Noi trascrivemmo quel motto a pag. 568 del Tomo precedente, ma è bene ridurlo qui sotto gli occhi dei nostri lettori, perchè si persuadano meglio di ciò, che ha da partecipar valore al nostro argomento.

« SIMPLICIO. — Che la palla ricacciata in su descriva la medesima SX (fig. 15) mi par duro. »

« SAGREDO. — Ma se non vi par duro che, descrivendo la parabola intera YXS, possa ridescrivere la SXY, non vedete che di necessità fa la SX? »

Figura 15.

Dicemmo aver fatto allora di ciò Galileo questo semplice motto, quasi per un memoriale, quando fosse venuto a distendere il Dialogo quarto. Ma, comunque sia, rimastosi il pensiero indietro, se ne sentiva più che mai l' importanza, ora che andavano attorno, nella lettera al Mersennno, le invidiose critiche del Cartesio. Fu perciò sollecito Galileo di supplire alla sua dimenticanza, dettando al suo giovane ospite il dialogo da noi sopra trascritto, e designandone il luogo, dove ei doveva inserirlo. In mezzo a quelle sollecitudini accennava anzi all' intenzione di voler fare di più, per confermar sempre meglio le sue dottrine contro gli oppositori, dimostrando che in tempi uguali il proietto s' accosta orizontalmente per spazi uguali. L' intenzione

però non s' è trovato che fosse mandata ad effetto, e nemmeno il Torricelli vi s' applicò di proposito, benchè si concluda lo stesso dalla quarta proposizione del suo libro secondo; imperocchè, avendosi ivi dimostrato che gli spazi DE, FG, IH (fig. 16) son passati ne'medesimi tempi, dall'essere le DI, EH parallele si conclude che il proietto s' accosta o si discosta orizontalmente per spazi uguali.

Figura 16.

Ma non volendoci dilungar di troppo dal proposito nostro, diciamo esser dunque un fatto certissimo che il pensiero di dimostrar come sia medesima la semiparabola, o tirando di punto in bianco o con direzione elevata, accolto dal Viviani fra' suoi, era prima albergato nel cervello di Galileo. E perchè la cosa è bene assai singolare, vogliamo aggiungere un altro esempio, pure in materia de' proietti, intorno ai quali mette il Viviani per sue le considerazioni, da noi pubblicate nell' altro Tomo di questa Storia della Meccanica. Noi possiamo però assicurare i lettori che quelle medesime considerazioni erano state fatte già da Galileo, dettandole così come noi le trascriviamo a Marco Ambrogetti, in quel tempo che si pensava a far ristampare in latino, insieme con le altre opere, anche i Dialoghi del moto.

« Simplicio. — Summa quidem perspicuitate, atque ingenio plena sunt vestra haec inventa, et si eo prorsus modo, quo mente percipiuntur, ita exequi liceret; utilitas, et praesertim in re militari, non mediocris esset existimanda. Sed ea quae extrinsecus accidentia in ipsa tractatione operis exitum perturbare possunt, ita multa atque talia existunt, ut propterea fructus, qui esset inde percipiendus, imminui valde videatur. »

« Sagredo. — Non ideo deserendae artes vel negligendae sunt, quia speratum non semper sortiantur eventum, neque enim Medicina ars ab usu est abligenda, quia non omnes languores curet, vel eos ipsos quos curat non tam brevi temporis spatio, et ea medicaminum quam vellemus lenitate ambigit et expellit » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 13).

Come dunque è certo che son di Galileo questi pensieri, così teniamo per certo che fosse da lui stesso dettato il dialogo dell' equilibrio della bilancia di braccia disuguali, benchè anche questo discorso, insieme con gli altri due relativi ai proietti si trovi, come s' è detto, nella *Raccolta* del Viviani. E perchè vedasi che, sebben sotto forme accidentalmente diverse, medesime son qua e là le idee non solo, ma la maggior parte delle parole, e perciò uno solo e medesimo l' Autore; ecco il dialogo dettato da Galileo, perchè lo con-

fronti chi vuole col discorso, appropriatosi dall' amanuense, e da noi pubblicato a pag. 165 del quarto Tomo.

« Sagredo. — Sia sostenuta nel punto C (fig. 17) la Libbra di braccia disuguali, AC maggiore, CB minore. Cercasi la ragione onde avvenga che, posti nell' estremità due pesi uguali A, B, la Libbra non resti in quiete ed equilibrio, ma inclini dalla parte del braccio maggiore, trasferendosi come in EF. La ragione, che comunemente se ne assegna, è perchè la velocità del peso A, nello scendere, sarebbe maggiore della velocità del peso B, per essere la distanza CA maggiore della CB, onde il mobile A, quanto al peso uguale al B, lo supera quanto al momento della velocità, e però gli prevale e scende sollevando l' altro. Dubitasi circa il valore di tal ragione, la quale pare che non abbi forza di concludere, perchè è ben vero che il momento di un grave si accresce congiunto con velocità sopra il momento di un grave, che sia costituito in quiete, ma che, posti ambedue in quiete, cioè dove non sia pur moto, non che velocità maggiore di un' altra, quella maggioranza, che non è ma ancora ha da essere, possa produrre un effetto presente, ha qualche durezza nel potersi apprendere, ed io specialmente ci sento difficoltà notabile. »

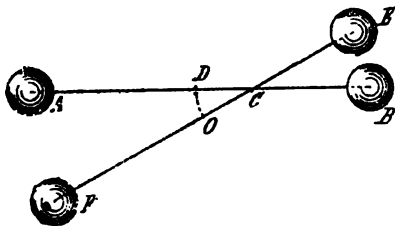



Figura 17.

« Salviati. — V. S. ha molto ben ragione di dubitare, ed io ancora, non restando ben sodisfatto di simile discorso, trovai da quietarmi per un altro verso molto semplice e speditivo, senza suppor niente, altro che la prima e comunissima nozione, cioè che le cose gravi vanno all' ingiù in tutte le maniere che gli viene permesso. Quando nella Libbra AB voi ponete due pesi eguali, se voi la lascerete andare liberamente, ella se ne calerà al centro delle cose gravi, mantenendo sempre il centro della sua gravità, che è il punto di mezzo D, nella retta che da esso va al centro universale. Ma se voi a cotal moto opporrete un intoppo sotto il centro D, il moto si fermerà, restando la Libbra con i suoi due pesi in equilibrio. Ma se l' intoppo si metterà fuori del centro D, come tassello in C, tale intoppo non fermerà la Bilancia, ma devierà il centro D dalla perpendicolare, per la quale camminava, e lo farà scendere per l' arco DO. Insomma, la Libbra con i due pesi è un corpo ed un grave solo, il cui centro della gravità è il punto D, e questo solo corpo grave scenderà quanto potrà, e la sua scesa è regolata dal centro di gravità O: e così quel che scende è tutto il corpo o aggregato e composto della Libbra e suoi pesi. La risposta dunque propria alla interrogazione *Perchè inclini la Libbra ecc.* è perchè, come quella che è una mole sola, scende e si avvicina quanto può al centro comune di tutti i gravi » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 41 a t.).

Qual si fosse però il luogo, assegnato per la più opportuna inserzione di questo frammento, non apparisce da nessuna parte del manoscritto, e noi

troviamo gran difficoltà nell' indovinarlo. Delle leggi delle equiponderanze, nelle Libbre di braccia disuguali, si tratta a principio del secondo Dialogo, dove si pongono quelle leggi per fondamento alla dottrina delle resistenze dei solidi: e perchè la dimostrazione procede sull' esempio di Archimede, senza invocare quel principio delle velocità virtuali professato già negli avvertimenti della *Scienza meccanica;* si direbbe che fosse il sopra scritto frammento dettato con l' intenzione d' inserirlo là nel detto Dialogo, quasi per render ragione dell' aver tenuto altro metodo da quel primo che, concludendo dalla potenza all' atto, s' incominciava ora da molti a tener per dubbioso. Ma se fossero veramente stati scelti dal Salviati i modi archimedei, per qualche scrupolo natogli infin da quel tempo intorno al principio delle velocità virtuali, perchè tornare, sul terminar della quarta Giornata, ad applicarlo alla soluzion del problema dell' equilibrio tra i gran pesi attaccati all' estremità di una corda orizzontalmente distesa, e il piccolo peso che la tira nel mezzo?

Un altro pensiero però insorge a complicare le difficoltà nella nostra mente, perchè, mentre nella Scienza meccanica si dimostra il teorema delle proporzioni tra il momento del grave nel perpendicolo, e il momento nel piano inclinato, con aggressione diversa da Pappo, ma concludendolo dalla teoria della leva angolare; ora, nel dimostrare il supposto antico e nel dettare al Viviani il discorso in proposito, torna a invocare il principio delle velocità virtuali. Quello è anzi il luogo, in cui si fa del detto principio la professione più aperta e l' applicazione più esatta, e ivi principalmente lo riconobbe e lo additò il Lagrange, quando, a superesaltare la gloria di Galileo, ne volle attribuire a lui l' invenzione.

Come dunque, nelle aggiunte da farsi per migliorare i Dialoghi del moto, potevano stare insieme il discorso, in cui si dimostrava il Teorema meccanico col principio delle velocità virtuali, e questo frammento, che dee esser pure stato dettato dal medesimo Galileo, in cui al Sagredo, che trovava difficoltà ad apprendere come quella causa che non è ma ha da essere possa produrre un effetto presente, il Salviati risponde ch'egli aveva molto ben ragione di dubitare?

Sembra a noi non si poter risolvere la questione altrimenti che, osservando come il mormorio contro il principio delle velocità virtuali, principio antichissimo nella Scienza meccanica, incominciò in Roma fra i discepoli del Castelli, e le ragioni del Nardi convinsero il Torricelli, da cui facilmente si insinuarono nel Viviani, il quale ingerì lo scrupolo nello stesso Galileo, poco dopo ch' egli aveva dettato quel suo discorso, per dimostrar ciò che prima aveva supposto. Forse l' intenzione di mettere il dialogo ultimamente da noi trascritto non era quella di bandire addirittura dalla scienza del moto le velocità in potenza, ma di suggerire a chi ci avesse trovato difficoltà un' altra maniera di dimostrar le medesime cose. Si sarà questa intenzione aspettato a renderla espressa, quando si fosse sul punto di pubblicar le aggiunte ai colloqui, in modo da stare lì insieme senza contradirsi, ma perchè a quel punto Galileo mai non giunse, rimasero que' solitari pensieri, per le carte disordinate, alle nostre disputazioni.

Di un altro frammento, di cui il Viviani, che l'aveva attinto dall'oracolo di Galileo, ci lasciò la copia; la destinazione, dietro le seguenti considerazioni si presenta più manifesta. Nel primo Dialogo, a proposito del mezzo, che impedisce il naturale acceleramento dei gravi, era stato affermato dal Salviati « che finalmente la velocità perviene a tal segno, e la resistenza del mezzo a tal grandezza che, bilanciandosi fra loro, levano il più accelerarsi e riducono il mobile in un moto equabile ed uniforme, nel quale egli continua poi di mantenersi sempre » (Alb. XIII, 77). Ora il Cartesio, leggendo tali cose, ebbe a notarle di errore, perchè con calcolo matematico dimostrava essere impossibile che il cadente giunga mai mai a tal punto della sua discesa, da cui, per ragguagliarsi l'accelerazione della velocità con l'impedimento del mezzo, cominciasse il moto, d'accelerato ch'era prima, a diventare uniforme. Vennero alle orecchie di Galileo queste censure, prima che si divulgassero nell'Epistola al Mersenno, e perchè l'origine dell'errore la faceva il Censore principalmente dipendere dal non essersi ben definita dall'Autor de'dialoghi nuovi la natura della forza di gravità, che è intrinseca al mobile e no straniera, sovvenne a Galileo l'arguto pensiero di confermare l'asserita uniformità del moto, concludendola da quello stesso più recondito principio, di cui s'era servito per investigar la causa dell'accelerazion naturale. Ma sentendosi contrapporre la certezza del calcolo, non poteva sperare la prevalenza del suo pensiero, ch'egli perciò modestamente mette in bocca a Simplicio.

In quella prefazione dunque al trattato *De motu naturaliter accelerato,* con la quale incomincia la seconda parte del dialogo terzo, il Sagredo fa dipender l'acceleramento del mobile, che cade in basso, dal prevaler che fa via via sempre più la gravità al moto proiettizio in alto; a che oppone Simplicio non potersi applicare il discorso « se non a quei moti naturali, ai quali sia preceduto un moto violento » (ivi, pag. 159). Il Sagredo stesso però rispondeva all'opposizione « che il precedere alla caduta del sasso una quiete lunga o breve o momentanea non fa differenza alcuna, sicchè il sasso non parta sempre affetto da tanta virtù contraria alla sua gravità, quanta appunto bastava a tenerlo in quiete » (ivi, pag. 160). Dopo le quali parole Simplicio doveva soggiunger così, secondo che Galileo stesso era venuto dettando al Viviani:

« Voi dite, signor Sagredo, che l'accelerazione di quel sasso dipende dal continuo vantaggio della sua medesima gravità sopra quella virtù contraria impressagli, che era di proibirgli lo scendere. Adunque ogni volta che mancasse questo vantaggio o superiorità al cadente resterebbe di più accelerarsi: sicchè a quel grave che, partendosi dalla quiete, và con la sua gravità superando continuamente quella virtù contraria prima datagli, e in conseguenza maggiormente prevalendosi della sua medesima gravità, e non essendo quell'impeto straniero infinito; dopo che si sarà consumato, non gli resterà altro che la propria gravità. Con l'impeto dunque di quella sola seguitando di moversi, non si accelererà, ma equabile si rimarrà » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 29). Il Salviati però, per troncare il discorso, ch'ei molto ben conosceva non poter competere con la matematica del Cartesio, entra di mezzo

a dire, come nella prima edizione di Leida e in tutte le altre, *Non mi pare opportuno di entrare al presente....* (Alb. XIII, 160).

Forse il desiderio di confermare il discorso con più esplicite ragioni matematiche, per dar migliore sodisfazione agli emuli Geometri valorosi di Francia, suggerì a Galileo un' altra aggiunta, che si trova fra le copiate e distese dal Viviani. Nel primo Dialogo, verso la fine, vuole il Salviati persuadere a Simplicio che i corpi scendono tanto più lentamente in un mezzo, quanto sono più sminuzzati, perchè le superfice crescendo in maggior proporzione delle moli, crescono anche secondo quella maggior proporzione, sopra la gravità, gl' impedimenti: e riducendo la cosa all' esattezza geometrica afferma: « che in tutti i solidi simili le moli sono in sesquialtera proporzione delle loro superfice » (Alb. XIII, 93). La proposizione s' appoggia a certi calcoli intorno ai cubi, ma perchè non pareva sicuro affidare una conclusion generale sopra due o tre esempi numerici, Galileo pensò che, dopo le parole dette dal Salviati, *E intanto notate, signor Simplicio, che io non equivocai, quando poco fa dissi la superfice de' solidi minori esser grande in comparazione di quella dei maggiori* (Alb. XIII, 93), dovesse il Sagredo soggiungere così, invece di quella intramessa, nella quale esso Simplicio si chiamava interamente appagato di un teorema geometrico, confessando di non saper nulla di Geometria:

« Sagredo. — Notizia veramente bella, nè priva di utilità, per quanto io penso, e benchè, nel caso di che si tratta, non si assesti puntualmente come sarebbe in un sasso irregolare rotto in minutissime particelle irregolarissime, e perciò incognite; tuttavia l' aver dimostrato il grande accrescimento, che si fa di superfice, nella continuazione di spezzamento di qualsivoglia solido, mentre si risolva in minime particelle fra di loro simili ed eguali; ci assicura il somigliante dovere accadere in tutti gli altri stritolamenti. Ma mi par di notare un altro modo di potere, in una sola e semplice operazione, ritrovare l' eccesso delle superfice di molti solidi, tra di loro simili ed eguali, sopra la superfice di un solo pur simile, ma uguale a tutti quelli. Questo mi par che ci venga dato dalla radice cuba del numero de' piccoli solidi, come per esempio: la superfice di mille palline quanto è maggiore della palla sola uguale e simile a tutte quelle eguali e simili tra di loro? Diremo esser maggiore dieci volte, per esser dieci la radice cuba di mille e dieci volte il diametro della grande conterrà il diametro della piccola. »

« Salviati. — Questa è la vera, e vedesi finalmente che le superfice sopra dette, a due lati omologhi, uno del gran solido ed uno del piccolo, si rispondono contrariamente. »

« Sagredo. — Ho avuto gusto grande di questo discorso.... » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 38).

Sono in questi colloqui fra il Sagredo e il Salviati annunziati teoremi verissimi, come si può riscontrare con facili dimostrazioni. Chiamate infatti M, M' le moli di due solidi simili, S, S' le loro superficie, e L, L' due lati omologhi, abbiamo per gli elementi della Geometria $M : M' = L^3 : L'^3$; $S : S' =$

$L^2 : L'^2$ e perciò $M^2 : M'^2 = S^3 : S'^3$ ossia $M : M' = S^{\frac{3}{2}} : S'^{\frac{3}{2}}$, che conferma la verità del teorema annunziato dal Salviati *esser ne' solidi simili le moli in sesquialtera proporzione delle loro superfice.*

Chiamato inoltre A il lato di un solido, B una delle N parti, in cui è stato diviso, cosicchè abbiasi $A = N . B$, troveremo con facile discorso intercedere fra la superfice S del solido grande, e la somma S' delle superfice de' piccoli solidi uguali e simili, in cui fu diviso, la proporzione $S : S' = 1 : N = B : A$, che conferma la verità dell'altro Teorema formulato dal Salviati: *le superficie, a due lati omologhi, uno del gran solido ed uno del piccolo, si rispondono contrariamente.* Essendo poi le moli M, M' come i cubi dei lati omologhi, ossia $M' : M = B^3 : A^3 = 1 : N^3$, avremo $N = \sqrt[3]{\frac{M}{M'}}$, e perciò $S' = S . \sqrt[3]{\frac{M}{M'}}$. Nell'esempio addotto dianzi dal Sagredo, essendosi della palla grande fatto mille palline, avremo dunque $M' = 1$, $M = 1000$: onde $S' = S . \sqrt[3]{1000} = 10 . S$, ciò che fa esatto riscontro con quel che il Sagredo stesso dianzi diceva *essere la superficie di mille palline dieci volte maggiore di quella della palla sola, uguale e simile a tutte quelle uguali e simili tra loro.*

Anche questi teoremi però venivano da Galileo dimostrati per via di esempi numerici, com' avremo occasione di veder meglio altrove, ond' è che il Viviani, ripensando al Cartesio e agli altri matematici di Francia, i quali usandovi l' algebra gli rendevano generali, diceva a Galileo che, per dar sodisfazione agli emuli, sarebbe stato bene far, di quegli annunziati teoremi intorno ai solidi simili e alle loro minutissime divisioni, una dimostrazione più universale. Approvava il buon Vecchio il pensiero, ma riconoscendosi in quelle sue miserabili condizioni impotente a mandarlo ad effetto, se ne affliggeva, ciò che fece risolvere il Viviani stesso d' esercitarvisi attorno. Una mattina entra con un foglio in mano, dov' era scritta la dimostrazione, nella camera di Galileo, il quale se ne rallegrò, compiacendosi inoltre che fosse messa in dialogo, per inserirla al suo proprio luogo, invece del frammento che avevano insieme, pochi giorni fa, preparato. Abbiamo il documento di ciò in una carta, sopra la quale il Viviani, di sua propria mano, così scriveva: « Faccia 91, verso 12 (dell' edizione di Leida, e faccia 93, verso 35 dell' Albèri). Dopo quelle parole di Simplicio, che dicono *fuor che quello che concludentemente dimostrano,* si potrà aggiungere quanto appresso io dimostro così, contentandosene il medesimo signor Galileo: »

« SAGREDO. — La verità della conclusione nei particolari si vede per esperienza assai manifesta, ma io desidererei avere una dimostrazione, la quale universalmente m' insegnasse che, non solamente nel risolvere il solido in molti simili si accresce la superficie, ma ancora secondo qual proporzione ella venga moltiplicata. »

« Salviati. — Bellissima è la proposizione, ma non men bella la dimostrazione. Dico pertanto che diviso il lato di un solido in quante si vogliano parti uguali, e risoluto tal solido in solidi tra di loro uguali e simili al tutto, dei quali i lati omologhi siano uguali a una parte del lato omologo del tutto; la superfice di tutti questi piccoli presi insieme, alla superficie del grande e intero, hanno la medesima proporzione che il lato omologo del grande diviso, al lato omologo di uno dei piccoli; cioè a una parte della divisione del gran lato omologo: per il che dimostrare propongo questo Lemma: »

« Se saranno quattro numeri continui proporzionali, il primo dei quali sia l'unità, il quarto di necessità sarà numero cubo, il terzo sarà quadrato, il secondo sarà radice di ambedue, il che si dimostra così: »

« Essendo li tre primi proporzionali, il prodotto del primo nel terzo è uguale al quadrato del secondo. Ma il prodotto del primo nel terzo è l'istesso terzo, perchè il primo è l'unità; adunque il terzo è il quadrato del secondo, e questo è la sua radice. E perchè il prodotto del primo nel quarto è uguale al prodotto del secondo nel terzo, e il prodotto del primo nel quarto è lo stesso quarto; adunque il prodotto del secondo nel terzo è uguale al quarto. Ma il terzo è quadrato, la cui radice è il secondo, ed il prodotto del quadrato nella sua radice fa cubo; adunque il quarto è cubo, il che si doveva dimostrare. » (MSS. Gal., P. V., T. IX, fol. 92).

Il discorso si rende per segni algebrici molto più chiaro, chiamando A, B, C, D i quattro numeri continuamente proporzionali. Perchè basta scrivere la proporzione $A : B = B : C = C : D$, per vedere a colpo d'occhio che, se $A = 1$, sarà $B^2 = C$, $D = C \,.\, B = B^3$, perciò $B = \sqrt{C} = \sqrt[3]{D}$. Ma ascoltiamo dopo questo lemma la dimostrazione, che Galileo si contentava fosse messa in bocca al suo Salviati:

« Dichiarato questo, verremo alla dimostrazione dell'altra principal conclusione, la quale esemplificheremo per maggior chiarezza nei solidi cubi. Intendasi la linea B esser lato di un dado, o di un cubo vogliam dir, solido, diviso in quante si vogliano parti uguali, ad una delle quali sia uguale la A, e di essa e del numero delle parti di B sia terzo proporzionale il numero C, e quarto il D: è manifesto, per il lemma di sopra, il numero D esser cubo, ed il C numero quadrato, ed il numero B lor radice. E perchè li quattro numeri A, B, C, D sono continui proporzionali, il numero D al numero A averà tripla proporzione di quella, che gli ha il numero B. Ma il solido cubo del lato B, al cubo di A, ha tripla proporzione di quella del lato B ad A, cioè del medesimo numero B ad A; adunque la medesima proporzione ha il numero D al numero A, che il cubo solido del lato B, al cubo solido del lato A. Adunque tanti cubi solidi del lato A, quante sono le unità del numero D, saranno uguali al cubo solido del lato B. Inoltre, per essere li tre numeri A, B, C proporzionali, la proporzione del numero C all'A è doppia di quella del numero B all'A. Ma la proporzione del quadrato della linea B, al quadrato della linea A, è doppia parimente della proporzione della mede-

sima B ad A, cioè del numero B ad A; adunque il numero C all' A, unità, ha l' istessa proporzione del quadrato B al quadrato A. Tanti quadrati dunque del lato A, quante sono le unità del numero C, sono uguali ad un solo quadrato di B, ed il sescuplo al sescuplo, cioè la superfice di tanti cubi dell' A, quante unità ha il numero C, sono, prese insieme, uguali alla superficie del solo cubo di B. Adunque le superficie di tanti cubetti di A quant' è il numero C.... » (ivi).

Il discorso rimane a questo punto interrotto, venendo meno, dopo l' ultima riga, lo spazio, e mancando nel volume la carta, nella quale dovevano essere state scritte dal Viviani le poche rimanenti parole di conclusione. Si suppliscono queste però assai facilmente, ragionando in conseguenza de' due principii già dimostrati, e la verità de' quali immediatamente dipende dalle proporzionalità poste nel lemma. Da esse infatti deriva $D : A = B^3 : 1 = B^3 : 1^3 = B^3 : A^3$, e di qui $D \,.\, A^3 = AB^3 = B^3$; che vuol dire: *tanti cubi solidi del lato A, quante sono le unità del numero D, sono uguali al cubo solido del lato B.* Deriva pure da quelle stesse proporzionalità del Lemma $C : A = B^2 : 1^2 = B^2 : A^2$, e da ciò $C \,.\, A^2 = B^2$: *tanti quadrati dunque del lato A, quante sono le unità del numero C, sono uguali ad un solo quadrato di B.*

Chi fosse nel 1639, penetrato nella villa di Arcetri, avrebbe sentito echeggiare le solitarie stanze in questi colloqui tra il Maestro e il discepolo, il quale prendeva talvolta in mano, e sollevava la face a illuminar le tenebre dello stesso Maestro. Il fine principale di quei colloqui sapienti, quale può riconoscersi ne' varii esempi da noi fin qui notati, era quello che Galileo dichiarava nella sua lettera al Baliani, di ampliare cioè e di migliorare le cose fin allora scritte intorno alla scienza del moto. Ma presto s' ebbe a fare esperienza che non era, con quell' opera sola, il fine perfettamente conseguito, perchè, dopo i benevoli che, desiderosi d' impossessarsi la mente di quelle nuove dottrine, amavano di vederle in certe parti rese più chiare, e in certe altre meglio compiute; ci erano gli emuli e gl' invidiosi, dai quali null' altro più ardentemente si desiderava, che di cogliere que' galileiani documenti in difetto, e, da una piaga sola facendo tutto intero il corpo apparire morboso, proclamare al mondo che tutta la Scienza nuova si fondava sul falso. Era uno di cotesti emuli il Cartesio, ma le censure di lui si temevano forse meno di certe altre, tanto più mordaci, perchè più dissennate. Il Filosofo bretone in fine, se gareggiava con Galileo nel conquistare il principato della Scienza, non mancava di quel valore, di che erano privi i Gesuiti, i quali con le fragili canne peripatetiche in mano uscivano ambiziosamente in campo, a mettersi fra i nuovi conquistatori.

Anche contro costoro bisognava difendersi, se non appuntando la spada, come si farebbe con gli orsi o coi leoni, menando almeno in tresca le mani, come si fa per cacciarsi le mosche, e a ciò giusto pensava Galileo nelle sue tenebre, specialmente quando s' incominciò a veder qualche effetto delle presentite molestie. In un bocconcello di carta, scritta senza dubbio dal Viviani

sul tavolino posto a piè del letto di Galileo, o nella camera accanto dove si giaceva il vecchio Maestro, sotto il titolo *Domandar del Blancano* si legge così notato, con una certa mossa alla fiorentina:

« I. La mi dichiari meglio, signor Galileo, come il mezzo detragga dal grave; perchè la figura sferica sia contenuta sotto la minima superficie, come si legge a carte 92 (della prima edizione di Leida). »

« II. A carte 93, l'aria reprime la velocità del mobile, poichè, scaricando un archibuso da grande altezza in giù, fa minor botta, che da una minore: ed in altri luoghi dice che acquista più velocità, ed in conseguenza avrebbe a far maggior colpo da grande altezza, che da piccola. »

« III. Par che stia come la circonferenza alla circonferenza, così la superficie alla superficie de' cilindri ugualmente alti. Carte 55: par che stia come il diametro C, al diametro A, così le loro circonferenze. »

« IV. Signor Galileo, i momenti dei cilindri ugualmente grossi, ma disugualmente lunghi, hanno eglino doppia proporzione delle loro resistenze prese reciprocamente? perchè pare che nella V proposizione la resistenza del solido DG, a quella di DF, stia come DF a DG. »

« V. La settima proposizione non intendo. »

« VI. A carte 134, la considerazione di que' due cilindri non la intendo. » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 14).

Il padre Giuseppe Biancani, interpetre di Aristotile profondo, e nel valor del quale i Gesuiti si confidavano molto, fu da loro mandato uno dei primi perchè minasse l'edifizio galileiano, sicuri che lo manderebbe all'aria con questi suoi domandari. I quali che non fossero disprezzati par che sia segno l'averne scritto un tal memoriale, ma quel vivace ingegno giovanile del Viviani volle scherzarci un poco, come se ne avvedrebbe meglio colui, a chi si potesse metter sott'occhio quel bocconcello di carta manoscritto, che, a svolgere il volume, in luogo della faccia presenta il tergo.

In ogni modo, è certo che si pensava a dar sodisfazione anche al nuovo censore, ma a poco andò che il Viviani ebbe a perdere il suo tempo più in consolare e in curare i languori del Vecchio infermo, che in raccoglierne i parti dell'ingegno. Poco di poi dovè cedere il geloso ufficio al Torricelli, che parve esser venuto ad Arcetri per assistere ai funerali, celebratisi infatti dopo soli tre mesi.

Anche morto però Galileo, il Viviani persistè nella generosa intenzione di attendere a migliorare i dialoghi delle Nuove scienze, e se mancando l'Autore veniva a mancar chi gli darebbe legittima autorità di ampliarli, si sentiva maggiore la libertà in emendarne, senza passione, i più notabili errori. Procedeva dall'altra parte il Viviani sicuro del fatto suo, perchè sapeva che le aggiunte ei le veniva facendo secondo la mente di Galileo, e le correzioni secondo le leggi del calcolo e della retta ragione. Che poi fosse veramente così, lo vedranno i Lettori in queste altre due parti, che rimangono al presente discorso.

IV.

Tutto dunque in sollecitudine il Viviani di proseguir da sè solo l'opera incominciata insieme con Galileo, svolgeva attentamente il libro delle Nuove scienze, per notarvi i punti, dove le dottrine de' Dialoghi qua volevano essere dichiarate meglio, e là svolte nella bellezza e nella verità di nuove conseguenze. Ei ne prendeva allora per suo uso, e ne lasciava per documento alla storia il seguente memoriale:

« I. Carte 6. SALV. — Dite pure ottuplo.... »

« II. Carte 11. SALV. — Ingegnosa veramente invenzione, e per intiera esplicazione della sua natura mi par di scorgere, così per ombra, che qualche altra speculazione si possa aggiungere.... »

« III. Carte 56. La dimostrazione del Torricelli dei cilindri. »

« IV. Carte 60. La dimostrazione che il poligono è medio tra due cerchi, uno inscritto e l'altro isoperimetro, e la dimostrazione che qualunque poligono circoscrittibile al cerchio è medio tra due qualsivogliano poligoni simili, uno circoscrittibile al medesimo cerchio, e l'altro isoperimetro al detto poligono. »

« V. Carte 70. Nel discorso del Salviati potrebbesi aggiungere la fabbrica delle due palline, e con questa occasione accennare come lo strumento per conoscere le mutazioni del caldo e del freddo nell'aria è invenzione del Galileo. »

« VI. Carte 81. Nel secondo modo di pesar l'aria si ha non solo il peso di essa nel vacuo, ma dell'acqua ancora nel medesimo: cosa non avvertita dal Galileo, però notisi. Perchè, aggiungendo al peso dell'acqua il peso di quell'aria uscita, che è quanto l'acqua, si avrà il peso dell'acqua nel vacuo. Ma perchè il lor peso nel vacuo ci vien dato da materia posta in aria, che è l'arena, però detto peso non sarà totalmente preciso. Si averà bene da tale esperienza la proporzione del peso dell'acqua nel vacuo, al peso dell'aria nel medesimo, che sarà come il contrappeso dell'acqua, con quel dell'aria, a quel dell'aria. »

« VII. Carte 91. Dimostrazione da me trovata circa la moltiplicazione delle superficie de' solidi. »

« VIII. Carte 94. Dopo il discorso del Salviati circa il tiro del moschetto in un corsaletto. »

« IX. Carte 254. Il pensiero di Platone, e far quel calcolo. »

« X. Carte 284. Vedi l'ultimo verso che *utilità* volesse dire il Galileo, se della misura della linea parabolica, ovvero del modo di trovare le proposizioni dei moti de' proietti. » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 33).

A questi dieci si riducevano i luoghi, nelle quattro giornate delle Nuove

scienze, presi in considerazion dal Viviani, e intorno ai quali ei si proponeva di esercitare l'ingegno per migliorarli, avendogli Galileo stesso detto di averci riconosciuta qualche imperfezione. Non sempre si è trovato però il proposito messo ad effetto, o perchè così realmente avvenisse, o perchè siano andate smarrite, o siano sfuggite alla nostra attenzione le schede relative. Di quel che abbiamo trovato renderemo ordinatamente conto qui ai nostri Lettori.

Al proposito espresso nella nota prima sodisfaceva il Viviani, scrivendo in margine alla pag. 6 di Leida quella postilla in lapis, che poi l'Albèri inserì a pag. 10 nel tomo XIII della sua edizione completa. Ma all'ordigno inventato da quel giovane parente del Sagredo, per poter con una corda calarsi da una finestra, senza crudelmente scorticarsi le palme delle mani, non par che sapesse il Viviani trovar nessuna di quelle speculazioni, che credeva di poter aggiungervi così facilmente il Salviati.

Di bene altra importanza di questo ordigno, inventato da un giovane signore, per rendere innocua la fuga ai giovani entrati nelle altrui case furtivi, erano que' teoremi geometrici intorno ai cilindri, a proposito de' quali il Viviani accennava alla dimostrazione del Torricelli. Ma perchè, da quel cenno così frettoloso e solitario, non è facile intendere come, trattandosi di Galileo, possa entrare di mezzo il Torricelli, che par si chiami a fargli da maestro; convien ravviare il discorso, perchè dietro lui si rischiarino i nostri dubbi, e si manifestino meglio le altrui intenzioni.

A proposito di dimostrar la sottigliezza estrema, a cui riducesi l'oro, quando si rivestano delle foglie di lui le verghe di argento, da tirarsi poi in sottilissimi fili attraverso ai fori della filiera; a pag. 56, come nota il Viviani nella edizione di Leida, si propone questo teorema: « Le superficie dei cilindri eguali, trattone le basi, son tra di loro in sudduplicata proporzione delle loro lunghezze, ovvero in reciproca proporzione dei diametri delle basi » (Alb. XIII, 56). Piacque così al Sagredo la dimostrazion del Salviati, che venne a questi voglia di soggiungerne all'amico un'altra compagna, dimostrando quel che avvenga ai cilindri uguali di superficie, ma disuguali di altezza, in questo così proposto secondo teorema: « I cilindri retti, le superficie dei quali, trattone le basi, sieno uguali, hanno fra di loro la medesima proporzione, che le loro altezze contrariamente prese: ovvero in omologa proporzione dei diametri delle basi » (ivi, pag. 58). D'onde si deduce per corollario la ragione di un accidente curioso, « ed è: come possa essere che il medesimo pezzo di tela, più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come costumano fare con un fondo di tavola, terrà più, servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela, e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito » (ivi, pag. 59).

I due teoremi geometrici, oltre al parere al gusto del Sagredo belli, si trovano, ciò ch'è più, al giudizio dei Matematici veri; imperocchè siano AC, DF (fig. 18) i due cilindri uguali; S, S' le loro superficie; C, C' le solidità respettive: avremo $S = \pi \,.\, BC \,.\, AB$, $S' = \pi \,.\, EF \,.\, DE$, onde $S : S' =$

$BC . AB : EF . DE$ (*). Sarà inoltre $C = \frac{\pi . BC^2}{4} . AB$, $C' = \frac{\pi . EF^2}{4} . DE$, le quali due quantità debbon essere per supposto uguali, ossia $BC^2 . AB = EF^2 . DE$. Dunque $S^2 : S'^2 = BC^2 . AB^2 : EF^2 . DE^2 = AB : DE$, e perciò $S : S' = \sqrt{AB} : \sqrt{DE}$. E anche moltiplicando la seconda ragione della (*) per $BC . EF$, avremo $S : S' = BC^2 . AB . EF : EF^2 . BC . DE = EF : BC$, ciò che, sotto ambedue gli aspetti, verifica la prima proposta del Salviati. Nè men vera apparisce di qui la seconda, perchè, avendosi come si è ora veduto, $C : C' = BC^2 . AB : EF^2 : DE$, per essere le superfice de' cilindri uguali, ne verrà $BC . AB = EE . DE$, e perciò $C : C' = BC : EF = DE : AB$.

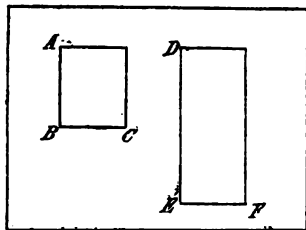



Figura 18.

I teoremi dunque di Galileo erano senza alcun dubbio veri, ma non parevano al Biancani troppo chiare le dimostrazioni, e il Viviani stesso ebbe a riconoscer pur troppo che si rimanevano inferiori a quella elegante facilità, con la quale aveva poco fa il Torricelli condotte altre simili dimostrazioni intorno alle proprietà dei cilindri, nel suo primo libro *Dei solidi sferali*. Nella sesta proposizione si dimostra che le superficie cilindriche stanno come i rettangoli delle sezioni, ciò che immediatamente resultava dalla equazione da noi sopra segnata con asterisco. Ma il Torricelli la concludeva da altre proposizioni, precedentemente dimostrate con quel metodo che, sebben sia ridotto alla maggior facilità ed eleganza, non per questo cessa di apparir lungo a chi in poche parole ora sa di riuscir a dire lo stesso. La terza proposizione infatti, per dimostrar la quale il Torricelli impiega una pagina e mezzo del suo volume, va speditamente a concluder che, avendosi il cilindro AC, nella precedente figura, l'altezza AB del quale sia la quarta parte del diametro della sua base, la superficie cilindrica S è uguale al circolo su cui risiede; osservando che, se $AB = \frac{BC}{3}$, la superficie S, che verrebbe espressa da $\pi . BC . AC$, si riduce a $\frac{\pi . BC^2}{4}$, che è l'area del circolo, sopra cui posa il cilindro. Qualunque siasi poi la proporzione che passa tra la superficie S' di questo circolo base, e la superficie cilindrica S, avendosi $S : S' = \pi . BC . AB : \frac{\pi . BC^2}{4} = AB : \frac{BC}{4}$, resta dimostrato *Cylindri recti superficies, ad circulum suae basis, est ut latus cylindri ad quartam partem diametri eiusdem basis*, che è la IV torricelliana *De sphaera et solidis sphaeralibus*. (Op. geom., P. I cit., pag. 14). La V è di non men facile e spedita conclusione, perchè, a dimostrar che la superficie di un cilindro retto sta a un circolo qualunque come il rettangolo della sezione sta al quadrato del raggio; chiamato questo raggio R, sarà $S' = \pi R^2$ la superficie del cerchio, e dall'equazione $S : S' =$

AB . BC : R^2, che di qui e dalla espressione della superficie cilindrica S ne nàsce, abbiamo già conseguito l' intento.

Dovevano queste tre proposizioni servire di lemma alla VI, dimostrata la quale era additato il più spedito processo di riuscire a dimostrare i teoremi di Galileo. Perciò il Viviani accennava alla dimostrazione del Torricelli, sull' esempio della quale intendeva di ridur così, come poi fece, a più facile semplicità i prolissi e involti discorsi del Salviati.

« Prendasi la linea G nella stessa figura 18, terza proporzionale dopo i diametri BC, EF dei cerchi basi de' dati cilindri. E perchè questi hanno le superficie curve eguali, sarà l' altezza AB alla DE come il diametro EF al diametro BC, o come la linea G al diametro EF. Ma il cilindro AC al DF ha proporzione composta del diametro BC alla terza G, e dell' altezza AB all' altezza DE, cioè della terza G al diametro EF; adunque il cilindro AC al DF sta come il diametro BC al diametro DF, omologamente presi, o come le altezze DE, AB prese così reciprocamente » (MSS. Gal., P. V, T. IX, pag. 56).

Questa dimostrazione, da sostituirsi col presunto permesso di Galileo a quella già nel primo dialogo stampata in Leida, l' aveva scritta il Viviani a piè della citata pagina 56, ma in un pezzetto di carta, interfogliato tra essa pagina e la seguente, ne aveva prima distesa un' altra, che, poniamo fosse meglio ordinata, non riusciva punto meno prolissa della stessa galileiana. Per dimostrar che i cilindri di superficie curve uguali son fra loro come i diametri delle basi omologamente, o come le altezze reciprocamente prese, premetteva il Viviani un lemma, che resulta a noi dimostrato da solo moltiplicar per A . B una delle ragioni dell' identica A : B = A : B. Quel lemma infatti così proponesi, e poi si dimostra:

« La proporzione di due linee è composta della proporzione omologa de' loro quadrati, e della proporzion reciproca di loro medesime. — Le date linee siano A, B: dico che la ragione di A a B è composta della ragione del quadrato A, al quadrato B, e della ragione della linea B alla A. Prendasi C terza proporzionale dopo le A, B: averà dunque A a B ragion composta della ragione di A alla terza C, cioè del quadrato A al quadrato della media B, e della ragione della C alla B, cioè della B alla A, il che ecc. »

Dietro ciò, propone e dimostra il Viviani il teorema: « I cilindri retti AC, CD (sempre rappresentati dalla 18ª figura) de' quali le superficie curve sieno uguali, son fra loro in omologa proporzione de' diametri BC, EF delle loro basi, ed anche in proporzione reciproca delle loro altezze DE, AB. »

« La curva superficie del cilindro AC è uguale al rettangolo sul lato uguale alla circonferenza della base, e all' altezza AB, sì come la curva del DF è uguale al rettangolo sul lato uguale alla circonferenza del cerchio, che ha per diametro EF, e all' altezza ED. Ma tali superficie curve son date uguali, adunque anche questi rettangoli sono uguali, e però la circonferenza, che ha per diametro BC, alla circonferenza che ha per diametro EF, cioè il diametro BC al diametro EF sta come l' altezza DE all' altezza AB. Ma il cilindro

AC al DF ha ragione composta del cerchio, che ha per diametro BC, al cerchio che ha per diametro EF, cioè del quadrato BC al quadrato EF, e dell' altezza AB alla DE, cioè del diametro EF al BC: ed anche il diametro BC all' EF, pel passato lemma, ha ragion composta delle medesime proporzioni, cioè del quadrato BC al quadrato EF, e del diametro EF al BC; adunque il cilindro AC al DF sta come il diametro BC al diametro EF, ovvero come l' altezza DE all' altezza AB, il che dovevasi dimostrare. Che vuol dire che i sacchi, fatti con eguali quantità di panno, quanto più son bassi, tanto più tengono, e quanto sono più grossi, tanto più tengono » (ivi).

Gli altri teoremi, che si proponeva il Viviani di aggiungere secondo il notato in quarto luogo da lui, non abbiamo trovato come fossero dimostrati, ciò ch' egli avrà fatto in qualche parte de' suoi voluminosi manoscritti matematici. Ma dalla Geometria trapassando alla Fisica, è notabile ch'egli volesse dar solenne pubblicità ne' Dialoghi all' invenzion del Termometro, per supplire a quella, ch' egli credeva trascuratezza o dimenticanza di Galileo, ma che non era forse altro che la coscienza di avere avuto in quella invenzione, che si voleva attribuirgli, un' assai piccola parte del merito. Avrebbe dovuto ripensare il Viviani che avvenne dello strumento da misurare il caldo e il freddo quel che avvenne dell' altro modo di trovare il peso di un corpo nel vuoto, non pesandolo realmente altro che in mezzo all' aria; cosa non avvertita da Galileo e che perciò suggerì allo stesso Viviani quell' aggiunta interfogliata tra le pag. 82, 83 di Leida, e che poi l' Albèri inserì a pag. 85 della sua prima edizione completa.

La settima nota del Viviani non è scritta per altro, che per assegnare il proprio luogo ne' Dialoghi a quella sua dimostrazione circa la moltiplicazione delle superficie de' solidi, che letta a Galileo, come sopra dicemmo, era stata approvata da lui: ma l' ottava accenna a una questione di Meccanica importantissima, e intorno alla quale vuol perciò trattenersi la nostra Storia con particolar diligenza.

Il principio fondamentale, posto alla Dinamica galileiana, è che il mobile scendendo naturalmente passi per tutti i gradi di velocità, per cui era prima passato spinto violentemente alla medesima altezza. Conferito questo pensiero col Sarpi, trovò subito una gran difficoltà ad essere ammesso per vero, sembrando repugnante all' esperienza, come il Sarpi stesso scriveva il dì 9 ottobre 1604 in una sua lettera a Galileo, nella quale così cominciava: « Con occasione d' inviarli l' allegata, mi è venuto pensiero di proporli un argomento da risolvere, e un problema che mi tiene ambiguo. Già abbiamo concluso che nessun grave può essere tirato all' istesso termine in su, se non con una forza, e per conseguente, con una velocità. Siamo passati, così V. S. ultimamente affermò e inventò ella, che per gli stessi termini tornerà in giù, per i quali andò in su. Fa non so che obiezione la palla dell' archibugio: il fuoco qui intorbida la forza dell' istanza. Ma diciamo: un buon braccio, che tira una freccia con un arco turchesco, passa via totalmente una tavola, e se la freccia discenderà da quella altezza, dove il braccio con l' arco la può

trarre, farà pochisssima passata. Credo che l' istanza sii forse leggera, ma non so che ci dire » (Lettere raccolte da F. Polidori, Vol. I, Firenze 1863, pag. 13, 14).

Non sappiamo se questa istanza del Sarpi giungesse a Galileo nuova, ma ei non poteva in nessun modo reputarla leggera, benchè vi rispondesse poi indirettamente nel primo, e nel quarto dialogo delle Nuove scienze, attribuendo la diversità dell' effetto all' impedimento dell' aria, risentito sì nella scesa naturale, ma sopravvinto dall' eccessiva furia della forza di proiezione. Galileo anzi si serve di quella istanza del Sarpi, per confortare con qualche argomento sperimentale una sua falsa opinione, che cioè l' impedimento del mezzo finalmente riduca il mobile all' egualità, nella quale poi sempre si mantenga (Alb. XIII, 96). Nel Dialogo quarto, a proposito de' proietti, si ripete lo stesso, e si ammette per vero il fatto affermato dal Sarpi, che cioè una palla o una freccia, scendendo dall' altezza, a cui fosse stata spinta dalla forza del fuoco o di una molla; farebbe assai minor passata, che presso alla bocca del moschetto o alla corda della balestra; benchè Galileo confessi di non aver fatto una tale esperienza (ivi, pag. 233).

Il Baliani, leggendo queste cose nei Dialoghi ammirati, tornava trentacinque anni dopo a ripetere l' istanza del Sarpi, aggiungendo di più che l' effetto non credeva si potesse attribuire all' impedimento del mezzo, come si diceva da Galileo, a cui in una lettera da Genova del 1° Luglio 1739 scriveva, fra le altre considerazioni, anche questa: « Da ciò che discorre, a fol. 94 e a fol. 164, par che sparandosi in alto un' archibugiata dovrebbe la palla far l' istessa passata, v. g. di dieci palmi, dall' archibugio, tanto nello scendere quanto nel salire, il che nè credo che riuscirebbe in fatto, nè pare che si possa sciorre per la condensazione dell' aria, perciocchè non è questa per mio avviso tale altezza, che nello scendere il grave non osservasse la regola della duplicata proporzione dei tempi uguali » (Alb. X, 334).

Facendo riflessione sopra queste parole, ebbe a riconoscere Galileo che davvero, con l' introdurre l' impedimento del mezzo, la difficoltà non veniva sciolta: rimaneva nonostante sicuro della verità del suo principio, crollando il quale, sarebbe venuto a minacciar rovina tutto intero l' edifizio dei moti accelerati. Perciò, nella fiducia di aver pure a trovare del dubbio la risoluzion vera, e in altre più sottili osservazioni alle impugnate dottrine una conferma, così al libero impugnatore di Genova, dopo un mese preciso, rispondeva: « Che la palla discendente dall' altezza, dove dalla forza del fuoco fu cacciata, non riacquisti tornando indietro, giunta le dieci braccia vicina all' archibugio, quell' impeto, che ella ebbe quando da principio fu scaricata, da me è tenuto per effetto verissimo. Ma questo non altera punto la mia proposizione, nella quale io dico che il grave discendendo da alto riacquista nei medesimi luoghi della scesa quella forza, che era bastante a risospingerlo in su, quando nei medesimi luoghi si ritrovò salendo, e forse, da quello che già si legge nei luoghi da lei citati, raccogliere si potrebbe. Ma è vero che, senza aggiungere io alcune nuove osservazioni, forse non potrebbe agevolmente esser

compreso, ma il produrlo ricerca un poco più di ozio e di quiete di mente, di quella che di presente io posseggo: lo farò altra volta, quando ella pure me lo richiegga » (Lettere per il trecentesimo natalizio, Pisa 1864, pag. 45).

Il Baliani non richiese altro, dicendo di esser sodisfatto di ciò, ch' era detto in questa lettera e nei Dialoghi, i quali egli era perciò tornato a leggere di nuovo: soggiungeva solamente un suo pensiero, che cioè, perdendo il mobile della propria naturale velocità, per l' impedimento dell' aria interposta, « poi camminando avanti possa essere che la racquisti » (Alb. X, 361). Galileo rispondeva che questo veramente sarebbe stato per lui duro a concedere, quando non avesse esperienze e dimostrazioni in contrario (Lettere cit., pag. 51), ma lasciando addietro questa, che era una questione incidente, ripensava alla principale, e come ciò, che non s' era curato di richiedere il Baliani, poteva esser richiesto dai lettori dei Dialoghi, arretrando a que' due passi da noi sopra citati. Conferiva queste cose col Viviani, che incorava una giovanile speranza di dover finalmente sciogliere i dubbi, aiutandosi di esperienze più diligenti. Pareva anche a lui vero quel che vero era creduto e affermato dal Sarpi, da Galileo e dallo stesso Baliani, ma non se ne poteva aver certezza come di un fatto osservato. Le osservazioni però voleva che si facessero nelle ammaccature, non del percuziente, ma del percosso, cosicchè, invece di sparar l' archibugio contro una pietra, come il Salviati proponeva, si sparasse contro un petto a botta, o contro un corsaletto o che altro, atto a ricevere e a ritenere in sè impresse le vestigia, da congetturare del maggiore o del minor impeto della palla.

Piacque a Galileo l' esperienza, in questo nuovo modo proposta, e dietro la quale si sperava di trovar la vera ragione perchè nelle cadute naturali, anche da non grandi altezze, e nelle quali perciò pareva che di poco effetto dovess' essere l' impedimento dell' aria; il mobile non acquisti mai impeto uguale a quello della sua proiezione. Questa ragione si doveva sostituire a quella messa in bocca al Salviati, ed essendo la cosa di tanta importanza, perchè non dovesse rimanere indietro, in mezzo alle presenti sollecitudini di migliorare e ampliare i dialoghi delle Nuove scienze, Galileo stesso ne dettava al Viviani un tal memoriale: « Cercar di assegnar la ragione onde avvenga che la palla tirata in su col moschetto, incontrando dieci o dodici braccia lontano un pett' a botta lo sfonda, sopra il quale, cadendo ella dall' altezza dove il moschetto la caccerebbe, percotendo nel ritorno in giù sopra il medesimo petto, assai minore effetto vi farebbe, e forse appena l' ammaccherebbe un poco » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 19).

Se fosse stata veramente da Galileo e dal Viviani trovata quella ragione, che si cercava, non potremmo noi asserire di certo, mancandoci intorno a ciò il documento. Anzi, come apparirà dal passo, che tra poco trascriveremo, sembra che non avessero gli Accademici fiorentini trovato da dir nulla di meglio di quel che, nel primo e nel quarto dialogo delle due Scienze nuove, era stato insegnato dal Salviati, nonostante l' antica instanza del Baliani, che cioè, in sì poca altezza quant' è un trar d' archibugio, non possa

l' aria impedire alla palla il velocitarsi, secondo la legge degli spazi proporzionali ai quadrati dei tempi.

Certo è però che il Viviani istituì l'esperienze a quel modo che, vivente Galileo, le aveva a lui stesso proposte, e come appartenenti all'Accademia del Cimento furon raccolte fra quelle, che si descrivono intorno ai proietti nell' appendice al libro dei *Saggi*. Ivi si ripetono dal Segretario le precise parole, che si leggono nel dialogo quarto a pag. 164 dell' edizione di Leida, e a pag. 233 di quella dell'Albèri, nelle quali parole, senz'averlo ancora sperimentato, s'afferma per vero il fatto della percossa della palla dell'archibugio, presso alla bocca, maggiore di quella che la medesima palla farebbe contro una pietra, tornando in giù dall' altezza, a cui l' archibugio stesso l' avrebbe verticalmente gettata, e poi nel detto libro così subito si soggiunge:

« Noi abbiamo fatto questa prova con un archibugio rigato, non già sparandolo contro una pietra, per osservar l'ammaccatura della palla, ma bensì contro un pettabbotta di ferro. In esso adunque abbiamo veduto che i tiri fatti da minore altezza v' imprimevano forma assai più profonda di quelli, che da maggiore venivano fatti: imperocchè dicevano alcuni, seguitando in ciò il parere del Galileo, nel più lungo viaggio che fa la palla, fendendo l'aria, si va di continuo smorzando in essa quell'impeto e forza soprannaturale impressale dalla violenza del fuoco » (Firenze 1841, pag. 163).

Il parere di Galileo è notabile che fosse seguito dagli Accademici fiorentini, dopo quasi vent' anni di discussione contro le istanze del Baliani o, per più vero dire, contro le esperienze comuni. Aveva tutta l'apparenza del vero che la palla del moschetto non torni in giù da tale altezza, che le debba l' aria togliere tanto di velocità, e nonostante non vedevano a quale altra causa, fuor che all' impedimento dell'aria, si potesse attribuire lo stravagante effetto. Implicitamente dunque ammettevano costoro, insieme col Maestro, che solo nel vuoto acquisterebbe il mobile, scendendo naturalmente, tutto intero il primo impeto della sua proiezione, ed esplicitamente professava così il Borelli nel suo trattato *De vi percussionis*. « Si postea removeatur omnino aeris impedimentum.... spatia ascensus atque descensus, aequalibus temporibus, aequalia essent » (Bononiae 1667, pag. 258).

Scriveva così l'Autore nella proposizione CXIV, dop'aver descritta l'esperienza della palla verticalmente gettata con la saetta, l'ascesa violenta della qual palla dice essere stata doppia della discesa naturale nel medesimo tempo. Ma le esperienze, che dovevano meglio persuadere, e confermare le menti nella verità delle dottrine galileiane, non apparirono che sui principii del secolo XVIII, quando il Gunther faceva, innanzi all' imperiale Accademia di Pietroburgo, sparar con tiro verticale i cannoni, misurando il tempo e osservando l' altezza, a cui faceva l' impeto risalire i proietti. S' ebbe da una di coteste esperienze l' altezza di 7819 piedi inglesi, mentre, secondo i calcoli di Daniele Bernoulli, da lui stesso descritti nella dissertazione *De actione fluidorum in corpora solida* (Comment. petroburg., T. II); sarebbero nel vuoto dovuti essere 58,750 piedi. Aveva dunque la palla trovato tanto con-

trasto nell' aria, da ridurre a un ottavo la sua libera salita, d' onde mostrasi la fallacia dell' istanza del Baliani contro la dottrina di Galileo, e si risolve il problema del Sarpi. Perchè l' impeto di proiezione non si dovrebbe comparar con l' impeto della caduta naturale della palla o della freccia da quell' altezza, a cui l' avevano cacciata il moschetto o la balestra, ma da un' altezza tanto maggiore, quanta si può congetturare dietro i calcoli del Bernoulli, e l' esperienze di Pietroburgo.

Mancava agli Accademici fiorentini tanta perizia di calcolo, e tanta precisione degli strumenti, e dall' altra parte l' esperienze da loro istituite, dietro il suggerimento e la direzion del Viviani, e quelle stesse accennate nella detta proposizione CXIV del Borelli, non avevano, per mancanza di precisione, l' efficacia che si richiedeva per rispondere alle fatte instanze, e per risolvere i proposti quesiti, onde a poco si può dire che si riduca tutto quel che a carte 94 si proponeva di aggiunger nel primo dialogo il Viviani, *dopo il discorso del Salviati circa il tiro del moschetto in un corsaletto:* ma l' altro proposito che segue, d' illustrare cioè *il pensiero di Platone, e far quel calcolo,* ebbe a rimanersi anche in maggior difetto. Nel dialogo quarto, dop' avere il Salviati definita la *sublimità,* dall' impeto acquistato nella quale, volto orizontalmente e congiunto col moto naturale e accelerato della gravità, il proietto descrive la semiparabola; viene in mente al Sagredo di applicar quel concetto, che si confessa derivar dai placiti di Platone, alle orbite planetarie, il moto equabile delle quali si potrebbe immaginar preceduto da un moto retto accelerato, incominciatosi a far da punti più o meno sublimi, secondo la maggiore o minor velocità, che voleva il Creatore fosse impressa ne' pianeti. Dice esso Sagredo che aveva Galileo avuto talvolta il pensiero di calcolare quelle sublimità, per veder se si trovassero corrispondere alle grandezze degli orbi e ai tempi delle rivoluzioni: a cui soggiunge il Salviati che non solo aveva Galileo avuto il pensiero, ma che aveva fatto già quel computo, « ed anco trovatolo assai acconciamente rispondere alle osservazioni: ma non averne voluto parlare, giudicando che le troppe novità da lui scoperte, che lo sdegno di molti gli hanno provocato, non accendessero nuove scintille » (Alb. XIII, 238).

Ora che era cenere, non poteva aver più nessuna paura di quell' incendio, e perciò pensava il Viviani ch' era il tempo di far quel calcolo, per adornare il concetto platonico, e anche il dialogo galileiano. Non possono i Lettori astronomi non sentirsi a questo punto frugati da una grande curiosità di sapere in qual modo quel calcolo fosse fatto, perchè dalla risposta scenderebbe un corollario importante alla nostra Storia dell' Astronomia. Quel concetto platonico e copernicano infatti, dalla scoperta delle orbite ellittiche veniva dimostrato falso, e poniamo che non si vedesse ancora di lì conseguir chiaro, come poi apparve al Newton, il sistema delle forze centrali, non si poteva più pensare all' equabilità del moto orbitale, succeduto al retto accelerato, ora che si osserva di fatto andar nel perigeo il pianeta alquanto più veloce che nell' apogeo. Galileo non volle mai credere a queste osservazioni,

nè il corollario storico che si diceva è questo, ma un altro anche più notabile, perchè l'essersi proposto il Viviani di far que' calcoli platonici, per inserirli nel quarto dialogo delle Nuove scienze, sarebbe documento che, anche dopo qualche anno la morte di Galileo, si persisteva nella scuola di lui a repudiare le leggi scoperte dal Keplero. Dell' esser poi messo o no quel proposito ad effetto è inutile domandare, perchè, se quei calcoli astronomici fossero stati fatti bene secondo le dottrine platoniche e copernicane, era impossibile che fossero *trovati assai acconciamente rispondere alle osservazioni,* per cui non par che possa andare assoluto dalla nota d' inverosimile il detto del Salviati.

A terminar questo esame dei modi come il Viviani colorì que' suoi pensieri d' ampliare e d' illustrare le dottrine, esposte da Galileo nella prima edizione delle Scienze nuove, in certi punti particolari; non rimane ora a dir che del proposito di rispondere a una domanda, messa dallo stesso Viviani in quella forma, che si lesse nella X nota del suo memoriale. Accennasi quivi all' uso delle catenelle, di trattar delle quali si promette sulla fine del Dialogo quarto, e poi si rimanda il discorso all' ultimo congresso, che sarebbe in materia della forza della percossa. Ma perchè dovremo di quest' ultimo congresso far speciale soggetto la nostra Storia, vedremo allora come rispondesse il Viviani, e com' abbiamo, dietro i documenti, a rispondere noi a chi fosse curioso di saper se le dette catenelle dovevano secondo Galileo solamente servire ai Geometri, per descrivere le parabole, o anche ai militari per dirigere i tiri delle artiglierie.

V.

Due scienze, che al mondo matematico s' istituivano come nuove da un uomo, dotato d' ingegno straordinario senza dubbio, ma non divino, come tanti fanatici se lo vanno immaginando, non era possibile che, rimanendosi per la naturale insufficienza da una parte in difetto, non trascorressero dall' altra in qualche errore. Come fossero da Galileo stesso riconosciuti que' difetti, e come, con l' aiuto del Viviani ei pensasse, in mezzo alle tenebre, di supplirvi, ce l' hanno fatto veder di sopra i documenti. Ma quanto a conoscere e a confessare gli errori, se repugna all' amor proprio di tutti gli uomini, doveva parer cosa contro natura a colui, che sentiva quanto fosse necessario confermare i discepoli in quella loro opinione, che avesse cioè impressa quasi una certa nota d' infallibilità nel suo magistero.

Fu il giovane Viviani uno dei primi a creder con religioso ossequio a una tale infallibilità del Maestro, e trasparisce viva, senza cercar altro, la sua fede dal modo, com' egli accolse e notò le censure del Blancano. Vedemmo come fossero le più pungenti di così fatte censure in materia delle resistenze

dei solidi, nella quinta proposizione del qual trattato si notavano dal Gesuita certe conclusioni, che parevano contradire alle precedenti. Si legge infatti in quella quinta dimostrazione che la resistenza R del cilindro GD (fig. 19) sta alla resistenzá R′ del cilindro DF, come la lunghezza FE sta alla EG (Alb. XIII, 123), per cui, moltiplicandosi le lunghezze per le basi uguali, avremo R : R′ = DF : DG, mentre la terza precedente dà la proporzione omologa R : R′ = $EG^2 : FE^2$.

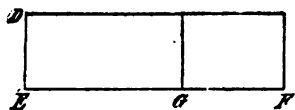



Figura 19.

Vivente Galileo furono anche dal Viviani queste censure, come se le avesse suggerite l' invidia, avute in disprezzo, ma poi, quando col progredir della scienza venne a rendersi dall' altrui suggezione più libero l' ingegno, conobbe che almeno in parte erano giuste, cosicchè, lasciando quella prima cieca fede che aveva ai detti del Maestro, e richiamandoli a esame più sottile e più giudizioso, ebbe a scoprir altre incredibili fallacie nell' oracolo venerato. Di qui, morto il Maestro, incomincia per il Discepolo un' opera nuova, qual' è quella di emendare i dialoghi delle Nuove scienze dai più notabili errori.

Ebbe quest' opera principio dall' esame delle proposizioni intorno alle resistenze, d' onde glie n' era venuta l' occasione, e dalla V^a, censurata dal Biancani, passando alla VI^a, la trovò addirittura falsa, per cui, postillando nella solita edizione di Leida, si proponeva di ridurla a verità più generale nella seguente maniera: « Proposizione VI del Galileo generalmente e diversamente enunciata per esser quella non vera. *Dei cilindri e prismi, anzi dei solidi regolari simili, il rispetto tra i momenti gravanti è sesquiterzo del rispetto tra i momenti resistenti delle loro sezioni.*

« Siano i due solidi regolari simili AB, CD (fig. 20) dico ecc. Prese dopo le linee A, C, uguali ai diametri delle sezioni A, C, le E, F, G continue proporzionali, il momento gravante del solido AB, al gravante di CD, sta come il quadrato della lunghezza AB, al quadrato della CD: cioè, come il quadrato della linea A, al quadrato della E, per esser queste proporzionali alle AB, CD, stante la similitudine dei solidi, cioè come la prima linea A alla quinta G. Ed il momento resistente della sezione A, al resistente della C, sta come il cubo della linea A, al cubo della C, per la IV^a di Galileo, cioè come la prima A alla quarta F. Perchè tra A e G sono quattro rispetti della prima e seconda, e tra A ed F sono tre rispetti della medesima prima e seconda; adunque anco il rispetto tra il momento gravante di AB, al gravante di CD, sarà sesquiterzo del rispetto tra il resistente di A, e il resistente di C, e non è sesquialtero, come pronunziò ed intese di dimostrare il Galileo » (MSS. Gal., P. V, T. IX).

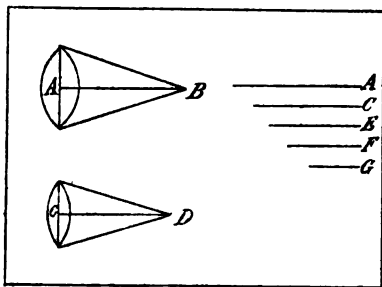



Figura 20.

Il linguaggio, più che mai insolito alle orecchie dei Matematici odierni, si traduce nella seguente guisa, per confermare la verità della conclusione. Siano date le proporzionali continue $A : C = C : E = E : F = F : G$, dalle quali è facile ottenere $A^2 : E^2 = A : G = A^4 : C^4$. Chiamati dunque M, M′ i momenti, avremo $M : M' = A^2 : E^2 = A : G = A^4 : C^4$, e per la IV^a di Galileo $R : R' = A^3 : C^3$, rappresentando R, R′ le resistenze dei solidi contemplati. Inalzata ora questa alla quarta potenza, e quella a cubo, daranno $R^4 : R'^4 = A^{12} : C^{12}$, $M^3 : M'^3 = A^{12} : C^{12}$, e perciò $M^3 : M'^3 = R^4 : R'^4$; ossia $M : M' = R^{\frac{4}{3}} : R'^{\frac{4}{3}}$, che vuol dire i momenti delle potenze aver, secondo l' espression del Viviani, ragione sesquiterza delle resistenze.

Aggiunge il Viviani stesso a questa sua proposizione un corollario, per mostrar come in quella, resa così più generale, si comprenda il caso particolare contemplato da Galileo, che pur viene a concludere una falsità, da non si poter salvare, come alcuni credevano, nemmeno profferendone l' enunziazione in modo diverso.

« Corollario. — Se dunque la linea A rappresenterà il momento gravante del solido AB, ed anche il resistente della sua base A, che sarà quando esso solido sia il minimo che rompa, la linea G rappresenterà il gravante del solido CD, e la F il resistente della sua base C; sicchè il gravante CD è tanto minore del suo resistente, quanto la G è minore di F, o, a proporzione, quanto è minore C di A, ovvero CD di AB. Sicchè il piccolo tanto più è resistente, quanto a proporzione è più corto. »

« E per chi dubitasse che l' enunziazione del Galileo si dovesse intendere così: cioè che i momenti gravanti de' cilindri simili hanno proporzione sesquialtera di quella, che hanno le resistenze (assolute però e non i momenti loro resistenti), pur si prova che, volendo paragonare il rispetto dei momenti gravanti con quello delle resistenze assolute, l' enunziazione sia profferita diversamente così, cioè: *I momenti gravanti de' solidi simili sono fra loro in doppia proporzione delle resistenze assolute delle basi.* Perchè, essendosi provato il rispetto tra il gravante e il gravante essere come la A alla G, ed essendo il rispetto tra la resistenza assoluta di A, all' assoluta di C, come il quadrato della linea A, al quadrato della linea C, cioè come la linea A alla terza E; ed avendo A a G duplo rispetto di A ad E, che è media proporzionale tra A e G, sarà manifesto quanto si propose » (ivi).

E anche più manifesto potrebbe rendersi, traducendo così nelle forme moderne il linguaggio del Viviani: È stato già dimostrato $M : M' = A^2 : E^2$; $R : R' = A^2 : C^2$, e dalla data serie delle continue proporzionali s' ha $A^2 : C^2 = A : E$. Dunque $M : M' = R^2 : R'^2$, che vuol dire: i momenti hanno doppia proporzione delle resistenze, ossia stanno come i quadranti delle resistenze, diversamente da quello, che aveva preteso di dimostrar Galileo.

Incominciatosi così a persuadere, con matematiche ragioni, che non era da confidarsi in una verità, perchè il grande Maestro della Scienza del moto l' aveva messa, il Viviani passò da questa proposizione, con più libero esame, a vedere anche le altre, intorno alle quali, quasi avesse creduto di offendere

l' adorabilità di un Nume, aveva sempre cacciati i dubbi dalla sua mente. Venne così facilmente a scoprire le tante altre fallacie, nelle quali era trascorso Galileo, trattando delle resistenze, e aveva avvertito già lo sbaglio in assegnare la figura parabolica al solido, che per tutto resiste ugualmente alla pressione, qualche anno prima del Blondel e del Marchetti. Tanto anzi il Viviani stesso riconobbe il secondo dialogo delle Nuove scienze difettoso, che s' era proposto di riformarlo nella massima parte. Di quest' opera, data dallo zelante discepolo, fu discorso da noi nel cap. VIII dell' altro tomo, per le sparse pagine del quale ricorrono varie altre notizie concernenti ciò che quel geloso e amorevole, ma pur libero censore, aveva scritto contro molte errate dottrine de' Dialoghi del moto. Poco sembrerebbe perciò che rimanesse a dire nel presente argomento, alla più compiuta trattazione del quale, manca nonostante un esempio, intorno a cui vogliamo trattenere i lettori, come intorno a uno de' più notabili fatti, da mostrar quanto fosse facile, anche ai più grandi ingegni, che non presero in mano il filo di Arianna, lo smarrirsi miseramente in questi meccanici labirinti.

Sulla sera della quarta giornata, nella quale si trattò de' proietti, e proprio nell' atto di congedarsi gl' interlocutori, il Sagredo si proponeva di dimostrare un accidente simile a quel che si osserva nella palla di un cannone, la quale, tirata di punto in bianco, a cagion della gravità, che mai l' abbandona, è impossibile che vada per linea retta orizzontale; dicendo esser per somigliante ragione « impossibile distendere una corda, sicchè resti tesa dirittamente e parallela all'orizzonte, ma sempre fa sacca e si piega, nè vi è forza che basti a tenderla rettamente » (Alb. XIII, 262). Concludeva ciò come corollario da un teorema di Meccanica nuova, immaginando cavalcare sopra i punti stabili A, B (fig. 21) un filo imponderabile, teso nella diríttura orizzontale AB da due grandi pesi uguali C, C, e soggiungeva che, se dal mezzo E si sospendesse qualsivoglia piccolo peso, come per esempio H, la linea AB allungandosi cederebbe in qualunque modo, e costringerebbe perciò i ponderosi corpi C, C a salire in alto.

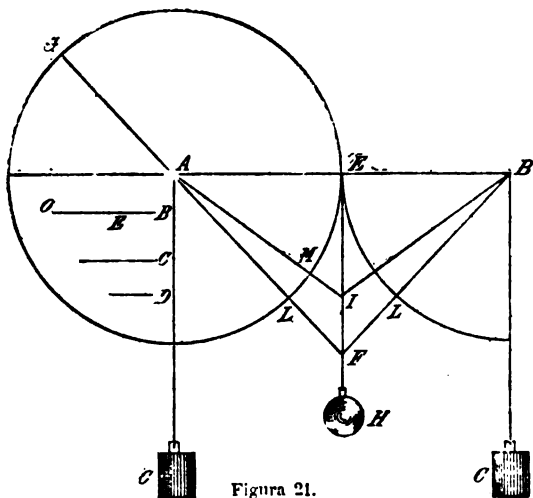



Figura 21.

Voleva il Sagredo, per provare il suo detto, che, fattosi centro in A e in B, co' raggi uguali AE, BE si descrivessero due quadranti, e immaginando essersi il peso H da E abbassato in F, congiunte le FA, FB, faceva osser-

vare che, mentre la scesa del peso piccolo veniva misurata dalla tangente EF, la salita de' grandi era uguale alle porzioni esterne LF delle secanti AF, FB. Tutto si riduceva dunque a provare che il momento di H è, o può almeno essere maggiore della somma de' momenti C, C, richiamando perciò alla memoria di Simplicio la nota legge aristotelica delle equiponderanze, secondo la quale si diceva allora avere due gravi i momenti uguali, quando sono uguali i prodotti delle velocità per le moli. Applicando ora il Sagredo al fatto suo questa legge, voleva persuadere allo stesso Simplicio che si sarebbe felicemente conseguito l' intento, quando si fosse dimostrato che il prodotto di H per la linea EF, dalla quale si misura la velocità della scesa, fosse o potess' essere maggiore del prodotto di 2 C per LF, che nello stesso tempo misura la velocità della salita. La dimostrazione procede in sostanza così, come noi la riduciamo in più semplice forma.

Facciasi 2 C ad H come la linea BO a un' altra, che sia C, e, presa D linea minore della C, dividasi in E la BO in modo, che sia $OB : D = D : BE$. Menato poi il quadrante, descritto dianzi col raggio AE, per tutto il suo giro, costituiscasi F a tal distanza da E che, tirata la FAG, debb' aversi $OE : EB = GL : LF$, la quale componendo darà $OB : EB = GF : LF$. Posto poi nella prima ragione di questa $BE = \frac{D^2}{OB}$, e moltiplicati per LF ambedue i termini della ragione seconda, verrà $OB^2 : D^2 = GF . LF : LF^2$. Ma il prodotto della secante GF, per la sua porzione esterna, è uguale al quadrato della tangente EF; dunque, sostituendo ed estraendo le radici, avremo $OB : D = EF : LF$. Ma $OB : D$ è maggiore di $OB : C$, ossia di $2 C : H$, dunque $H . EF$ è maggiore di $2 C . LF$: ciò vuol dire che, prevalendo il momento del piccolo peso al momento de' due grandi, questi, come dovevasi dimostrare, saranno in qualunque modo fatti salire da lui. « E quel che avviene alla retta AB priva di gravità, conclude il Sagredo, mentre si attacchi in E qualsivoglia minimo peso H, avviene all' istessa corda AB, intesa di materia pesante, senza l' aggiunta di alcun altro grave, poichè vi si sospende il peso stesso della materia componente essa corda AB » (ivi, pag. 265).

Dicemmo esser questo un teorema di Meccanica nuova, per Galileo però, perchè Leonardo da Vinci l' aveva dimostrato quasi due sècoli prima, come si rammemoreranno coloro, che hanno letto il capitolo primo dell' altra parte di questa Storia. L' aggressione è nonostante ne' due Autori molto diversa, e non sarà perciò inutile il trattenersi alquanto per farne insieme il confronto. Proponendosi a risolvere il problema del piccolissimo, che muove il grandissimo, pensava Leonardo non si potere far meglio che imitando Archimede, con ricorrere alla leva, per mezzo della quale, dato il punto di appoggio, si vantava che avrebbe con le sue proprie mani mosso il cielo e la terra. Nè a conseguir ciò, bisognava fa altro, se non dare alla leva una tale lunghezza, da stare alla lunghezza della contralleva reciprocamente come il peso dell' universo sta al peso di un uomo senza il cappello, perchè, a solo aggiungervi il peso di questo, prevalendo il momento, si verrebber di fatto a com-

movere le fondamenta del mondo. Essendo ora AE, nella precedente figura, il braccio della leva, che si pone imponderabile, come ponevasi dianzi imponderabile il filo, e potendosi a qual si voglia distanza dal punto fisso A terminare la contralleva, si comprende benissimo, diceva Leonardo, come possa un capo di spillo in E sollevare in C una gran macina.

Il discorso di Leonardo è vero, se son veri i teoremi di Archimede nel libro Degli equiponderanti, ma non si può dir così di quell' altro discorso, che Galileo poneva in bocca al Sagredo. Basta infatti questa prima considerazione, per metterci in sospetto che dee esser lì dentro una grande fallacia: La mole di H, che libera pende dal punto F, non par che possa equiponderare alla mole di C, con la quale è congiunta per mezzo del funicolo FAC, se non a patto che i due pesi, nelle dette moli, siano uguali, precisamente com' avverrebbe se fosse in F un altro punto stabile e fisso. Il calcolo conferma meglio che in questa sola uguaglianza de' contrappesi sussistono le condizioni dell' equilibrio, nel caso contemplato da Galileo, per cui gli riuscì tutt' al contrario della sua intenzione, ch' era quella di dimostrar come mai un piccolissimo possa movere un grandissimo corpo.

Un' altra considerazione sovviene a confermare il sospetto di qualche fallacia nel discorso di Galileo, ed è che male sembra essere applicato al caso di questi pesi penduli dalle funi il principio delle velocità virtuali, come nella leva, sull' estremità dalla quale esercitano i pesi perpendicolarmente tutto il loro momento: perchè il peso H nello schema galileiano non è libero d' esercitare il momento della sua gravità per contrappesar C, C, essendo manifestamente impedito dal funicolo FB che lo frena. Intanto s' incomincia ora a veder chiaro dove s' asconde l' errore di Galileo, il quale computava l' effetto di H come se operasse con tutta la naturale sua gravità, mentre invece la gravità totale alla parziale con cui fa da contrappeso al doppio di C, sta come AF ad FE. Tale è appunto la ragione che passa tra il momento del grave nel perpendicolo, e nel piano inclinato: che se Galileo se l' avesse in tal proposito richiamata alla memoria, si sarebbe facilmente avveduto del suo fallo, e avrebbe indirizzato a miglior fine il teorema della corda tesa, specialmente applicandovi il metodo di decomporre una forza in due, come poi fece in dimostrare uguale la velocità de' cadenti per varie vie oblique, ma della medesima altezza. Forse, quando scriveva e licenziava quella fine del quarto Dialogo per la stampa, non aveva ancora pensato a questo nuovo modo di condurre la dimostrazione del Teorema meccanico, e fa perciò più gran maraviglia che l' analogia fra questa macchina funicolare e il piano inclinato non fosse avvertita poi dal Viviani, il quale, accortosi finalmente della fallacia del suo Maestro, prendendo la penna in mano per scrivergli contro, non seppe nemmen egli liberarsi dal trascorrere in altra simile fallacia, ammettendo con Galileo che per la tangente EF perpendicolare, e per la secante AF obliqua eserciti il peso il suo momento totale. Anzi di questo non si corresse mai, nè avrebbe ai veri termini meccanici ridotte mai le altrui trasgressioni, se non gli fosse provvidamente occorso a fare alcune esperienze, le quali,

per parer tanto aliene dalla scienza del moto, non vogliamo ancora nemmen pronunziare. Riconosciute dai fatti sperimentati le ragioni geometriche, e dalla Fisica tornando il Viviani alla Meccanica, per sodisfare ai curiosi di sapere in che modo, di promotore ch' egli era della meccanica funicolare di Galileo, si convertisse in contraditore; valgano le seguenti notizie, che dalle sparse e informi carte manoscritte di lui passiamo a intessere nella nostra Storia.

La prima e più ovvia promozione, che occorresse al Viviani di fare del teorema di Galileo, fu quella di ridurlo a problema, perchè, data la proporzione tra il peso attaccato nel mezzo e gli altri due eguali, dai due capi della fune liberamente pendenti, si determinassero le condizioni dell' equilibrio. Quel problema veniva dal Viviani stesso così proposto: « Sia la corda AB, nella precedente figura, senza peso, orizontalmente tesa sopra le due girelle A, B dal mezzo delle quali in E penda un piccol peso I, e dalla estremità di essa i pesi C, C uguali tra loro, e quanto si voglia maggiori del peso I. Già è manifesto per il Galileo che il piccolo calerà, e sarà bastante a sollevare i pesi C. Cali per esempio in I, e sia dato un altro peso F, maggiore di I, e minore di ciascuno de' due pesi C, il quale si sospenda in luogo del peso I. È certo che questo calerà ancora più a basso. Cercasi fino a qual punto della perpendicolare EI sia per fermarsi il peso F, sollevando i pesi C » (MSS. Gal., T. CXIII, fol. 14).

Il problema è risoluto così, accomodandovi opportunamente il Viviani il discorso e i modi di Galileo: Facciasi $F : I = C : D$, rappresentando C una linea; e rappresentando 2 C i pesi, si faccia ancora $I : 2C = D : OB$: avremo $2C : F = OB : C$. Prendasi OE terza proporzionale dopo OB, C, e si accomodi dentro l' angolo AEF la linea AF di tal lunghezza da aversi $GL : LF = EB : OE$. Sarà F il punto cercato perchè ivi il momento $F . EF$ del peso che scende s' uguaglia al momento $2C . FL$ dei pesi, che nello stesso tempo son fatti salire. Composta, l' ultima scritta proporzione darà $GF : LF = OB : OE$, e moltiplicati per LF i termini della prima ragione, e per OB i termini della seconda, $GF . LF : LF^2 = OB^2 : OE . OB$. Ma $GF . LF = FE^2$, $OE . OB = C^2$, dunque $FE^2 : LF^2 = OB^2 : C^2$. Estraendo le radici, e ponendo $OB : C = 2C : F$, avremo $F . FE = 2C . LF$, che mostra come veramente in F, tra il peso che scende e i due che salgono, s' equilibrino i momenti. Ma ascoltiamo il Viviani:

« Facciasi come il peso F all' I così la linea C alla D, e come il peso I ai pesi C così la linea D alla OB: sarà *ex aequali* il peso F ai pesi C, come C ad OB, e permutando i pesi C al peso F come OB a C. Inoltre delle due OB, C sia terza proporzionale la OE, e si faccia come la EB ad OE, così il diametro del cerchio, il cui radio AE, cioè così GL ad LF, prodotta in diritto: che adattando la AF all' angolo AEF sarà F il punto cercato. Poichè, essendo fatto GL ad LF come EB ad OE, sarà componendo GF ad FL, cioè il quadrato di EF ad LF, come OB ad OE, cioè come il quadrato di OB a C, e però la linea EF ad FL, cioè la scesa del peso F alla salita dei pesi C, come la linea OB a C: cioè come i pesi C al peso F reciprocamente, e però il dato peso calerà in F, e quivi si farà l' equilibrio » (ivi).

Risoluto così il meccanico problema, soggiunge il Viviani un corollario, per farne l' applicazione a costruire quella nuova specie d' Igrometri, de' quali parlammo a pag. 521 del nostro primo Tomo. « Se invece de' pesi C, egli dice, da sollevarsi col piccolo peso I, ci figureremo la AB essere una striscia di carta, che priva di umido resti ben tesa e attaccata nelle estremità A, B, e nel mezzo E si appenda il medesimo peso I; questo farà alquanto allungare detta striscia, e cavandola dalla rettitudine, gli farà fare un tale angolo AIB, calando da E in I, e tale effetto sarà simile anzi lo stesso.... » (ivi).

Rimase a questo punto la scrittura interrotta, perchè, ripensando il Viviani a un fatto poco prima osservato, incominciò ad entrargli nella mente il dubbio se, nel funicolo di Galileo e nel nuovo Igrometro, l' effetto fosse veramente simile, anzi lo stesso. Aveva fin allora con ferma fede creduto che, nel detto funicolo, le scese del peso di mezzo si serbassero sempre proporzionali alle salite dei pesi dalle due parti, ciò che trovò non avverarsi nello strumento, quand' ebbe a compararlo con altri strumenti simili, per applicarvi la scala delle proporzioni. Poniamo che sia stato segnato in I, nella precedente figura, il primo grado: credeva il Viviani che, doppia umidità facendo allungare la carta il doppio, si dovesse il secondo grado segnare in F, a una distanza da E doppia del primo. Gli resultava invece dalle istituite comparazioni che « si ricerca più umido ad abbassare dal secondo al terzo grado, che dal primo al secondo, e maggiore dal terzo al quarto, che dal secondo al terzo, supposti i gradi uguali » (MSS. Gal. Disc., T. CXXXIV, fol. 49). Cominciò allora il Viviani seco medesimo a pensare e a dire: o non è vero quel che ho creduto fin qui in Fisica, che cioè la carta imbevuta di doppia umidità s' allunghi il doppio, o non è vero quel che m' aveva Galileo fatto credere in Geometria, che cioè, nella macchina funicolare descritta dal Sagredo, gli allungamenti delle tangenti serbino sempre proporzione esatta con gli allungamenti delle secanti. E perchè questa inquisizione seconda era assai più comoda, e più concludente della prima, vi s'applicò con sollecita diligenza, e gli riuscì facile a dimostrare che la tangente EI, alla parte esterna IM della secante, ha maggior proporzione della tangente EF, alla secante FL, e così riconobbe con sua gran compiacenza, per ragione geometrica in perfetta conformità con l' esperienze, che per fare scendere al peso uno spazio doppio conveniva che l' umidità avesse fatto allungare la carta qualche cosa più del doppio, ond' è che, presignatasi la figura 22, la costruzione della quale è facile intendere, annunziava e dimostrava così il nuovo teorema: « Dico descensum EA ponderis H ad

Figura 22.

ascensum AB ponderis L, minorem rationem habere, quam descensum FD, ad ascensum DC. »

« Nam, ducta AD, et producta usque ad G, et iuncta GB, et ex D ducta parallela DH, erit EA ad FD ut AG ad GD, vel AB ad DH. Et, permutando, EA ad AB, ut FD ad DH. Sed DC, quae ad centrum M pertransit, minor est DH, ut patet, ergo EA ad AB minorem habet rationem, quam FD ad DC. Ergo, si pondus L ad pondus H fuerit ut EA ad AB, pondus H descendet usque ad A, neque amplius descendet, cum ratio linearum FD, DC supra punctum A sit semper maior, et infra A semper sit minor. » (MSS. Gal. Disc., T. CXIII, fol. 12).

Poi il Viviani stesso pensò che si potevano con più facile brevità dimostrare le medesime cose in quest' altra maniera: « Se si farà come i due pesi eguali L, M (fig. 23), al peso N, così la tangente CF alla secante FG, dico che il peso N arriverà a scendere fino in F, e non passerà più oltre a basso, perchè tutte le tangenti maggiori di CF, alle loro secanti, cioè le scese del peso N, alle salite de' pesi L, M, hanno minor proporzione che la scesa CF alla salita FC, e tutte le tangenti minori di CF, a tutte le loro secanti, hanno sempre maggior proporzione di detta CF alla FG. Poichè, tirata la CG, e la DI parallela alla GF, sarà CF a FG come CC a DH. Ma DB è minore di CH; dunque CD a BD ha maggior proporzione di CF a FG. Così si prova che CF a FG ha maggior proporzione di altra maggior tangente CQ alla secante PQ » (ivi).

Figura 23.

Lieto il Viviani di essersi incontrato in così bella, e nuova proprietà geometrica, l' applicava da una parte, per divisar giusti i gradi dell' Igrometro, e dall' altra per esplicar meglio e adornare il concetto galileiano. Per secondare una sua tale intenzione così scriveva in un foglio, in capo al quale si legge: « *Per la proposizione del Galileo, a facce 286 nel trattato dei proietti.* »

« Se l' AB, nella medesima passata figura, sarà divisa per mezzo in C, e co' centri A, B, ed intervalli AC, BC, siano descritti i quadranti, ai quali sia tangente comune la CDF, e siano due qualsivogliano seganti AED, AGF, dico che la CD alla DE ha maggior proporzione della CE alla FG. Poichè,

congiunta la CG, e tirata la DH parallela alla FG, che seghi la circonferenza in I, sarà DE, che è la minima, minore di DI, e molto minore di DH, e però CD a DE averà minor proporzione di CD a DH, cioè di CF ad FG, come era da dimostrare. »

« Che se i pesi L, M, insieme presi, al peso N averanno la medesima proporzione di CF a FG, potrà il peso N calare da C sino ad F, perchè sempre la sua scesa, avanti che ci arrivi, alla salita de' pesi averà maggior proporzione de' due pesi L, M, al peso N. E nota che ogni peso N, che sia punto punto maggiore de' due pesi L, M, averà il suo luogo nella tangente, dove fermarsi ed equilibrarsi coi detti pesi, supposto però che le attaccature de' fili AL, BM siano tanto lunghe, che al calar del peso N possano sempre salire i pesi L, M, perchè non si dà proporzione così grande tra il peso N, benchè appena minor de' due L, M, ed i pesi L, M, che maggiore non si possa dare tra una tangente CF alla sua intercetta segante FG. Ma ben è vero che, subito che si dia il peso N uguale alli due insieme L, M, quello non resterà di scendere per CN, finchè non averà fatto salire i pesi L, M fino in A, B, e siano i fili lunghi pure quanto si voglia. E questo perchè in tal caso, tra la detta tangente e la porzione di segante, cioè tra la scesa del peso D, e la totalità de' pesi L, M, non si dà mai proporzione di egualità, ma sempre di maggioranza. »

« Che poi il peso N, equilibrando in F i due L, M, non possa scendere oltre la tangente CF, così si prova nella seguente figura 24. Poichè dato per possibile che egli scenda ancora da F ad O, col centro A, intervallo AF, fatto l'arco FP, si prova in adesso che la nuova scesa FO, alla nuova salita PO ha sempre minor proporzione della tangente CF, alla porzione della secante FG; cioè che i pesi L, M al peso N, onde sarà sempre impossibile che il peso N cali più a basso di F. Imperocchè, congiunta la corda PF, e la QG prodotta sino alla segante in R, sarà questa parallela alla PF, e però il triangolo RFG sarà simile al triangolo FOP, onde, come RF ad FG, così FO ad OP. Ma RF ad FG ha minor proporzione, che CF ad FG; cioè minor proporzione de' pesi L, M al peso N, che è quanto rimaneva a dimostrare » (ivi, fol. 12, 13).

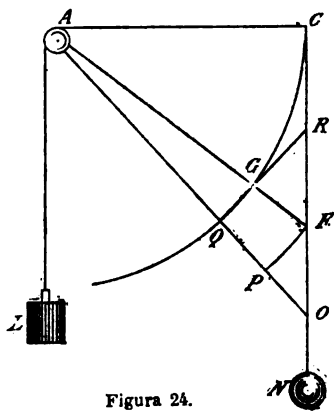



Figura 24.

Aveva appena cominciato il Viviani a gustare le gioie del veder con sì belle geometriche invenzioni promosso il teorema di Galileo, che gli si aprirono da quelle stesse invenzioni gli occhi, per veder invece la profonda fossa dell'errore, in cui, come cieco ch'è menato da un altro cieco, era miseramente caduto. Supponiamo, diceva tenendo fisso lo sguardo sopra l'ultima disegnata figura, che io da C conduca equabilmente a mano il peso infino a farlo scendere in O: non per questo il peso L salirà, per la ritrovata ra-

gione, verso A con moto equabile, ma con moto sempre più accelerato. Or come si può il momento di N, che si misura dal prodotto della mole per lo spazio CO, comparar convenientemente col momento di L, che pur si misura dal prodotto della mole per lo spazio OQ, passato nel medesimo tempo, se il moto della salita dell' uno è diverso dal moto della scesa dell' altro? ... e quanto più ci pensava, e più si doleva che il suo Galileo l' avesse così ingannato. Attribuendo tutta la colpa di ciò al mal uso che delle velocità virtuali aveva fatto il suo Maestro, volle tentare il Viviani se riusciva senza fallacia a dimostrare le condizioni dell' equilibrio nel funicolo teso, lasciando la perigliosa via tenuta da Galileo, per mettersi a quell' altra, che credevasi più sicura, e ch' era allora allora stata aperta ai Matematici dall' ingegno del Torricelli. Sembra che, per rendersi que' torricelliani principii più familiari, e per volgerli a secondar meglio le sue intenzioni, s' esercitasse così il Nostro a confermare la verità dei due seguenti teoremi:

« Li pesi eguali A, B (fig. 25), appesi ad un filo ACDB, cavalcabile sopra due girelle C, D, fermate sì, che la CD sia orizontale o inclinata, non si moveranno giammai dal sito, in che vennero poste. Poichè, se fosse possibile che venissero nel sito EF, congiunta la EF, sarebbe *ob parallelas EA, BF,* come EA a BF, così AG a GB, e così EG a GF. Ma le AE, BF sono uguali, adunque anco le AG, GB e le EG, GF saranno uguali. Ma ancora i pesi A, B sono uguali, adunque il punto G è centro di gravità de' pesi, tanto nel sito A, B, che nel sito E, F, e però tal centro comune, non acquistando niente verso il centro della Terra, anzi, non mutando luogo, i dati pesi non si moveranno, ma si farà tra essi l' equilibrio o la quiete, in qualunque luogo verranno lasciati. »

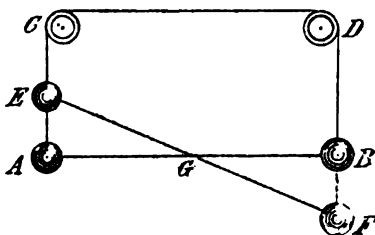



Figura 25.

« Ma se i pesi A, B (fig. 26) saranno disuguali, il peso maggiore A scenderà sempre, finchè B non arriverà in D. Perchè il centro di gravità di essi gravi, quando venissero nel sito E, F, tornerebbe in G, più vicino ad E che ad F, ma più alto che H, centro de' medesimi nel sito AB, il che sarebbe un salire contro natura. Ma bensì andranno verso il sito L, M, perchè il centro comune I è sotto H, e sempre si troverà nella perpendicolare GHI, discendendo da H verso I » (ivi, fol. 21).

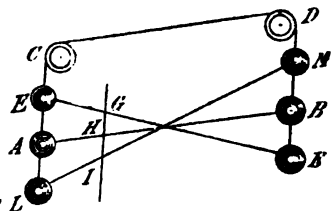



Figura 26.

Or venendo a fare il Viviani al funicolo galileiano l' applicazion di questi principii, ebbe a scoprir nel discorso del Sagredo un' altra fallacia, perchè, nello scendere il peso di mezzo, e nel salire i laterali, il centro di gravità non vien nulla acquistando verso il centro terrestre. Avrebbe dovuto

perciò considerare che qui s' opera dalla gravità, come nell' esempio de' pesi uguali rappresentati dalla figura XXV, e gli sarebbe dovuta bastar questa considerazione, per avvedersi che la radice dell' errore consisteva nel suppor che il peso di mezzo nel funicolo eserciti il suo momento totale per equilibrar gli altri due, come s' ei dipendesse da un punto stabile, e non dall' angolo mobile delle due corde. Persuaso in ogni modo che, per la debita applicazion del principio torricelliano, si dovesse dar finalmente al problema la desiderata risoluzione, vi s' applicò con tutto il suo studio, e pentendosi di aver perduto il tempo a promovere una fallacia del suo Maestro, prese la penna in mano, per scrivere così *Contro la dimostrazione del quarto dialogo delle due Nuove scienze:*

« Sia il peso A (fig. 27) men che doppio del peso C, sicchè la metà del peso A sia minore del peso C, e questo ad A abbia la proporzione della tangente AD alla secante DE, eccesso della secante BD sopra il seno toto BA, e preso CF uguale a DE si giungano le AC, DF, segantisi in K, e per K tirisi la ML, parallela alle BC, AD, per cui dico che il punto K è centro comune di gravità, tanto della metà del peso in A e del peso in C, quanto della metà del medesimo A in D, e del peso C in F. Perchè, come AD a DE, ovvero a CF, così sta AK a KC, e così DK a KF; ed AD a DE, cioè a CF, sta per supposizione come il peso C alla metà di A, e come il peso F alla metà di D. Sicchè, quando i pesi erano in A, C, il loro centro comune era in K, dove pure egli è, quando i pesi si trovano in D, F: onde, a scendere A fino in D, e salir C fino in F, il centro comune loro non avrebbe acquistato nulla verso il centro della terra; eppure il Galileo, per mezzo di quel suo principio di considerare la scesa dell' uno e la salita dell' altro, conclude che A scenderà in D, e C salirà in F. »

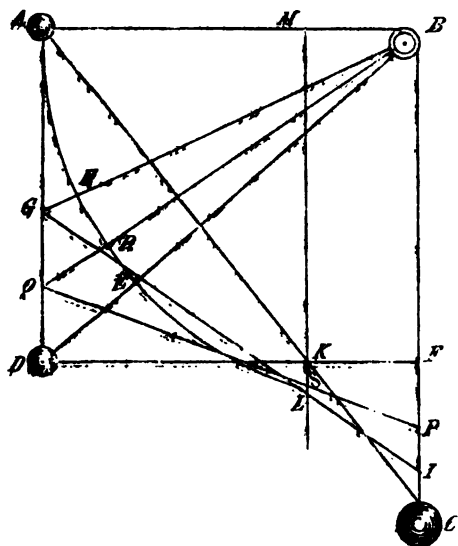



Figura 27.

« Ma qui, dico io, perchè seguir moto di questo composto di gravi, se poi e' si devon fermare dove il loro centro comune torna nel medesimo luogo dov' era prima? Anzi io dimostro che prima che arrivare il peso A in D, come per esempio A in G, e C in I, il centro comune, che è sempre nella linea ML, si troverà sempre più basso che il punto K, com' è in L; e quando A è in Q, e C in P, il centro loro comune, che pure è nella ML, come in S, con tutto che qui sia più alto di L, è sempre sotto K, perchè io ho provato

altrove che AG a GH, cioè a CI, ha maggior proporzione che AD a DE, e che però, se la GI sega ML sotto K, per la medesima ragione la QP sega ML sotto K. Onde ne seguirebbe che se i pesi A, C potessero naturalmente muoversi, e venire in D, F, come pretende il Galileo col suo principio, il lor centro comune di gravità K sarebbe prima sceso per la MK, e poi tornato a salire, e fermatosi nel sito più alto di quello, dove una volta ei si sia trovato: il che par che repugni alla natura delle cose gravi. »

« E però si esamini se si proceda con più sicurezza in questa speculazione, con quest' altro principio meccanico, cioè che *il composto di più gravi si muoverà, sempre che il loro comune centro di gravità, nel loro moto, acquisti vicinanza al centro comune delle cose gravi,* perchè allora la metà del peso A tirerà su, scendendo per AD, tutto il peso C, finchè amendue si trovino in quel luogo, dove il centro comune loro, che sempre cammina per la linea ML, si trovi nel punto più basso verso il centro della terra, e che però non arriveranno mai nel sito DF, come conclude il Galileo con quell' altra maniera di considerare le scese e le salite, cioè le velocità della metà del grave A e di tutto il grave C, ma bensì scenderà A e salirà C, finchè il loro centro comune occupi il sito più basso sotto K, che è il centro di gravità di quand' erano in A ed in C, e di quand' ei fossero in D e in F. »

« Cercasi dunque qual sia il primo sito tra A e D, e quale tra C ed F, come per esempio in G ed I, sicchè, giunta la diagonale GI, questa dia il segamento nella MK, più infimo di K, che qualunque altra diagonale: cioè trovare fin dove può scendere A e salir C, che il loro centro comune sempre abbia sceso sotto K a segno, che se A scendesse più, e C salisse perpendicolarmente ancor più di prima, il loro centro comune cominciasse a salire per LM, accostandosi al punto K. Avvertasi che sempre ho inteso di paragonare col peso C la metà dello A, perchè l' altra metà s' impiega contro l' altro peso uguale al C, pendente dall' altra parte della corda, mentre però A s' intenda posto in mezzo della corda orizzontale...... » (MSS. Gal. Disc., T. CIX, fol. 3).

Non proseguì oltre il Viviani a ricercare la massima distanza da M, o il minimo abbassamento sotto K del centro di gravità dei pesi, perchè incominciò a dubitar se la nuova via presa era la diretta. E benchè non fosse difficile a lui, Autore del trattato *De maximis et minimis,* una tale ricerca, non voleva nulladimeno, com' aveva fatto per lo avanti in questo argomento, perdere inutilmente il tempo e la fatica. Scrisse perciò a Roma a Michelangiolo Ricci quella lettera del dì 21 Maggio 1675, pubblicata dal Nelli, nella quale, esposte contro Galileo le difficoltà ch' ei ci trovava, sì applicando alla dimostrazione di lui il principio delle velocità virtuali, che quello dei centri gravitativi; concludeva dicendo: « In che consista l' errore del mio discorso io non penetro ancora, ma ogni poco di riflessione, che vi farà V. S. Illustrissima, sarà bastante a mostrarmelo » (Saggio di storia letter. fiiorentina, Lucca 1759, pag. 42).

Il Ricci infatti rispondevagli nove giorni dopo, con sicura franchezza,

che l' errore, riferendosi alla disegnata figura, consisteva nel considerare i pesi D, F; Q, P; G, I come gravati in ambedue l' estremità della bilancia da forze perpendicolari, mentre in D, in Q e in G le forze del peso che discende sono obliquamente dirette secondo le secanti BD, BQ, BG: voleva altrimenti dire che in D, in Q e in G il peso A non esercita il suo momento totale, per fare equilibrio al peso C in F, in P, in I, e non correndo perciò qui la regola del centro di gravità, come nella bilancia libera, è falso che si trovino in R, in S e in L, lungo la medesima linea ML, quegli stessi centri gravitativi: ond' è che male applicato al caso torna l' assunto del Torricelli. « Si compiaccia esaminare il mio pensiero, concludeva il Ricci, che forse lo troverà sussistente e vero, e che sodisfa pienamente alle difficoltà proposte da V. S. illustrissima » (ivi, pag. 43).

Quel perfetto giudizio non si era punto ingannato, e la verità rivelata da lui poteva confermarsi considerando la salita del peso C, nel perpendicolo BF, comparata con la scesa del peso D nel piano inclinato BD, a quel modo che aveva insegnato a fare Galileo stesso nella dimostrazione, che del famoso supposto dettava al Viviani. Ma è da notare che presero giusto da cotesta dimostrazione motivo di dubitar del principio delle velocità virtuali, il Nardi e il Torricelli, ai quali s' aggiunse l' altra grande autorità del Cavalieri. Quest' ultimo, in una sua lettera, nella quale mirabilmente si compendiano le controversie promosse poi dal Marchetti e dal Vanni intorno al modo di computare i momenti di una sfera cadente lungo un piano inclinato; scriveva così, dopo aver risposto alle difficoltà, che a lui faceva Gian Antonio Rocca, come i due detti le facevano al Torricelli:

« S' ella avesse comodità di fare l' esperienza quanto peso ci voglia a sostenere una palla in un piano inclinato 22°, 27′, che è il già considerato, mi saria assai caro, per vedere pure appresso a poco quanto gravita in sul piano detta palla. La ragione del signor Galileo e delli altri, che trattano questo teorema, credo sia perchè, salendo per esempio una sfera sopra un piano acclive, collegata con un' altra discendente perpendicolare all' orizzonte, essendo tanta la salita sopra l' acclive, quanta la scesa per la detta perpendicolare, l' altezza della salita, all' altezza della scesa, è come la perpendicolare alla inclinata. Veda ora se li pare che questi alzamenti e abbassamenti perpendicolari siano sussistenti o no a determinare giustamente i loro momenti, il che, come che appaia evidentissimo nella Libra, qui però non mi pare che cammini con pari evidenza » (Lettere d' illustri del secolo XVII a G. A. Rocca, Modena 1785, pag. 205, 6).

Le medesime opinioni e i medesimi dubbi avendo intorno a ciò anche il Viviani, e mancandogli in conseguenza questo efficacissimo modo di riscontrare il vero annunziatogli dal Ricci, si dette a consultar l' esperienze, per veder se la direzione obliqua delle forze che tirano alteri ne' pesi equilibrati il momento. Fra certe *Esperienze fatte, e riuscite,* è descritta dal Viviani stesso anche questa, che porta notato in fronte *provata.* « Se il peso D ed E (fig. 28) sono uguali, ed F ed E uguali, sopra le girelle A, B, C le corde CB,

AB saranno tirate con uguali forze, benchè CB sia più inclinata di AB, perchè... » (MSS. Gal. Disc., T. CIX, fol. 8).

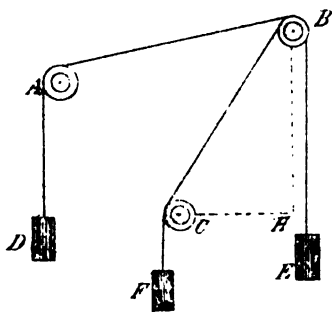



Figura 28.

Il perchè però manca: che se lo avesse il Viviani trovato, non bisognava altro per cavarlo di quell' errore, nel quale tuttavia si rimase, ingannato da varie vane apparenze. Prima di tutto si osserva che paragonare l' obliquità della forza CB, in questa figura, con l' obliquità della forza BD nella figura precedente, suppone in D un punto fisso, da rassomigliarsi alle pulegge C, A, nel qual caso è manifesto che non potrebbe sussistere l' equilibrio, se non a patto che il peso D sia uguale, e non minore di C, come suppone il Viviani.

Ma la fallacia nell' esperienza delle funi, che cavalcando più o meno oblique sulle girelle equilibrano pesi uguali, era ben assai più sottile, perchè, a veder rimanere il peso F, come il peso D, in equilibrio, si crederebbe che F e D facciano sopra E la medesima forza, ma non si pensa che l' equilibrio può tuttavia rimanere, quando la forza che perde il peso F, nel tirare il peso E in direzione obliqua, sia uguale alla diminuita resistenza, che lo stesso peso E fa all' esser tirato nella medesima direzione. Il pensiero non poteva esser suggerito da altro, che dall' uso del parallelogrammo delle forze, di cui mancava la Scienza meccanica di Galileo e del Viviani, per cui si rimase così in difetto nella statica delle pulegge semplici, mentre si dia il caso che la potenza non tiri in direzione parallela a quella della resistenza. Fra F ed E infatti permane l' equilibrio, che tra D ed E era dianzi, perchè, tirando la potenza F nella direzione obliqua BC, piuttosto che nella perpendicolare BH, tanto perde della sua forza, quanto la linea BH perde, rispetto a BC, della sua lunghezza, e il peso E dall' altra parte tanto men resiste all' esser tirato per l' obliqua BC, che per la perpendicolare BH, nella medesima proporzione.

Applicando queste considerazioni alla Macchina funicolare, rappresentata nella figura XXVII, si vede bene che, tirando il peso D obliquamente per la linea DB, piuttosto che perpendicolarmente per una linea parallela a BF, tanto perde del suo momento, quanto la BF perde di lunghezza rispetto a BD: il centro di gravità perciò non può essere in K, ma in un altro punto più vicino ad F, come argutamente avvertiva il Ricci. Il Viviani però non gli prestò fede, ingannato dalle sue esperienze, non bene intese in sè, nè bene applicate, per cui, vinto dalle difficoltà, lasciò ai Matematici, che ne avrebbero avuto notizia, l' esame e il giudizio di quelle sue fallite speculazioni. Vorremmo procedere addiritto a dire del resultato di quegli esami, e della forma di quei giudizi, ma un incidente arresta il passo frettoloso della nostra Storia.

Sparsasi per Firenze la voce che il Viviani aveva dimostrato aver le

tangenti alle secanti nel cerchio tanto maggior proporzione, quanto son di lunghezza minori, al qual teorema, per le relazioni che si diceva avere con le cose dimostrate da Galileo, si dava una grande importanza; Alessandro Marchetti, che aveva sciolti i *Problemata sex,* proposti ai Matematici di Germania e d' Italia da Cristoforo Sadlero, vi aggiunse, nel pubblicar quelle soluzioni, due teoremi geometrici, il secondo de' quali era così formulato: « Rectae circulum tangentes eo maiorem rationem habent, ad rectarum secantium portiones extra circulum, ab earumdem tangentium terminis diremptas, quo tangentes ipsae minores sunt » (Pisis 1675, pag. 45).

Disegnata la figura, come noi la reppresentiamo nella nostra 29ª, faceva osservare il Marchetti ch' essendo l' angolo AGB, nel semicerchio, acuto, e

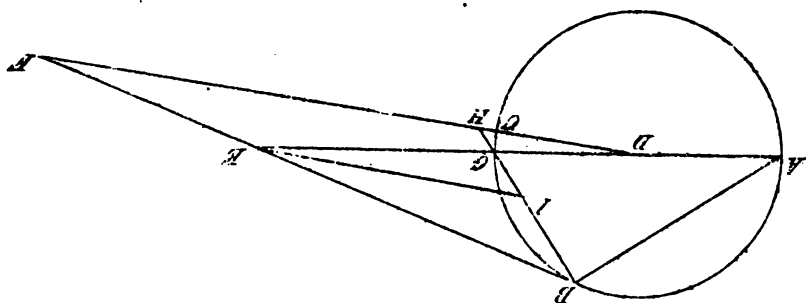



Figura 29.

perciò acuto essendo anche l' angolo EIG, il lato EG del triangolo IEG deve necessariamente esser minore del lato EI, il quale, essendo stato condotto parallelo a CF, dà motivo all' equazione $\frac{BE}{EI} = \frac{BF}{FH}$, d' onde se ne conclude che $\frac{BE}{EG}$ deve esser maggiore di $\frac{BF}{FH}$, e con tanto più ragione maggiore di $\frac{BF}{FC}$, come pure si conclude dall' Autore, con più lungo però e avviluppato discorso.

Aveva inoltre sentito dire il Marchetti che il Viviani aveva mandato al Ricci questo teorema, nel proporgli a risolvere una certa difficoltà natagli intorno all' ultima dimostrazione, posta da Galileo nel quarto dialogo delle due Nuove scienze: ond' è che, a prevenire anche in ciò, e a correre con l' emulo suo anche questo stadio della palestra, soggiungeva il Marchetti stesso al dimostrato teorema delle secanti nel cerchio il seguente ***Monito,*** stampato in lettere che, appetto alle altre del testo, si potrebbero dir cubitali: « Scias velim, amicissime Lector geometra, hoc theoremate praemisso tolli prorsus difficultatem, quae a rem saltem minus attente consideranti apponi posset uni, ex alioquin admirandis ac propemodum divinis propositionibus celeberrimi ac nunquam satis laudati Galilei, ut ipsemet, si Deus faxit, commodiore occasione planum faciam » (ibid., pag. 48).

Il Viviani che, leggendo queste parole, sentiva dare il titolo di divina a una proposizione dovuta riconoscer per falsa; che sentiva dire il teorema delle secanti e delle tangenti aver tolte le difficoltà, ch' egli anzi avea provocate, non potè tenersi, scrivendo al conte Benedetto Porro, dal dirgli che la dimostrazion del Marchetti procedeva con *molto impaccio,* e che più semplice era la sua mandata al Ricci, e divulgatasi fra i Matematici qualche mese prima della stampata nell' appendice ai *Sei problemi,* attenente senza dubbio a una proposizione di Galileo, ch' era però fra tutte le altre la men divina e ammiranda, e concludeva: « io mi do a credere che il medesimo signor Marchetti erri in Meccanica con troppa confidenza » (Nelli, Saggi cit., pag. 38).

Che la detta proposizione proceda con molto impaccio è vero, e si potrebbe anche ammettere che l' altra del Viviani abbia meno costruzione e sia più breve, quando però nessuno scrupoloso chiedesse che gli fosse dimostrato quel che il Viviani stesso teneva per evidente, che cioè, di tutte le linee condotte da un punto esterno alla circonferenza, la minima sia quella, che prolungata passerebbe per il centro. Il Marchetti però, che di tutto voleva render ragione, ebbe a spender costruzioni e parole di più, per dimostrare che la EG nella sua figura è minore di EI, dalla minoranza degli angoli nel triangolo argomentando alla minoranza dei lati opposti. Volendo esser giusti insomma convien dire che, se quella dimostrazion del Marchetti cede per una parte, supera dall' altra la dimostrazion del Viviani, ond' è che, lasciando intorno a ciò in pace i due gelosi rivali, vorremmo saper piuttosto com' intendesse esso Marchetti di spianar col suo teorema quelle difficoltà, ch' egli diceva incontrarsi da chi poco attentamente considera la divina e ammiranda proposizione di Galileo. E per rendere questi nostri desiderii anche più modesti, vorremmo sapere in che modo s' applicasse un teorema di Geometria pura a un teorema di Meccanica nuova.

Bisognerebbe, per rispondere prudentemente alla domanda, esser certi se venne al Marchetti quella più comoda occasione, che, si *Deus faxit,* si riprometteva: di che però confessiamo non avere altro documento da esibire ai Lettori, che una nostra congettura, la notizia della quale non riuscirà in ogni modo inutile in questa Storia. Venne di questi ultimi giorni ad arricchire, nella R. Biblioteca nazionale di Firenze, la preziosa raccolta dei Manoscritti galileiani, un volume che, per aver ne' suoi primi quaderni, trascritta la lettera intorno alla *Renitenza certissima dell' acqua alla compressione,* si credè che fosse del medesimo Autore, cioè di Raffaello Magiotti, anche il rimanente. Chi svolge però quelle pagine, con qualche attenzione, giudica tutto altrimenti il libro, dentro cui si leggono di Galileo e de' principali discepoli di lui varii pensieri, non raccolti da libri stampati, ma da private scritture, o dalle più approvate tradizioni orali. Tale è l' indole e il pregio dell' opera, che perciò avremo occasione di citare più volte, e non sapendo per ora come designarne meglio il manoscritto, anche noi lo chiameremo il *Magiotti.*

A tergo dunque del foglio 218 si vedono disegnate in margine le due figure, che noi riproduciamo, lasciate alcune superfluità di linee, nella 30 e 31, proposte agli studiosi lettori per illustrare il seguente teorema: « Se alla fune SBCR siano applicati i pesi S, R, e sia messa la forza in D, e ne' luoghi B, C ruote; dico che, quanto più essi pesi si alzeranno, ci vorrà sempre più forza ad alzargli, ed essi più facilmente si alzeranno, che appesi alla fune ANR, con una ruota in N, e la forza in A. »

Figura 30.

« Dimostra il Galileo che, se un capello, al quale fosser sospesi ne' luoghi S. R i globi lunare e terrestre, ed esso avesse resistenza per reggerli, la sua piccola gravità gravitando su D, alzerebbe detti globi, ed esso capello calerebbe in modo, che mai sarebbe parallelo all' orizonte, sicchè ogni poco di forza nel luogo D alzerebbe qualche poco i detti pesi. »

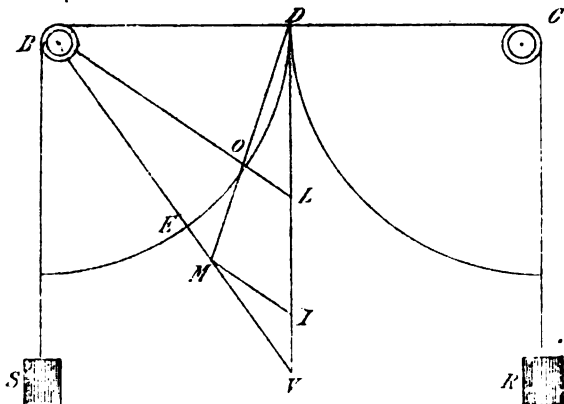
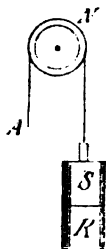



Figura 31.

« Se si tirerà una linea retta dal punto D al punto O, ed essa prolungata segherà la linea BV di sotto al punto E (perchè, se passasse per il punto L, non passerebbe per il punto O, poichè se si pigli nella circonferenza di un cerchio due punti, la linea retta che gli congiunge casca tutta dentro al cerchio) prolunghisi e seghila in M, e da detto segamento tirisi una parallela alla BL, quale segherà la linea VD. Poichè la linea BV nel punto B concorre, come sta la DL alla LO, così sta DI alla IM. E perchè l' angolo esteriore BLI è maggiore che retto, ed a lui è uguale l' angolo MIV, ed al maggior angolo si oppone il maggior lato; sarà MV maggiore di MI. E se aggiungeremo ME, DL a LO avrà maggior proporzione che DV a VE, il che si doveva dimostrare. »

Ora, domandiamo: raccolse il compilator del *Magiotti* in questa scrittura un teorema del Marchetti? La dimostrazione, come si vede, procede proprio nel modo tenuto da lui, benchè con tanto minor impaccio, da emular non solo, ma da superare per ogni lato di pregio quell' altra dimostrazione, di che tanto si pregiava il Viviani. Potrebb' essere il miglioramento introdotto nel processo dimostrativo dallo stesso compilatore, ma chiunque sia, che abbia dato opera ad applicar così le astratte linee geometriche alle corde materiali tirate da pesi, convien dire che non poteva farlo con maggior

verità di questa, confermata da quell' altra verità, certissima per le più ovvie esperienze, che cioè tanto ci vuol più di forza a tirare un carro, quanto la strada è più erta, come, nell' esempio del funicolo, è tirato in V il peso più all' erta nella direzione VB, che in L, nella direzione LB. Avrebbe ciò al Viviani, nel correre il periglioso mare più al largo, potuto servir di splendido faro, senza il quale rimasto nelle tenebre ebbe a fare invece miseramente naufragio. Le reliquie del qual naufragio, insieme con la navicella di soccorso ammannita dal Ricci, erano venute intanto alle mani di Giovan Batista Nelli, il quale, apparecchiandosi nel 1759 a darne pubblica notizia, e non sapendo per sè medesimo giudicare il caso da quel che si leggeva ne' documenti rimasti, ne volle aver consiglio con un valoroso matematico amico suo, professore nella università di Pisa.

Tommaso Perelli, al giudizio del quale fu sottoposta la lettera del Viviani, indirizzata il dì 21 Maggio 1675 a Michelangiolo Ricci, rispose che il dubbio ivi proposto faceva molto onore all' Autore, benchè si maravigliasse che un Geometra così profondo non proseguisse la speculazione, ricercando il massimo abbassamento del peso di mezzo nel funicolo, per costituirsi con gli altri due estremi in equilibrio. Questa maraviglia inopportuna incomincia a ingerirci il sospetto che il professore di Pisa esaminasse la cosa con troppa leggerezza, dicendo apertamente il Viviani, nell' atto di congedarsi dal Ricci, che *non aveva già per difficile il ritrovare quel sito de' gravi mossi, che dia il massimo abbassamento del loro comun centro sotto il primo sito,* ma che non volle mettersi a cercare più oltre, *perchè sarebbe stato superfluo, quando fosse riconosciuto falso il suo raziocinio.* (Nelli, Saggio cit., pag. 42).

Ora, non doveva far altro il Perelli che esaminare se, della verità o falsità di quel raziocinio, era giusto il giudizio del Ricci, e quand' anche non avesse ancora veduta la lettera di lui, far da buon matematico com' aveva fatto lo stesso Ricci, scoprir cioè che tutta la fallacia consisteva nello stabilire il comun centro di gravità di uno de' pesi estremi, e di quello pendente in mezzo alla fune, come se questo gravasse con tutta la libertà del suo momento. Diversamente però da questo, che il Perelli stesso avrebbe dovuto fare, lo vediamo confidente far col dubitoso Viviani consorzio di errore, e, secondando inconsideratamente il procedere di lui, supporre *due pesi qualsivoglia P, Q* (fig. 32) *legati all'estremità di una corda p A q, che passi sempre per un dato punto A, i quali pesi scorranò liberamente per due rette date di posizione, normali all' orizonte A p L, C q K* (ivi, pag. 132).

Figura 32.

Che debba il peso Q star sollevato, contro la gravità sua naturale, e *liberamente* scorrere lungo la verticale CK, è supposizione che non la farebbe nessun uomo da senno: eppure il Perelli ci sopredifica la sua dimostrazione, dicendo che, congiunti i due pesi con la linea pq, il punto G, dov'è questa linea di congiunzione segata reciprocamente alle due gravità, è il loro centro comune. Più incredibile poi è quel che soggiunge, concludendo la sua ricerca per mezzo dell'iperbola equilatera di Apollonio, che cioè il peso Q si costituisce con P in equilibrio, quando il suo abbassamento è tale, da dar la proporzione $P : Q = Aq : Cq$, quasi che per abbassarsi l'un grave, e per alzarsi l'altro mutino proporzione i segmenti fatti, nella linea di congiunzione, dalla perpendicolare BG. Che se sempre si serbano i detti segmenti proporzionali, non si comprende come un matematico del valor del Perelli potesse ammettere che due forze da equilibrarsi, le quali secondo lui rimangon le stesse, debbano una volta aver la proporzione di qG a Gp, ossia di qF ad AF, e un'altra di Aq a qC, *come d'altronde è noto per la dottrina della composizion delle forze* (ivi, pag. 123).

Che se invece di accennarla così semplicemente, avesse posta quella dottrina a fondamento della sua dimostrazione, si sarebbe il Perelli incontrato nel medesimo pensiero del Ricci, e la speculazion del Viviani, sgombrata così dall'errore, si sarebbe condotta a ritrovare il massimo abbassamento del peso nel punto dell'equilibrio, con un metodo, che avrebbe veramente fatto onore ad ambedue i Matematici, perchè insomma era quello tenuto poi, nella sua Meccanica analitica, dal celebre Lagrange. L'uso del parallelogrammo delle forze infatti fu che decise appresso gli Stranieri la controversia insorta in Italia, benchè sia cosa notabilissima che il Borelli, a cui parve fallace quell'uso, riuscisse, come vedremo in altro proposito, alle medesime conclusioni.

Possiamo di cotesti stranieri citar primo Tommaso Simpson, il quale, nella sezione XVIII del suo libro, intitolata *The application of Algebra to the solution of geometrical problems*, proponeva così il XXXVIII di quegli stessi problemi: « Let A and B (fig. 33) be two equal weights, made fast to the ends of a thread, or perfectly flexible line p P n Q q, supported by two pins, or tacks P, Q in the same horizontal plane; over which pins the line can freely slide either way; and let C be another weight, fastened to the thread, in te middle, between P and Q: now the question is to find the position of the weight C, or it's distance below the

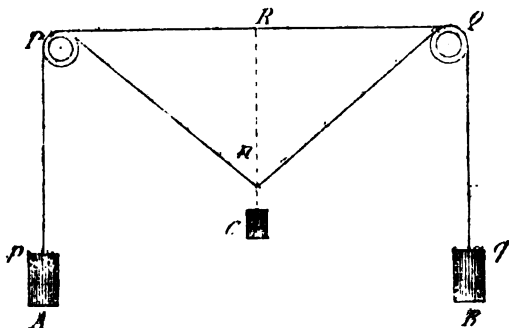



Figura 33.

horizontal line PQ, to retain the other two weights A and B in equilibrio » (A treatise of algebre, London 1767, pag. 310).

La soluzion del problema, che aveva dato a Galileo e al Viviani tanta faccenda, da non valer nonostante a salvarli dall' errore, mediante l' uso del parallelogrammo delle forze e l' analisi algebrica occorre al Simpson speditamente sicura. Chiamata x infatti la quantità incognita dell' abbassamento del peso C da R, punto di mezzo della corda PQ, in n, dove si suppone che stabiliscasi in equilibrio, e fatta PR $= a$, l' ipotenusa Pn sarà uguale alla $\sqrt{(a^2 + x^2)}$. Or se essa Pn rappresenta la forza totale del peso A, la qual forza si decomponga nelle due PR, Rn, la metà del peso C non dee resistere che a questa sola, essendo rintuzzata l' altra dalla fermezza del punto P. Sarà dunque $A : \frac{C}{2} = Pn : Rn = \sqrt{(a^2 + x^2)} : x$, ossia $2Ax = C . \sqrt{(a^2 + x^2)}$: equazione che risoluta dà $x = \frac{aC}{\sqrt{(4A^2 - C^2)}}$. Galileo poneva invece la relazione $A : \frac{C}{2} = EF : LF$, nella nostra XXI figura qui poco addietro, ingannato dal creder che i moti per la tangente e per la secante, nel medesimo tempo, fossero equabili, e che il peso di mezzo equilibrasse i due estremi col suo momento totale. Il Viviani scoprì il primo inganno, ma, benchè ne fosse avvertito dal Ricci, non riuscì a scoprire il secondo, per cui fa gran maraviglia che il Frisl, accennando, in una nota all' *Elogio del Galileo,* al problema della corda tesa in fine al quarto dialogo delle due Scienze nuove, scrivesse che *non sussiste il dubbio cavato dall' inequalità del moto de' due pesi* (Livorno 1775, pag. 83), dando così intorno al fatto, che ci ha traviato forse per troppo lungo cammino, giudizio non men leggero di quello dato già dal Perelli.

Ma non vogliamo, per quanto lunga, terminar la presente digressione, senza osservar che Paolo Casati, informato dal suo confratello Giuseppe Ferroni dei più notabili fatti, che accadevano o erano accaduti intorno alla vita scientifica del Viviani; prese parte nella questione dell' equilibrio dei pesi attaccati all' estremità e nel mezzo di una fune. Egli che credè vera la regola del parallelogrammo, e la rese contro i sofismi sicura, come si vedrà meglio a suo luogo, avrebbe potuto, prima del Simpson, rettamente risolvere il problema, e nonostante sembra rimanesse così sedotto dagli esempi del Viviani, che pensò non potersi per altra via giungere alla desiderata soluzione, che comparando la tardità dei pesi estremi che salgono con la velocità del peso di mezzo che scende. « Hanc vero, poi soggiunge, unius tarditatem cum alterius velocitate comparari non posse, nisi ex longitudine spatiorum, quae utrumque eodem temporis intervallo percurreret. Ex quo manifesta consecutione conficitur satis esse si spatiorum inaequalitas aut aequalitas ostendatur, ut praeponderatio aut aequilibritas innotescat. Ac propterea satis est secantium excessus cum tangente comparare: haec enim ponderis intermedii, illi ponderum extremorum motum definiunt » (Mechanic. libri, Lugduni 1684,

pag. 349). A far la qual geometrica comparazione aveva nel cap. precedente ordinate X proposizioni, la IV delle quali, che è il fondamento a tutto questo lemmatico apparecchio, si riscontra con quella, che il Marchetti ripeteva pubblicamente, dop' aver saputo ch' era stata dimostrata in privato dal Viviani: « Differentia inter tangentes duorum quorumlibet angulorum maior est quam differentia inter eorum secantes » (ibid., pag. 340).

Riducendoci ora dunque in via, e rammemorando ai nostri Lettori che, fatto accorto dalle critiche del Biancano, ritrovò il Viviani da correggere, specialmente nel secondo e nel quarto dialogo di Galileo, le tante altre cose, da noi notate nell' ottavo e nel nono capitolo del Tomo precedente; concludiamo il nostro discorso intorno all' opera data dallo zelante Discepolo per restituire alla sua verità la nuova Scienza del moto, e per provvedere alla gloria del venerato Maestro. A questa però, che fu l' ultima in tal soggetto, eran precedute altre fatiche, intraprese con intenzione alquanto diversa, le quali giova a noi riepilogar qui, per la final conclusione del nostro argomento.

Ne' suoi primi principii, lo studio di migliorare e di ampliare i dialoghi delle due Scienze nuove non si ridusse, per parte del Viviani, che a prender nota delle cose dettategli da Galileo, suggerendo nonostante qua e là qualche pensiero di suo, che il buon Vecchio approvava, e permetteva s' inserisse ne' Dialoghi alla prima occasione di una ristampa. Anche morto il Maestro, l' amorevole Discepolo, ch' era penetrato oramai nelle intenzioni di lui, prosegui quel primo importantissimo studio, frutto del quale si può credere che fossero le cinque proposizioni intorno al momento totale, decomposto nel descensivo e nel gravitativo di una sfera cadente lungo un piano inclinato; i teoremi relativi ai pendoli di varia lunghezza, e parecchie altre cose, che sono state qua e là notate da noi nella prima parte di questa Storia.

La qualità e la natura di così fatte speculazioni, esplicitamente uscite dalla bocca e approvate dallo stesso Autore dei Dialoghi nuovi, o implicitamente da lui consentite, non disdiceva che s' inserissero postume nella prima nuova edizione, che se ne farebbe, e lo studio del Viviani fin qui procedeva giusto con questa intenzione. Ma, quando si venne a notar gli errori, e le correzioni si trovarono superar di mole e d' importanza le aggiunte, da passar per inverosimile o turpe l' introdurre il medesimo personaggio in scena a dir poi in diverso modo, e spesso a contradire quel che, con tanta sicurezza e solennità, aveva affermato prima; allora il Viviani ebbe a mutar pensiero, e lasciando star le cose, come l' Elzevirio l' aveva stampate, o facendo nella nuova edizione sola aggiunta delle cose volute e consentite da Galileo, il rimanente, che riguardava le proposizioni non vere, e le dimostrazioni sbagliate, o che promoveva dottrine, al di là di quel che avrebbe potuto pensar l' Autore, raccogliere e stampare a nome proprio in un volume a parte. Manifestava da sè medesimo il Viviani a un amico queste sue intenzioni, con parole, da noi trascritte anche altrove (T. I, pag. 183) dicendo che *delle sue fatiche di Matematica, fatte dal 1639 al 1644, ei pensava di scegliere e di pubblicar quelle, che consistevano nell' illustrazione e promozione delle*

opere di Galileo, suo maestro, da accoppiarsi con la descrizione della sua vita.

Secondo questo proposito pochissimo cooperò il Viviani al perfezionamento de' dialoghi, quando prima occorse di ripubblicarli in Bologna, lasciandone la cura a chi egli doveva sapere esser men abile di tutti gli altri, a Carlo Rinaldini. Nè senza dubbio s'intenderebbe come le promesse giurate al venerato Maestro si lasciassero sodisfare all'editor bolognese in così indebito modo, quando non avesse il Viviani avuto il pensiero d'illustrarne in un libro a parte o di promoverne le dottrine. Com'egli attendesse alacremente all'opera, per dedicarla a Luigi XIV, e per erigere in mezzo all'aula accademica di Parigi un monumento di gloria alla Scienza italiana, e come fosse, per le rivalità del Marchetti, distolto dal mandare il generoso proposito ad effetto; è stato altrove da noi stessi narrato: cosicchè, delle tante sollecitudini, e dei tanto amorosi studii dati dall'Autore e dal suo allievo, per migliorare i dialoghi delle due Scienze nuove (da alcune in fuori delle meno importanti postille a una copia dell'edizione di Leida, inserite in carattere corsivo dall'Albèri) ha ora il pubblico, dopo più di due secoli e mezzo, in queste nostre pagine la prima notizia.

CAPITOLO II.

Del quinto dialogo aggiunto alle due Scienze nuove ossia Della Scienza delle proporzioni

---

SOMMARIO

I. Di ciò che a riformare il quinto libro di Euclide scrisse Giovan Batista Benedetti, e pensò Antonio Nardi. — II. Come Gian Antonio Rocca porgesse occasione al Cavalieri di restaurare il principio alla Scienza delle proporzioni, che poi Galileo fece mettere in dialogo. — III. Del disteso fatto dal Torricelli del quinto dialogo galileiano aggiunto alle due Scienze nuove. — IV. Del trattato torricelliano *De proportionibus,* inedito, e della Scienza universale delle proporzioni spiegate da V. Viviani.

I.

La domanda, che sovverrà naturalmente a chiunque legge l' intitolazione del presente capitolo, com' entri cioè un argomento di Geometria pura a far parte della storia della Meccanica; è quella medesima, che si saranno dovuti fare coloro, i quali ebbero prima a leggere nel libro del Viviani, dove si tratta della *Scienza universale delle proporzioni.* « Principio della quinta Giornata del Galileo, da aggiungersi alle altre quattro dei Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno alle due nuove Scienze, appartenenti alla Meccanica e ai movimenti locali » (Firenze 1674, pag. 61). Nè la risposta era difficile a darsi, anche senz' altre dichiarazioni, ripensando che del moto non si può avere scienza assoluta per noi, che ignoriamo le cause, dalle quali è prodotto: ond' è che tutto quel che possiamo sapere di lui si riduce a compararne insieme gli effetti. E perchè tali effetti ci si rivelan principalmente dal mutar luogo, che fanno i corpi, secondo certe direzioni, dalla proporzione degli spazi passati nei medesimi tempi ne argomentiamo la maggiore o minore quantità degli

impulsi. La nuova scienza perciò del Galileo non si sarebbe dovuta intitolare *De motu,* ma *De proportione motus,* come, con filosofica proprietà, la intitolava Giovan Marco: tutti i loro teoremi infatti non si conducono alla conclusione per altro matematico argomento, che per quello delle linee e delle quantità proporzionali.

Riconosciutosi dunque che la verità o la falsità di quelle meccaniche conclusioni dipende in tutto dalla savia applicazione, e dal retto uso delle proprietà geometriche, insegnate nel suo quinto libro da Euclide, era naturale che, pur non dubitando della verità delle cose annunziate da lui, restasse nei nuovi Matematici qualche cosa da desiderare intorno al modo di condurre le dimostrazioni, e all'ordine, secondo il quale si sarebbero dovute nel libro altrimenti disporre le parti. Dir quali si fossero cotesti desiderii, e ciò che s'operasse per sodisfarli, è tanta parte della storia della Meccanica, da non si dover trascurare da noi.

È oramai noto che uno dei primi e più autorevoli che, nel rinascimento della Scienza, dimostrassero alcune delle principali proprietà del moto, di cui Aristotile o non aveva insegnate le proporzioni, o l'avea date false, fu Giovan Batisia Benedetti, il quale fu perciò anche il primo che, in grazia della Meccanica, attendesse a esaminar sottilmente il quinto libro di Euclide. *In quintum Euclidis librum* infatti è il titolo di una, forse delle più brevi, ma non delle meno importanti scritture raccolte dal Matematico veneziano nel suo libro *Delle speculazioni.* Premette a cotesta scrittura l'Autore una prefazioncella, nella quale egli dice che, sebben verissime siano tutte le cose ivi insegnate dall'antico Maestro della Geometria, non possono molti nonostante non trovar difficilissime le dimostrazioni, specialmente per l'astrusità della quinta e della sesta definizione premesse al quinto Libro, dalle quali dipende l'intelligenza della massima parte dei teoremi. Non fa perciò maraviglia se tutti coloro, non eccettuato Galileo, i quali attesero poi alla riforma euclidiana, si trattennero principalmente intorno alle due dette definizioni, esercitandovisi però in vario modo e coll'esaltarle alla dignità di teoremi, e col sostituire a loro altre note meglio atte a definir la natura delle quantità proporzionali. Piacque al Benedetti di tenere altra via, non contento a riformare il libro in radice, ma nelle sue varie parti, dimostrando come molte delle proposizioni di Euclide si riducono all'evidenza di semplici postulati. « Quandoquidem iis nostris postulatis admissis, sequentia theoremata perfacillima reddentur » (Speculat. lib., Venetiis 1599, pag. 198).

Per aver tenuta questa via più larga, e assai diversa da quella de' suoi successori, fu il Benedetti, come vedremo, censurato da un giudice arguto: nessun però ha potuto negare che i XII postulati di lui non dimostrino come Euclide avesse, per più che altrettante dimostrazioni, inutilmente affaticato sè, e abusato della pazienza de' suoi studiosi. La XXII^a^, per esempio, è proposta così, secondo la versione del Commandino: « Se siano quante grandezze si vogliano, e siano altre grandezze, di numero uguali a quelle, che si piglino a due a due nella medesima proporzione; saranno ancora per la pro-

porzione uguale, nella medesima proporzione » (Urbino 1575 a tergo del fol. 73). E seguita dopo ciò la dimostrazione, non bastando la quale v' aggiunge il traduttore anche il suo proprio commento, mentre è tutto, dice il Benedetti, evidentissimo per sè nell' assioma: « Quod tota, composita ex aequali numero partium aequalium, sunt invicem aequalia » (Specul. lib. cit., pag. 198). Or chi non riconosce, soggiunge lo stesso Benedetti, in queste parole *Le grandezze uguali alla medesima hanno la medesima proporzione, e la medesima alle eguali,* le note distintissime dell' evidenza, senz' altro bisogno di dimostrazione, come fa Euclide nel suo VII teorema?

L' VIII[a] è dal traduttore proposta in questa forma: « Delle grandezze disuguali la maggiore alla medesima ha maggior proporzione che la minore: e la medesima alla minore ha maggior proporzione che alla maggiore » (Elem. Eucl. cit., fol. 68). Anche questo teorema si vuol dal Benedetti ridurre all' evidenza del seguente postulato: « Quoties plures erunt termini, quorum unus fuerit maior altero, si comparentur alicui tertio eiusdem generis, proportio maioris ad tertium illum maior erit ea, quae est minoris ad praedictum tertium: et proportio illius tertii, ad maiorem, minor erit ea, quae eiusdem tertii ad minorem terminum comparati » (Specul. lib. cit., pag. 199). Potrebbe però ad alcuno sembrare altrimenti, e dire che quella VIII[a] euclidea è bisognosa, o almeno suscettibile di dimostrazione. Se siano infatti proposte le due ragioni $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, nelle quali A sia maggiore di B, dell' esser la prima di esse ragioni maggiore della seconda si può dare dimostrazione, e dire il perchè, col farsi osservare che, essendo la medesima quantità divisa in egual numero di parti, di queste in quella prima ragione se ne son prese di più, che nella seconda. Date similmente le $\frac{C}{A}$, $\frac{C}{B}$, e rimanendo il supposto di A maggiore di B, si può dimostrar che la prima ragione è minore della seconda, perchè, in quella, l' unità è stata divisa in maggior numero di parti che in questa, e di tali parti s' è preso qua e là un numero uguale. Risponderebbe però il Benedetti all' istanza che non contengono questi discorsi una vera e propria dimostrazione, e non fann' altro se non che dichiarare come quelle due proposte verità si riducono a un principio noto per sè, senza altro mezzo. « Cum enim hae propositiones sint ita conspicuae ipsi intellectui, ut absque dubio inter obiecta ipsius intellectus connumerari possint, nullus sanae mentis eas negabit » (Specul. lib. cit., pag. 200).

Premessi i dodici postulati, passa il riformatore di Euclide a esaminare a uno a uno i teoremi del quinto libro, e una parte gli riduce ad assiomi, come s' è veduto di sopra in alcuni esempi, una parte gli approva come ben condotti, e rimanda al testo, perchè possano da sè consultarli gli studiosi: di parecchi altri poi, per restituirgli a miglior ordine logico, e a maggior chiarezza, suggerisce nuove dimostrazioni.

Chi ripensa a quei tempi, ne' quali gl' ingegni, viziati dagli istituti aristotelici, di tutto volevano dare dimostrazione, perchè la scienza apparisse,

come il Filosofo voleva, creata dalla mente dell'uomo; comprenderà l'utilità e l'efficacia di queste speculazioni del Benedetti, agl'insegnamenti del quale educatosi Galileo sentenziava: « che la più ammirabile e più da stimarsi condizione delle scienze dimostrative è lo scaturire e pullulare da principii notissimi » (Alb. XIII, 90). Avrebbero nonostante desiderato alcuni che, mettendosi il grande Matematico veneziano a riformare il quinto libro di Euclide, avesse riconosciuto che il vizio lo tiravano la maggior parte delle proposizioni dalla definizione quinta, come da maleficiata radice, senza risanar la quale reputavano che non si potesse condur l'opera alla desiderata perfezione.

Uno di cotesti censori del Benedetti era quell'Antonio Nardi, le matematiche speculazioni del quale, tanto ammirate dal Torricelli e dal Cavalieri, son rimaste per la Scienza italiana sventuratamente tesori nascosti. Il Nardi dunque, ingegno veramente geometrico, aveva dovuto qua e là notare alcuni difetti nello studiar l'unico libro, che s'avesse allora da mettere innanzi a chi voleva imparare i primi elementi della Geometria, e di quelle note di lui s'è potuto aver notizia, perchè inserite, fra le *Varie osservazioni geometriche,* nella veduta ottava della sesta *Scena.*

« Nel primo degli Elementi euclidiani, ivi si legge, pongonsi imperitamente tra le domande pratiche due comuni notizie speculative, il che è errore. Anche nel VI libro trovasi, sotto il numero V, una definizione, quale è dimostrabile; e devesi così apportare: *La ragione di due grandezze resultar dicesi di tante ragioni, di quante tra quelle grandezze ne stanno.* Tal definizione poi risponde alla decima del V°, ove tal definizione non sta ben posta, ma va nel VI°. Servesi anche Euclide alcune volte del nome di *piramide,* in cambio di quello di *tetraedo,* il che par cosa licenziosa in uno *Elementario.* »

« Se riceviamo doversi dir parte una grandezza di grandezza omogenea, riceveremo anche che, se la prima della seconda, o questa di quella, sia sol parte, che la terza della quarta o questa di quella; sarà la prima alla seconda, nella disegual proporzione, come la terza alla quarta; ma nella eguale bisogna che la prima s'agguagli alla seconda, e la terza alla quarta. Incamminandoci per tale strada, potremo adoprarci in diversa maniera intorno alla economia del V° di Euclide, ma per esser ciò opera lunga, ci basti l'averne posti i principii. »

« Euclide restrinse il nome di parti alla quota: noi prendiamo generalmente, col nome di parte, la quota, le quote e l'incommensurabile al tutto, da che forse schivasi l'oscurità di qualche definizione del quinto suddetto, benchè altre difficoltà qui s'incontrino. »

« Non si accorse il dottissimo Commandino che una comune notizia, della quale Euclide si serve nella prima del X°, anche nella ottava del V° aveva per prima avuto luogo, e così non la notò detto Interpetre, come doveva, dopo la definizione del V°, ma dopo quella del X°. »

« Osservo che il dottissimo Commandino s'addormentò nella decima proposizione del IV° euclidiano, perchè, dovendo da Teone tradurre le parole

greche *quae non est maior,* traduce *quae non sit maior,* e così portò una condizione ridicola, non che superflua alla costruzione. »

« All' ottava definizione dell' XI° di Euclide suppliscasi, di mente dell' Autore, *prodotto per ogni banda.* La IX^a, la X^a e XI^a dello stesso libro non patiranno difficoltà, se il subietto prendasi come predicato, il che comodamente far puossi, anzi devesi, per la proprietà della lingua greca, nè hanno ciò avvertito gl' Interpetri. »

« Osservo che le quattro grandezze proporzionali, definite nel V° con la moltiplicazione, si possono anche, con la divisione, definire, e l' un metodo, nell' operazione, riscontrasi con l' altro » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 844, 45).

Questi, come si vede, eran pensieri che il Nardi frettolosamente scriveva in distinte note, via via che gli sovvenivano alla mente, e che poi volle raccogliere insieme nella citata Scena. Da quei frettolosi pensieri però balena chiaro il concetto della particolar riforma del quinto libro euclideo, il quale si risonosce radicalmente viziato dall' essere, in quinto luogo, mal definite dall' Autore le condizioni, che fanno consister fra loro quattro quantità omogenee proporzionali. Quella quinta definizione infatti è tale, secondo le parole che il traduttore premette al quinto libro: « Le grandezze si dicono essere nella medesima proporzione, la prima alla seconda e la terza alla quarta, quando le ugualmente moltiplici della prima e della terza, ovvero insieme avanzano le ugualmente moltiplici della seconda e della quarta, secondo qualsivoglia moltiplicazione; ovvero insieme le pareggiano; ovvero insieme sono avanzate da loro » (Elem. Eucl. cit., fol. 63).

Esaminando bene questo discorso è facile trovare che si riduce alla forma seguente: Siano date le due relazioni $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$: si vuol assegnare uno dei più facili, e de' più distinti caratterismi, che ce le faccia riconoscere, quando sono fra loro uguali. Euclide in sostanza risponde: quando, moltiplicate per la medesima quantità, la quale sia per esempio $\frac{N}{M}$; si mantengono uguali. Ma perchè in dir così troppo manifesto apparirebbe il paralogismo, consistente nel dare il segno da riconoscere un' eguaglianza, mentre implicitamente supponevasi già nota; si raggirano in altre parole le medesime cose, dicendo che quattro quantità sono allora proporzionali, quando i prodotti A . N, C . N, ossia gli equimolteplici delle due antecedenti s' accordano sempre in superare, eguagliare e mancare co' prodotti B . M, D . M, ossia con gli equimolteplici delle due conseguenti.

Ora il Nardi scopriva il paralogismo anche sotto questo discorso, così artificiosamente condotto, vedendo chiaro che, per moltiplicare in qualunque modo, e secondo qualunque moltiplicazione, i termini, non verrebbero però le due relazioni ad acquistare quella uguaglianza, che non avessero avuto prima: intanto che ne concludeva non dover esser quella euclidea definizione legittima, perchè applicabile indifferentemente anche alle quantità non proporzionali. Soggiungeva di più non sembrargli quella stessa definizione nem-

meno universale, perchè: supponiamo di avere l' angolo retto, che chiameremo A, misurato dal quadrante Q del cerchio, di cui R sia il raggio: le ragioni A : Q e 2 : Rπ sono senza dubbio uguali, ma benchè gli equimolteplici degli antecedenti si possano accordare facilmente insieme nel mancare e nell' eccedere i conseguenti, non si accorderanno in eterno nell' eguagliarsi, essendo la circonferenza e il raggio incommensurabili. Simile dicasi del lato del quadrato e della diagonale, perchè, chiamata questa D, e quello L, che supponesi essere uguale a 5, D : L, e $\sqrt{50} : \sqrt{25}$ stanno insieme in vera e propria proporzione, benchè il carattere della loro proporzionalità non si possa, per la dottrina degl' incommensurabili, desumer dalla regola degli equimolteplici euclidei.

Sembravano al Nardi queste cose tanto evidenti, che si maravigliava come non l' avessero avvertite que' così grandi Matematici dell' antichità, quali erano Archimede, Pappo e simili altri. Ben però più si maravigliava che, nel dar mano così valida a restaurare la scienza, non le avesse avvertite il Benedetti, per cui soggiungeva ai sopra scritti pensieri anche il seguente, ch' egli poi raccoglieva fra gli altri nella medesima Scena:

« Il Benedetti, geometra insigne, non si accorse che, volendo riformare il quinto libro di Euclide, trascurò le definizioni delle uguali e diseguali ragioni, quale principio è il fondamento dell' opera. Stupiscomi certo di tanta inavvertenza. »

« Mentre io sento dirmisi che siano quattro quantità proporzionali, le estreme siano maggiori delle mezzane, resto sospeso fino a che non ne faccia il conto nei numeri noti, ed allora ragionevolmente desidero d' intenderne la dimostrazione, perchè l' induzione, e meno l' esempio, non appagano l' intelletto contemplativo. Che se mi si proponga due quantità uguali aver la stessa proporzione ad una terza, non solo l' intendo, ma vedo esser difficile l' insegnar, con mezzi più facili ed evidenti di quello che sia la proposta, tal verità. Euclide per insegnarmela assume la definizione quinta nel V°, qual' è molto più difficile ad intendersi che non è la proposta: onde tal definizione rende oscure tutte le prove, nelle quali direttamente s' adopra. »

« Ciò nondimeno poco m' importerebbe, ma trovo qualche difficoltà per mantenerla legittima. Dico dunque parermi che quella definizione convenga ancora alle quantità non proporzionali, il che sarebbe difetto importantissimo. Sia qualsivoglia numero A il primo termine, e qualsivoglia numero B, minore, il secondo: il terzo sia l' angolo retto, e il quarto l' angolo nel mezzo cerchio. Certo che questi due angoli moltiplicati si possono superare scambievolmente, onde hanno proporzione insieme, conforme anche ricerca Euclide nella quarta definizione. Ora dico che, presi gli equimolteplici del primo e del terzo termine, in qualsivoglia modo, e così anche del secondo e del quarto, avverrà che, se uno antecedente superi o manchi dal suo conseguente, anche l' altro supererà o mancherà dal suo, secondo qual si voglia moltiplicazione, nello stesso modo. »

« Che se per il primo termine prendessimo R^ce^ 50, per il secondo R^ce^ 25,

per il terzo la diagonale del quadrato, per il quarto il lato dello stesso; in questo caso, posti gli equimolteplici del primo e del terzo e del secondo e del quarto, avverrà che se uno antecedente superi o manchi dal suo conseguente, anche l' altro superi o manchi dal suo. È ben vero che, quantunque sian proporzionali la diagonale e il lato, come R^ce^ 50 e R^ce^ 25, non però giammai avverrà che i molteplici degli antecedenti uguaglino i molteplici dei conseguenti, com' è noto per la dottrina degli incommensurabili: e lo stesso avviene, nel caso dell' angolo retto e del mezzo cerchio, e dei loro molteplici e corrispondenti. Non è dunque necessario, secondo la definizione di Euclide, che le cose proporzionali si possano sempre, mediante la moltiplicazione, agguagliare, altrimenti non sarebbe universale a tutte le proporzionali detta definizione. »

« Avvezzati, o mio Lettore, a bene esaminare i detti, benchè comunemente ricevuti per veri, dei grandi uomini, e frattanto, in difesa di Euclide, dico ch' egli aveva bisogno di definire le quattro proporzionali con qualche caratterismo, per poterle, nelle operazioni geometriche, riconoscere dalle non tali: onde il definirle generalmente esser quelle, che hanno lo stesso rispetto, secondo la quantità, non bastava al suo proposito. Ciò supposto, piacemi che alla definizione da esso data basti solo, negli scolii, aggiungere di mente sua che gli eccessi o difetti della prima verso la seconda, e della terza verso la quarta, sieno capaci di proporzione: cioè che moltiplicati possano superare la seconda e la quarta, come vedesi volere Euclide nella ottava proposizione del V°, dove dichiara il senso di questa definizione, e così togliesi ogni difficoltà. Vediamo ancora che Euclide propone lo scambiamento di ragione, come indistintamente valido, nella X proposizione: eppure di mente sua bisognava supplire che i termini, che si scambiano, siano di proporzione capaci, altrimenti egli c' insegnerebbe il falso » (MSS. Gal., T. XX, pag. 846-48).

L' apparire ora queste così savie osservazioni del Nardi, dopo più che due secoli e mezzo, alla luce, conferisce a farci meglio conoscere l' indole di quell' ingegno, in mezzo ai tanti altri che, pur non essendo meno acuti di lui, s' eran resi però meno franchi dall' altrui suggezione. Il Benedetti, che sentì primo alitarsi in petto questo nuovo spirito di libertà, mostrò nel presente esempio d' esser rimasto avvinto in qualche parte a quel giogo, per cui non sospettò che potesse il grande Euclide essere scorso in un paralogismo, di che mostrava non essersi accorto nemmeno il grandissimo Archimede. Galileo pure passò inconsideratamente, com' apparirà dal processo di questa Storia, sopra quelle medesime fallacie, attraverso alle quali lo avevano confidentemente menato i suoi antichi Maestri, ond' ebbe il Nardi il merito di averle egli avvertite e scansate il primo, come prezioso frutto di quel che avendo già sapientemente deliberato per sè medesimo, dava poi agli altri qual' utile consiglio: *Avvezzati, o mio Lettore, a bene esaminare i detti, benchè comunemente ricevuti per veri, dei grandi uomini.*

Che veramente poi le frettolose osservazioni, raccolte dal Matematico aretino nella sua Scena, contengano, per la riforma del quinto libro di Euclide, i necessari principii, che ivi dice l' Autore di non si voler mettere a svol-

gere, *per esser ciò opera lunga;* apparirà manifesto da quel che saremo per dire di quella medesima opera, eseguitasi nel medesimo tempo dal Cavalieri, e pubblicatasi poi da Galileo, nella prima parte di quel quinto dialogo aggiunto alle due Scienze nuove, dove si pongono dal Salviati i primi fondamenti della detta riforma, null' altro più facendo, nè potendosi per verità fare secondo il retto giudizio, che svolgere la fondamental proposizione accennata dal Nardi.

Consisteva questa proposizione nello stabilir di fatto le condizioni di quelle uguaglianze, che Euclide dava il segno di riconoscer per tali a chi egli supponeva già che fossero note, dicendo, tutt' altrimenti dal venerato idolo antico, essere allora quattro termini proporzionali, quando il primo sia tanta parte del secondo, quanta il terzo è del quarto. Così venivansi ai molteplici opportunamente a sostituire i divisori, e sopra così ben posto fondamento faceva osservare lo stesso Nardi come quel che suppone Euclide potevasi dimostrare, trasformandosi la sua quinta definizione in teorema. Se A infatti sta a B, come C a D, anche A . N starà a B, come C . N a D; e ancora starà A . N a B . M come C . N a D . M: ciò che conclude come, essendo gli equimolteplici proporzionali, sono altresì in proporzione i semplici termini respettivi.

Coloro, i quali non sono avvezzi come noi, dietro i savi consigli del Nardi, a bene esaminare i detti, benchè comunemente ricevuti per veri, dei grandi uomini; e che anzi, fedel copia vivente dei peripatetici antichi, tengono che una matematica proposizione sia vera, perchè è scritta nei libri di Galileo, e vogliono sopra più non esserci verità, che sui principii del secolo XVII non avesse il divino uomo scoperta, e annunziata agli altri uomini, giacentisi nelle tenebre universali dell' ignoranza; si vedrebbero aver già levate sospettosi le orecchie, in parer che s' incammini a provare il nostro discorso che quei, ch' essi venerano qual secondo Maestro di coloro che sanno, sia stato prevenuto nello stabilire la nuova Scienza delle proporzioni. Noi confermiamo che fu veramente così, com' è intanto provato rispetto al Nardi, che doveva verso il 1635 avere scritte le sue osservazioni, all' esempio del quale resta a soggiungere come s' incontrasse in quel tempo nel medesimo pensiero anche il Cavalieri, andato perciò poi soggetto a un' altra usurpazione, dalla quale vogliamo che vengano ora finalmente a rivendicarlo, per solo amor di giustizia, il sincero giudizio, e la libera coscienza della Storia.

II.

Noto principalmente per la solenne pubblicazione, che il Torricelli faceva, a pag. 77 della seconda parte delle Opere geometriche, di un teorema di lui; Gian Antonio Rocca, gentiluomo di Reggio, fu uno dei più valorosi discepoli del Cavalieri. Dalla lettura dei dialoghi dei due Massimi sistemi,

quando non erano venuti ancora alla luce gli altri delle due Scienze nuove, apprese i primi principii della Meccanica, e lo Specchio Ustorio del suo proprio maestro gli porgeva gli esempi del modo, come si potessero, con la Geometria nuova, illustrare e promovere quegli stessi principii galileiani. Non trovando, fra le altre conclusioni annunziate nel detto dialogo Del mondo, nulla che si riferisse ai moti equabili, dai quali dipendono, e con i quali si paragonano le altre specie di moti, volle egli medesimo applicarvisi, incerto s' egli fosse per supplire al difetto, o per prevenire l' apparizione di ciò, che nel suo nuovo trattato sarebbe per dimostrare lo stesso Galileo. Comunque sia, erano già da Archimede, nella prima proposizione Delle spirali, posti alla nuova Scienza, che s' intendeva di instaurare, i principii, e non restava a far altro al Rocca, se non che a svolgerli, perchè gli venissero di lì ritrovate le conseguenti proprietà dei moti uniformi.

In quella prima proposizione dunque Archimede vuol dimostrare il teorema fondamentale, che cioè, essendo le velocità uguali, gli spazi stanno come i tempi. Per far ciò suppone che il mobile P (fig. 34) inceda equiveloce nella

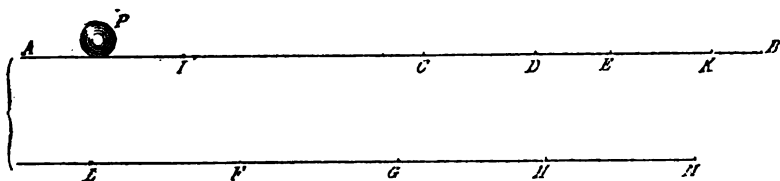



Figura 34.

direzione AB, e dato che lo spazio CD sia passato nel tempo FG, e lo spazio DE nel tempo GH, conclude il suo intento col provar che CD, DE e FG, GH son quattro termini proporzionali. Il mezzo per la dimostrazione doveva esser perciò suggerito dalla Geometria pura, al maestro della quale rivolgendosi Archimede, e trovando essere da lui insegnato che quattro termini sono allora proporzionali, quando gli equimolteplici degli antecedenti s'accordano sempre in mancare o in uguagliare o in superare gli equimolteplici dei conseguenti, non credè il grande Siracusano che restasse a lui da far altro, se non che a dimostrare come presi IC, LF equimolteplici di CD, FG, ed EK, HM equimolteplici di DE e di GH, si verificassero esattamente nel suo caso le condizioni, per le proporzionalità, richieste da Euclide « Quoniam FG, così David Rivault ne traduceva dal greco le parole, tempus est quo P cucurrit CD, et quoties est CD in IC, toties est FG in LF, sequitur, quia motus puncti P est uniformis, esse LF tempus, quo eadem celeritate punctus P decurrerit IC. Eadem ratione est HM tempus, quo inambulaverit idem P spatium EK. Proinde, si IC superaverit EK, similiter LF superabit HM. Et si IC defecerit ab EK, deficiet quoque LF ab HM. Demum si aequalis fuerit IC alteri multiplici EK, etiam LF aequabitur tempori HM. Est propterea CD ad DE ut FG ad GH, ut proponebatur » (Parisiis 1615, pag. 353).

Archimede procede oltre a proporre in secondo luogo che, essendo i

tempi uguali, le varie velocità, con le quali incedono due mobili diversi, stanno come gli spazi, e supposto che N per esempio (fig. 35) passi nella direzione AB gli spazi AE, EG, mentre O nella direzione CD passa gli spazi CF, FH; conclude il proposito col dimostrare che AE sta ad EG, come CF a FH. Per far ciò, essendo, egli dice, per supposizione AE, CF ed EG, FH scorsi nei medesimi tempi, siano questi stessi tempi rappresentati da IK, KM: avremo dunque, per la proposizion precedente, AE : BG = IK : KM. « Atqui etiam CF est ad FH, ut IK ad KM; ergo ut AE ad EG, sic CF ad FH, quod fuit probandum » (ibid.).

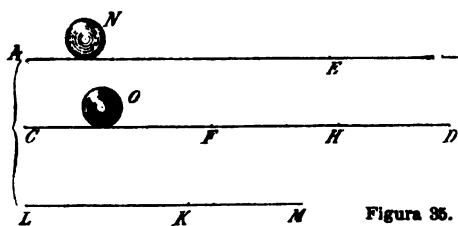



Figura 35.

S' arresta a questo punto il progresso archimedeo Dei moti equabili, perch' era sufficiente all' Autore il premettere questi due soli teoremi, come lemmi, per dimostrare, ciò ch' era allora la sua principale intenzione, le mirabili proprietà delle spirali. Volle il Rocca proseguir l' opera del Siracusano, e dall' aver sull' esempio di lui dimostrata la prima legge fondamentale, che governa i moti uniformi, ne concludeva, non solo che, essendo i tempi uguali, le velocità stanno come gli spazi, ma di più che, essendo gli spazi uguali, si rispondono contrariamente le velocità con i tempi; che, essendo le velocità e i tempi differenti, in ragion composta di loro stanno gli spazi passati; che, se sono le velocità e gli spazi disuguali, nella contraria ragion del loro composto si rispondono i tempi: con altre simili proprietà, che l' esperto Matematico vedeva conseguire dai medesimi principii.

Aveva il Rocca disposti in ordine di trattato questi teoremi, della legittima dimostrazion dei quali non dubitava, quando fosse stato certo della buona dimostrazione del primo, che procedeva, come s' è detto, per l' applicazione degli equimolteplici a dimostrar le proporzionalità, secondo gl' insegnamenti di Euclide, e sopra gli esempi dello stesso Archimede. Intorno a quegli equimolteplici però, e non in altro, incominciarono i dubbi a tenzonar forte nella solitaria mente del Rocca, perchè da una parte gli pareva chiaro, per la sua propria ragione, che non fossero nè ben definite, nè ben dimostrate le quantità proporzionali a quel modo; e dall' altra lo atterrivano le grandi autorità dei Matematici antichi, i quali concordemente lo avevano approvato. Per quietar la sua penosa agitazione ebbe ricorso al Cavalieri, a cui, mandando il trattatello *Dei moti equabili,* gli esponeva anche insieme le ragioni, che lo avevano fatto così dubitare e della quinta definizione euclidea premessa al quinto libro degli Elementi, e dell' applicazione, che ne aveva fatta Archimede nella prima Delle spirali.

Il Cavalieri, attentamente esaminando nei citati libri le cose, non solo ebbe a convenire col Rocca, ma, persuaso di più che il trattato Dei moti

equabili si rimaneva a quel modo senza il suo legittimo fondamento, cominciò a pensare, in grazia del suo discepolo e avutane occasione da lui, secondo qual più vero e più noto carattere si potessero definire le ragioni proporzionali. Così di pensiero in pensiero procedendo, gli venne fatto di trovare il modo, com' egli avrebbe creduto si dovesse emendare il quinto libro di Euclide, specialmente in quelle proposizioni, che rimanessero viziate dalla quinta definizione. Nè, essendo la verità una sola, farà punto maraviglia ch' ei si fosse incontrato col Nardi, così in definire l' uguaglianza di due ragioni dalla eguaglianza dei loro quozienti, come in ridurre la detta quinta definizione a teorema da dimostrarsi.

La novità e l' importanza della pensata riforma euclidea allettavano così l' animo del Cavalieri, che, essendo in sul punto di terminar la stampa della Geometria degl' indivisibili, deliberava fra sè di coglier quell' occasione, che gli si porgeva così comoda e pronta di pubblicare que' suoi pensieri intorno alle proporzioni, come cosa anch' essa geometrica, in appendice ai sette libri della detta Geometria. L' argomento però e l' indole dell' aggiunta troppo essendo diversi dal subietto, aveva pensato di dar a quella anche abito diverso, mettendola in dialogo fra uno che insegna, e l' altro che ascolta. Il pensiero d' imitar Galileo, anche nell' estrinseca forma del discorso, s' appresentò forse la prima volta alla mente del Cavalieri a quella occasione, benchè cominciasse ad effettuarlo solo alquanti anni dopo, e in altro proposito, quando a Benedetto Castelli e a Cesare Marsili, che nel dialogo della riforma di Euclide avrebbero rappresentato il Salviati galileiano e il Sagredo, v' aggiunse terzo un Simplicio, applicando la goffa maschera di lui, per vendetta, sulla faccia al Guldino.

Non volle però mettersi il Cavalieri a colorir quella scena, senz' averne prima consulto con Galileo, da cui, prima di tutto, voleva sapere se la quinta definizione di Euclide stava a rigor di logica, e se, avendo bisogno di correzione, poteva farsi a quel modo, che si proponeva: poi voleva saper di più se convenisse pubblicar la scrittura sopra tale argomento in appendice alla nuova Geometria. Distese perciò que' suoi pensieri senz' alcuno ornamento, e solo, per render poi più docile la materia a improntarsi del dialogo, quando fosse deciso di pubblicare il suo discorso; distinse i punti delle proposte e delle obiezioni, delle domande e delle risposte. Dettava poi le cose, scritte così alla buona a un amanuense, il quale, trascrivendo com' egli stesso e il dettator pronunziavano, venne a farne una copia da spedirsi a Galileo, la quale, per la sola ortografia, anche senz' altri indizi, tradiva l' origine propria.

Fu fatta la spedizione *da Bologna alli 19 Dicembre 1634,* accompagnando il Cavalieri il plico con una lettera, la quale così finiva: « Di grazia mi favorisca dirmi qualche cosa della mia Geometria, e se resta sodisfatto o no liberamente delle mie risposte. Scrivo con fretta, perciò mi scusi della negligenza nello scrivere, e ciò, per avere io voluto trascrivere un pensiero intorno alla definizione V^{a} del quinto di Euclide, quale le mando per sentirne il suo parere. È cosa fatta a richiesta di un giovane studioso. Se le pa-

resse cosa buona, avrei pensiero di metterla nel fine della mia Geometria, ma desidero sentir prima il suo parere » (Campori, Carteggio galil., Modena 1881, pag. 423).

La nostra curiosità fu eccitata dalla lettura di queste parole a ricercar lo scritto mandato a Galileo, di cui il Cavalieri qui fa motto, e sembrandoci di averlo trovato, almeno in parte, lo trascriviamo, assoggettando noi e i nostri lettori al tedio di serbare i solecismi, e la scorretta grafia dell'originale:

« Nella dimostrazione di un certo Autore apportando nella prima proposizione *del moto equabile* l' operatione delli *egualmente moltiplici*. questo a data occasione dessaminar la 5ª e 7ª definizione di Euclide. »

« Hora per espianar la strada quanto serra possibile alla introductione delle *proporzionalità*. suppongasi primieramente (come suppose anche Euclide mentre le definì) che le grandezze proporzionale se trovino, cioè che date in qualunque modo 3 grandezze quella proportione o quel rispetto o quella relazione di quantità che ha la 1ª verso la 2ª l' istessa possa haver la 3ª verso una 4ª. »

« Hora per averne una definitione vera bisogna prendere una delle lor passioni, ma la più facile de tutte del quale se puol poi cavar le più recondite. Perchè la diffinitione già ditta d' Euclide in questa maniera è troppo imbrolliato: Allora 4 grandezze sono proporzionali quando gl' egualmente moltiplici della 1ª e della 3ª presi secondo qualunque moltiplicità si accordano sempre nel superare mancare o paregiare gl' egualmente moltiplici della 2ª e della 4ª *. »

« *Obs.* — (Chi habbia certezza che allora quando 4 grandezze sono proporzionali gl' egualmente moltiplici non si accordino sempre? Overo chi me assicurà che quelli egualmente moltiplici non si accordino sempre e che nulladimeno le grandezze non siano proporzionale? »

« Già Euclide nella precedente deffinitione haveva deliberato la proporzione tra due grandezze essere un tal rispetto o relazione tra di loro per quanto appartiene alla quantità. Hora avendo il lettore concepito già nel intelletto che cosa sia la proporzione fra due grandezze sarà difficile cosa che egli possa intendere che quel rispetto o relatione che è fra la 1ª e la 2ª grandezza allora sia simile al rispetto e relatione che si trova fra la 3ª e 4ª grandezza, quando quelli egualmente moltiplici della 1ª e della 3ª si accordano sempre nella maniera predetta con glegualmente moltiplici della 2ª e della 4ª. »

« E perchè questo di Euclide è piuttosto theorema da dimostrare che una definitione da premettersi. »

« * Diremo noi allora 4 grandezze esser fra loro proporzionale, cioè haver la 1ª alla 2ª la stessa proportione che la 3ª alla 4ª quando la prima sarà eguale alla 2ª e la 3ª alla 4ª. Overo quando la 1ª sarà tante volte moltiplice della 2ª quante volte precisamente la 3ª è moltiplice della 4ª. »

« Similemente sono le grandezze proporzionale quando la 1ª contenga 3 volte $1/2$ per essempio la 2ª et anco la 3ª contenga 3 volte $1/2$ la 4ª, e finalmente in qualsivoglia altra denominatione mentre le grandezze siano propor-

zionale. e perciò diremo con maggiore universalità tutto già stabilito. cioè allora intendiamo 4 grandezze esser fra loro proporzionale quando l'eccesso della 1ª sopra la 2ª (qualunque egli sia) sià simile all' eccesso della 3ª sopra la 4ª. »

« Questo s' intende quando gli antecedente sono maggiore delle lor conseguente ma in caso che la 1ª sia minore della 2ª e la 3ª della 4ª alhora sarà la 2ª maggiore della 1ª e la 4ª della 3ª. Però consideri con quest'ordine inverso e simagini che la 2ª sia 1ª e la 4ª sia 3ª. Così haverà sempre le antecedente sempre maggiore delle conseguente e laccennata diffinitione basta. »

« Hora considerandò le antecedenti maggior delle lor conseguenti diremo 1° per diffinitione in che maniera s' intende le 4 grandezze esser fra loro proporzionali et è questa. Quando la 1ª per avere alla 2ª la medesima proportione che la 3ª alla 4ª non è punto nè maggior nè minore di quello che ella dovrebbe essere. allora s' intende aver la 1ª alla seconda la medesima proporzione che ha la 3ª alla 4ª. »

« Con questa occasione definirei con modo assai simile la proportione maggiore e direi così. Ma quando la 1ª grandezza sarà alquanto più grande di quel che ella dovrebbe essere per avere alla 2ª la medesima proportione che ha la 3ª alla 4ª. allora voglio che convenghiamo di dire che la 2ª habbia maggior proportione alla 2ª che non ha la 3ª alla 4ª. »

« Ma in caso che la 1ª sia minor di quel che si ricercherebbe per avere alla 2ª quella medesima proportione che ha la 3ª alla 4ª sarà segno evidente che la 3ª è maggior del dovere per havere alla 4ª quella tal proportione che ha la 1ª alla 2ª. Però in questo caso ancora V. S. si contenti di concepir l' ordine in altro modo e simmagini che quelle grandezze che erano 3ª e 4ª diventino 1ª e 2ª. e quell' altre che erano 1ª e 2ª V. S. le riponga nei luoghi della 3ª e della 4ª. »

« *Obs.* — Bene. adunque dimostrate con questi suoi principi tutto il 5° di Euclide. overo di dedurre da queste due diffinitione poste da V. S. quelle altre due che Euclide mette per 5ª e per 7ª che sustengano il machina del 5° libro. hora dimostrate queste come conclusioni. »

« *Sol.* — Quando le 4 grandezze sono proporzionali glegualmente moltiplici della 1ª e della 3ª eternamente concordino etc. se poterà entrar senza scorta al 5° libro a intendere i theoremi delle grandezze proportionali. E così posta la definizione della proportione maggiore dimostrarò che in qualche caso presi glegualmente moltiplici della 1ª e della 3ª et anco della 2ª e della 4ª quel della 1ª ecceda quel della 2ª ma quel della 3ª non ecceda quel della 4ª. Così questa conclusione serra la definitione della quale come principio si serve Euclide. »

« *D.ª* — Quando io restassi persuaso di queste dua passioni deglegualmente moltiplici cioè che quando le 4 grandezze son proportionali quelli eternamente si accordano nel paregiare eccedere e mancare. e che quando le 4 grandezze non son proportionali quelli in qualche caso discordano io per me non ricercherei altra luce per intendere con chiarezza tutto il 5° degli Elementi geometrici. »

« *Ris.* — Supponiamo che le 4 grandezze A, B, C, D siano proportionali cioè che la 1ª A alla 2ª B habbi l' istessa proportione che la 3ª C ha verso la 4ª D. credete che anco due della 1ª verso la 2ª averanno la medesima proportione che due della 3ª verso la 4ª? »

« Adunque intenderà anco con questo che 4 o 10 o 100 delle 1me ad una 2ª averanno listessa proportione che hanno 4 o 10 o 100 della 3ª ad una 4ª. »

« Adunque è necessario che il moltiplice della 1ª abbia listessa proportione alla 2ª che ha legualmente molteplice della 3ª alla 4ª cioè che la 1ª moltiplicata quante volte si pare abbia alla 2ª quella proportione istessa che ha la 3ª moltiplicata altrettante volte verso la 4ª. »

« Questo è per le antecedenti. ma per le conseguenti credete voi che date 4 grandezze proporzionali che la 1ª a due della seconda abbia proporzione diversa da quella che ha la 3ª a due della 1ª overo a 4 o a 10? »

« Ammettendo dunque voi questo confessate di restare appagato e dintendere con facilità che date 4 grandezze proporzionale A, B, C, D moltiplicate egualmente la 1ª e la 3ª quella proportione che ha il molteplice E della 1ª A alla 2ª B listessa ancora habbia precisamente la egualmente moltiplice F della 3ª C alla D. »

$$\text{« } E - \underset{1}{A} \quad \underset{2}{B} - G \text{ »}$$

$$\text{« } F - \underset{3}{C} \quad \underset{4}{D} - H \text{ »}$$

« Immaginatevi dunque che queste siano le nostre 4 grandezze proporzionali E, B, F, D cioè il molteplice F della 3ª sia 3ª e la 4ª D sia 4ª V. S. me ha anco detto di capire che moltiplicandosi egualmente le conseguenti B, D cioè la 2ª e 4ª senza alterar punto le antecedenti la medesima proportione averà la 1ª al moltiplicato della 2ª che ha la 3ª al moltiplicato della 4ª. Ma queste 4 grandezze saranno per appunto E, F egualmente molteplice della 1ª e della 3ª e G, H egualmente molteplice della 2ª e della 4ª. » (MSS. Gal., P. V, T. V, fol. 81-83).

Attentamente rimeditate queste cose, e così com' erano Galileo ritrovatele vere, a predispor l' animo dei nostri Lettori, curiosi già di sapere qual risposta si facesse al Cavalieri, giova osservar come doveva aver l' argomento una particolare importanza per lui, il quale, benchè non avesse ancora pubblicato il terzo dialogo delle Scienze nuove, teneva pure fra i manoscritti disteso, parecchi anni prima del Rocca, il trattatello dei moti uniformi. Il primo principio della scrittura venutagli da Bologna gli aveva fatto rivolgere il pensiero a quel suo trattatello, per la buona dimostrazione, se non per la verità del quale, ebbe allora a sentire una gran trepidazione, quando s' abbattè ivi a leggere le parole: *chi mi assicura che quelli egualmente moltiplici non si accordino sempre e che nulladimeno le grandezze non siano proporzionali?*

A ben comprendere i sentimenti di Galileo convien osservare che i due

primi teoremi *De motu aequabili,* fedelissima imitazione delle due prime proposizioni archimedee delle Spirali, concludono la proporzionalità fra gli spazi e i tempi, essendo le velocità eguali, e la proporzionalità fra le velocità e gli spazi, essendo uguali i tempi, per l'applicazione degli equimolteplici. « Sunt itaque quatuor magnitudines.... ac demonstratum est aeque multiplicia primae et tertiae vel una aequari vel una deficere, vel una excedere aeque multiplicia secundae et quartae. Ergo prima ad secundam eamdem habet rationem quam tertia ad quartam » (Alb. XIII, 151). Or era venuto il Cavalieri, in quelle sue carte, a far osservare che si posson bene gli equimoltiplici contenere fra loro a quel modo, e pure non esser vero che ***spatium ad spatium eamdem habeat rationem, quam tempus ad tempus.*** Non essendo vero questo, o non ben dimostrato, non si poteva esser certi della verità del primo teorema, in cui i moti accelerati si riducono agli uniformi, d'onde verrebbesi altresì a diffondere l'incertezza sul teorema secondo, in cui, quasi per un corollario del precedente, si stabilisce la legge degli spazi proporzionali ai quadrati dei tempi.

Tali sentiva Galileo dovere o poter essere le conseguenze dannose alla nuova scienza del moto, com'ei l'aveva già nei suoi libri istituita, e che ora s'apparecchiava di mettere in dialogo, per palesarla finalmente al mondo: ond'avendo già deliberato di non lasciare in mano altrui un'arme così pericolosa, qual vedeva spuntare dal pensiero del Cavalieri, non potendola gettare o nascondere, voleva maneggiarla egli da sè medesimo destramente a suo modo. Meditava fra sè in silenzio come si potesse conseguir meglio la desiderata intenzione, e intanto il Rocca, il quale aveva avuto copia della scrittura sulla riforma euclidea, intorno a che dicevasi di voler consultar Galileo, e dopo quasi più che un mese e mezzo non aveva ancora saputo altro; sollecitava curioso il Cavalieri che rispondeva così da Bologna il dì 4 Gennaio: « Scrissi già al sig. Galileo e li mandai una copia della dimostrazione intorno alla definizione quinta del Quinto di Euclide, da V. S. promossa, per intenderne il parer suo, ed aspettone risposta: avendo cosa nuova glie ne darò avviso » (Lettere a G. A. Rocca etc., Modena 1725, pag. 21).

Indugiò a venire parecchi altri giorni ancora l'aspettata risposta, dei propri termini della quale non abbiamo precisa notizia, ma si congetturano facilmente dai sentimenti, che si dovettero suscitar nell'animo di Galileo, e dal riscontro delle seguenti parole scrittegli dal Cavalieri in una sua lettera del dì 6 Febbraio di quel medesimo anno 1635. « Quanto all'appendice intorno alla definizione V del Quinto, conforme che mi pare che inclini il suo parere, la lascerò stare, non avendo veramente alcuna connessione con l'opera, e differirò a più opportuna occasione il pubblicarla. Bene avevo gusto inserirla nella Geometria come cosa geometrica, e maggiormente che non so se più stamperò di simili materie, che da molti sono aborrite, da pochi viste, e da pochissimi apprezzate » (Campori, Carteggio gal. cit., pag. 429). Il Cavalieri però, in quella sua ingenuità, non aveva ben comprese le segrete intenzioni nè penetrato addentro al cupo animo di Galileo, il quale poi si fece

intendere meglio, che di quella dimostrazione del definito da Euclide non doveva far l'Autore oramai più conto come di cosa sua, nè perciò pensare di pubblicarla a nome suo nella Geometria nuova, nè altrove. L'artificio e il modo eran molto diversi, ma nell'effetto si rassomigliavano a quelli dei *bravi* di que' tempi, i quali, dop' avere usata contro un più debole qualche prepotenza, lo lasciavano, sicuri d' essere bene intesi, col ficcargli in viso gli occhi minacciosi, e con l' appuntarsi il dito su dal mento al naso.

Divenuto Galileo con quest' arti, delle quali noi ci siam fatti al mondo aborriti delatori, sicuro dell' usurpato possesso, resta a dire qual' ei pensasse allora di farne, e quale veramente ne facesse poi uso. Il vederlo attendere in quel tempo a trascrivere le due prime proposizioni *De motu aequabili*, così com' erano state già dimostrate per l'applicazione degli equimolteplici, parrebbe segno ch' ei non avesse riconosciuto ancora la verità dei dubbi, o l' importanza delle critiche del Cavalieri. Ma furono certe difficoltà, le quali si comprenderanno meglio fra poco, che fecero lasciare a Galileo senza riforma i detti teoremi, di cui poteva dall' altra parte riversare ogni responsabilità sopr' Archimede, loro primo e legittimo Autore. Credeva allora che dovess' essere sufficiente a salvarlo dalle contradizioni quella grande autorità, invocata anche altrove, quando, nella dimostrazion delle traiettorie paraboliche si supponevano parallele le forze sollecitanti il proietto (Alb. XIII, 228), o quando si voleva da alcuni francesi mettere in dubbio se la nuova Meccanica fosse una scienza reale o un romanzo, francamente rispondendo agli oppositori, Galileo, che, pur non verificandosi le dimostrate leggi in natura, non per questo perderebbero le sue dimostrazioni di forza e di concludenza, « siccome niente pregiudica alle conclusioni, dimostrate da Archimede circa la spirale, il non ritrovarsi in natura mobile, che in quella maniera spiralmente si muova » (Alb. VII, 157).

Appena pubblicatisi però i Dialoghi, la critica inesorabile non volle riconoscere autorità, e mentre da una parte s' assaliva a visiera scoperta il nuovo edifizio, dicendo ch' era tutto fondato sopra un supposto; si sentiva dall' altra i minacciosi rumori di chi soggiungeva che, non solo quel meccanico fondamento era ipotetico, ma che mancava affatto di fondamento, non essendo dimostrative delle proporzionalità fra gli spazi e i tempi le ragioni suggerite da Euclide. Avvenne perciò che, in mezzo all' opera di perfezionare i discorsi del moto stampati in Leida, una delle sollecitudini, che si dette immediatamente l'Autore, dopo aver ritrovata la dimostrazione del principio supposto, fu quella d' assegnare altre note distintive e altre condizioni delle quantità proporzionali. La notizia si raccoglie certa da ciò, che soggiunge il Viviani, dop' aver detto come volesse Galileo che gli facesse il disteso della dimostrazion del teorema ammesso già come noto, intorno a che nel capitolo precedente s' è da noi lungamente discorso.

« Per una simile occasione di dubitare intorno alla quinta ed alla settima definizione del quinto d' Euclide, dice esso Viviani, mi aveva per avanti conferito il Galileo la dimostrazione di quelle definizioni del quinto Libro,

senza però applicarla a figure, che, fermatomi poi in Arcetri, egli mi dettò in dialogo, assai prima della venuta quivi del Torricelli, quando ancora il Galileo non aveva risoluto di porla nella quinta Giornata, ma pensava tuttavia d'aggiungerla alla quarta (*così: ma voleva dire alla terza*) a facce 153 dell'impressione di Leida, dopo la prima proposizione Dei moti equabili, nel caso del ristamparsi, con le altre opere sue, quell'ultima delle due nuove Scienze. Questa tal dettatura diede poi qualche facilità al medesimo Galileo ed al Torricelli, per fare quel più ampio disteso in dialogo, che si è veduto, e la medesima come inutile rimase a me, ed ancora la conservo » (Scienza univ. delle proporz. cit., pag. 100).

Tra i frammenti di dialogo però, dettati da Galileo e notati da noi nell'altro capitolo, non s'è potuto trovar questo delle proporzioni, di cui qui parla il Viviani. Sarà forse andato smarrito, o rimasto ai nostri occhi coperto dalla fitta selva dei fogli di que' numerosi volumi, e di ciò senza dubbio ci duole, ma dalle segnate postille non è difficile ricostruire l'effigie. Dicendosi ivi che le cose dettate al Viviani era risoluto l'Autore d'inserirle dopo la prima proposizione Dei moti equabili, e che dettero qualche facilità al più ampio disteso in dialogo dal Torricelli, par si possa argomentare che quel primo frammento si limitasse a definire le quantità proporzionali, a che si riduce propriamente la prima delle tre parti, nelle quali, come si vedrà meglio, è distinto il dialogo torricelliano. Che se alcuno desiderasse di sapere il motivo, per cui Galileo si mutò dal primo proposito, d'una semplice aggiunta ordinandone un dialogo distinto, potrebbe rimaner sodisfatto dalle seguenti considerazioni, che diffonderanno forse la loro luce anche sopr'altre parti di questa Storia.

Ritessendo noi dunque con la mente le fila al discorso, che doveva essere inserito nel terzo dialogo, dopo che il Salviati ebbe letta agli amici la dimostrazione del primo teorema dei moti equabili, sappiamo che l'argomento si concludeva nell'osservar come la regola degli equimolteplici euclidei non si poteva prendere per criterio certo delle proporzionalità fra quattro termini dati: ond'è che si sarebbe così venuti a confessare non essere ben dimostrato quello stesso teorema dall'Autore. Il commento insomma che si voleva far soggiungere agli interlocutori, non potendo non condannare o non contraddire al testo, si vedeva da Galileo e dal Viviani la necessità di dimostrar che i tempi son proporzionali agli spazi, con altro mezzo e in altra maniera.

Ma qui stava la difficoltà, per ben comprender la quale giova ripensare all'invenzion di quel più vero principio, che i matematici posteriori a Galileo sostituirono all'antico paralogismo di Archimede. Quel principio, che doveva essere per sè noto, consisteva nel dire che due mobili sono allora ugualmente veloci, quando passano spazi uguali in ugual tempo, d'onde concludesi per corollario immediato esser l'uno più veloce dell'altro, che passa in più piccol tempo il medesimo spazio. La folla del popolo, spettatrice curiosa delle corse dei cavalli in un prato, si serve per giudicare della vittoria di questo

criterio, che dunque è una verità di senso comune, espressa nella sua generalità dall' assioma: le velocità de' mobili son tanto maggiori, quant' è più breve il tempo e lo spazio più lungo.

Gli elementi dunque compositori dei moti uniformi venivano così facilmente a tradursi in una formula matematica di natura frazionaria, in cui sarebbero le velocità rappresentate dal quoziente, che ne resulta, dividendo lo spazio per il tempo, e il simbolo algebrico della quale sarebbe $V = \frac{S}{T}$, intendendosi per V la velocità, e per S e per T gli altri due nominati elementi. Con le lettere iniziali V', S', T' denominati altri elementi simili, ma in quantità diversi, si compone allo stesso modo l'altro simbolo $V_{\prime} = \frac{S'}{T'}$. E perchè è chiaro che tanto è più o meno grande la velocità quanto sono più o meno grandi i corrispondenti spazi, relativamente ai tempi corrispondenti, sarà dnnque $V : V' = \frac{S}{T} : \frac{S'}{T'}$, d' onde si concludono, con somma facilità e con retto metodo dimostrativo, i teoremi ordinati nel suo primo libro *De motu* da Galileo.

Questa radicale riforma, ripetiamo, non era facile introdurla allora, che prevalevano i metodi antichi, proseguendo i quali, come si faceva dalla Scuola galileiana, non era possibile dilungarsi un passo dagli esempi di Archimede. Costretto Galileo stesso perciò a lasciar le due proposizioni dei moti equabili così com' erano state scritte nel libro, non volle mettervi a riscontro un discorso, che tendeva a scoprirne la fallacia del metodo dimostrativo. E non volendo pure che si rimanesse inutile il pensiero del Cavalieri, si consigliò di trattar della nuova Scienza delle proporzioni in disparte, e in modo, che non apparisse l' applicazione degli equimolteplici alla proporzionalità dei moti equabili o falsa o inconcludente, ma oscura, intantochè colui, il quale non fosse rimasto sodisfatto nel leggere que' suoi primi teoremi *De motu,* pensasse di riformar col suo proprio ingegno, e secondo le nuove avvertenze, le dimostrazioni condotte dietro l' antica definizione di Euclide. Che se l' argomento delle proporzioni rimaneva scarso, per consumare il tempo di una intera Giornata, in altri simili soggetti di Fisica e di Matematica troverebbe il Salviati da intrattenere gli amici, perchè non oziosamente si potessero condurre a sera.

In questo che così Galileo seco medesimo proponeva, e conferiva col giovane Viviani, si facevano col Torricelli le trattative della sua venuta a Firenze, che di fatti successe, come sappiamo, in que' primi giorni di ottobre 1641. Il fine, per cui fu fatto a lui mutare il soggiorno di Roma nell' ospizio di Arcetri, era quello di aiutare la fisica impotenza dell' ospite a ripulir certe sue reliquie di pensieri fisici e matematici, affinchè si potessero lasciar vedere insieme con le altre cose meno imperfette (Alb. VII, 367). Era fra quei pensieri, principale senza dubbio per l' argomento, e urgente per le solenni promesse fatte al pubblico, quello attenente all' uso delle catenelle e alla forza

della percossa, ond' è che ognuno si sarebbe aspettato di veder in tal congiuntura ridotti alla loro tanto desiderata perfezione i dialoghi del moto. Si seppe invece dagli amici, e trentadue anni dopo se n' ebbe pubblica testimonianza, che il Salviati, dopo così lungo intermedio, era nuovamente tornato in scena, e tutt' altro che scusarsi con gli spettatori, innanzi ai quali rifinire il primo interrotto discorso, divagarsi indebitamente in soggetto straniero.

Tale è il sentimento e il giudizio degli studiosi, i quali, giunti al termine del dialogo quarto, sentono dire agl' interlocutori che nel seguente si ricercherebbero le speculazioni fatte dall' Accademico intorno alla forza della percossa (Alb. XIII, 266), e poi svolgendo la carta trovano invece che nel quinto dialogo non si tratta punto di Meccanica, ma di Geometria, e particolarmente delle proporzioni. Eppure quel titolo di *Principio della quinta Giornata* fu stampato dal Viviani, a cui fu dato a copiare sull' autografo del Torricelli, il quale si dice che avesse scritto così in fronte al dialogo, per espressa volontà di Galileo. Che se fosse veramente stato così, bisognerebbe dire che Galileo stesso, non curando gl' impegni solennemente contratti col pubblico avesse dismesso il pensiero di far succedere alla quarta immediatamente un' altra Giornata, dove si discorrerebbe, e si dimostrerebbero i maravigliosi effetti della percossa. Fu anche da noi creduto un tempo così, e significammo ai Lettori questa nostra opinione, ma, esaminate poi meglio le cose, ci siam dovuti persuader finalmente che il titolo di *Giornata quinta* fu, non ben secondando le rimaste chiuse intenzioni di Galileo, posto dal Torricelli, come apparirà dalla seguente storia del disteso fatto da lui.

III.

Intorno a una cosa, ch' è di grande importanza per l' accennata storia, convien prima di tutto intenderci: ed è intorno al modo, come si crede che il Torricelli facesse quel suo disteso. Il Viviani, che gli fu convivale in Arcetri e collega, e perciò presente all' azione e testimone del fatto, dicendo che Galileo *andava dettando* (Scienza univ. cit., pag. 60), non si dichiara bene se la dettatura era anche della forma del discorso, o del solo semplice pensiero, come par voglia insinuarci il Serenai che, copiando, metteva questo titolo: *Trattato del Galileo sopra la definizione delle proporzioni di Euclide. — Giornata quinta, da aggiungersi al libro delle Nuove scienze, distesa e spiegata dal Torricelli, vivente esso Galileo ceco, e per lui.* Chi però ripensa alle qualità dello scrivente, eletto fra i primi matematici dell' Italia, l' opera del quale non poteva perciò limitarsi a solo il meccanico esercizio delle mani e degli occhi; ha già fra sè risoluta la questione. e ha pensato che doveva la cosa essere andata così: Galileo significava i suoi pensieri, che poi il Torricelli distendeva a modo suo, e leggeva lo scritto da sè, perchè venisse approvato. Chi dall' altra parte sa giudicar dello stile, sente

la diversità che passa tra la elegante snellezza del quinto dialogo, e la magnifica posa dei precedenti: ma, fuor d'ogni meditata congettura e d'ogni sottilità di giudizio, si rende quel che si vuol conoscere per sè manifesto a solo esaminar la bozza autografa, che felicemente s'è conservata.

A chi svolge il tomo quinto della quinta parte dei manoscritti di Galileo occorre per prima cosa un quinternetto, in sesto più piccolo dei rimanenti, a cui par che manchi il principio, perchè fu per inavvertenza anteposto all'altro quinterno di maggior sesto, e della medesima calligrafia, sulla prima faccia del quale comincia la scrittura del Dialogo, com'uscì dalla stessa mano del Torricelli di primo getto. Son frequentissime perciò le cassature, le postille in margine e in calce, e le correzioni delle parole, consistenti bene spesso nei solecismi, ne' quali suol trascorrere colui, che non ha uso della pronunzia e della ortografia toscana. Dove, per esempio, era scritto *ponessimo, renovatomi, arenato,* è corretto *ponemmo, rinnovatomi, arrenato;* ciò che solo basterebbe a provar, con materiale certezza, che l'espressioni avevano propria e particolar forma dallo scrivente, benchè altrui ne fosse il concetto. Intorno a ciò, com'a cosa di maggiore importanza, convien trattenere il nostro ragionamento, prima di tutto osservando che nel Dialogo torricelliano si distingue in tre parti quello stesso unico concetto della Scienza universale delle proporzioni: nella prima si considerano le *proporzioni semplici,* nella seconda le *sproporzioni,* e nella terza le *proporzioni composte.*

In che modo Galileo comunicasse al Torricelli i pensieri, per ciò che s'appartiene a quella prima parte del discorso, è a chiunque manifesto che, anche frettolosamente, confronta il disteso di questo stesso discorso con la scrittura, che da Bologna mandò il Cavalieri. Il prologo infatti lo svolge il Salviati da quel che s'accenna in principio della detta scrittura, che l'occasione cioè di trattar delle proporzioni fu data dall'esame della prima proposizione del moto equabile, dimostrata da un certo Autore per l'applicazione degli ugualmente molteplici di Euclide. Il Cavalieri per quell'Autore intendeva il Rocca, e il protagonista del dialogo introduceva sulla scena, invece di un personaggio oscuro, il famosissimo Galileo.

Terminato il prologo, in cui anche il Salviati accenna allo studio delle maravigliose spirali di Archimede, da cui ebbe lo stesso Bocca a scrivere quel suo trattatello il principio e l'impulso; s'entra nell'argomento del quinto libro di Euclide con queste parole, trascritte tali e quali si lessero nel foglio del Cavalieri: « Suppongasi primieramente (come le suppose anche Euclide, mentre le definì) che le grandezze proporzionali si trovino... » (Alb. XIII, 290). Questa medesima fedeltà di trascrizione, corretta dagli errori di ortografia e dai solecismi, si riscontra anche nel progresso dell'interloquio, non facendo per lo più il Torricelli altro che scrivere a nome di Simplicio, del Sagredo e del Salviati quelle obiezioni, quelle domande e quelle risposte, accennate in margine al foglio dal bolognese amanuense.

È dunque manifesto che il modo, come Galileo comunicò al Torricelli i pensieri, espressi nella prima parte del Dialogo, fu con mettergli innanzi

la scrittura del Cavalieri, nella quale, come per le cose anzi dette è noto, si stabilisce per caratterismo delle proporzionalità l'uguaglianza del quoziente nelle due ragioni: d'onde poi si dimostra la definizione euclidea, che cioè, essendo i quattro termini in una data proporzione, sono i loro equimolteplici altresì proporzionali. Si veniva qui come là a concludere insomma che la quinta definizione di Euclide non era un principio, che si potesse ritener per sè come noto, ma di un principio da preporsi come noto era piuttosto la dimostrabile conseguenza.

Per quel che poi riguarda le altre due parti del trattato delle proporzioni, rimane a noi incerto il modo come Galileo comunicò al Torricelli il suo pensiero: cioè a dire se a voce o in scritto, non progredendo il discorso del Cavalieri oltre al termine, dove noi, ricopiando, l'abbiamo lasciato. Potrebb'esser quel termine reale, e potrebbero i fogli successivi esser venuti meno a chi ebbe la cura di raccoglierli nel detto volume: cosicchè, mentre resta incerto se quel che si prosegue a trattar nel dialogo delle sproporzioni e delle proporzioni composte sia scritto secondo la mente del Cavalieri o di Galileo; sembra sia da concluder come cosa certissima che non appartiene a Galileo, nè per il concetto nè per le parole, il primo fondamento della Scienza universale delle proporzioni, posto nella prima parte del quinto dialogo aggiunto alle due Scienze nuove.

Comunque sia, la bozza del Torricelli termina col motto *Laus Deo,* segno che il discorso delle proporzioni, quale ivi leggesi manoscritto, era, secondo l'intenzione dei due collaboratori, compiuto. Essendo però appena bastato l'argomento per trattener la conversazione infin presso a mezzogiorno, aveva Galileo pensato, per condurla a sera, di mettere in mano al Salviati, da leggersi innanzi agli amici, vari fogli, dove fossero dimostrati teoremi di Geometria, e risoluti problemi di Fisica; ma fu impedito dalla malattia, che aggravandosi sempre più, poco tempo di poi lo condusse alla morte.

Scarsi perciò, per la brevità del tempo che si ridusse a soli tre mesi, s'aspettàva che fossero i frutti raccolti ne' filosofici colloquî con Galileo dal Torricelli, ma, per la straordinaria eccellenza dei due uomini convenuti insieme, tutti si ripromettevan que' frutti preziosi. Di qui è che, per goderne o per saziarne almeno la vista, si misero attorno allo stesso Torricelli, appena sceso giù dalla collina di Arcetri, gli ammiratori e gli amici, il più desideroso fra' quali era il principe Leopoldo dei Medici.

Giova in tale occasione rammemorare ch'essendo esso Principe entrato in gran curiosità di saper se il dialogo dell'uso delle catenuzze, e della forza della percossa, solennemente promesso e inutilmente atteso dall'Elzevirio, si preparava; ne fece, per mezzo del maestro suo don Famiano Michelini, interrogare in proposito Galileo, il quale mandò a rispondere a Sua Altezza ch'egli aveva ben ritrovata la proporzione della forza della percossa, ma che, per la vecchiaia e per altri accidenti, non sperava di poterla dar fuori. Il Principe allora, a rendere più efficaci le premure che faceva il Castelli aggiungendo il suo proprio invito, condusse il Torricelli a Firenze per questo

fine principalmente, perchè aiutasse Galileo a stendere il Dialogo della percossa. Desideroso ora dunque di saper qual effetto avessero avuto le sue sollecitudini n' ebbe dal Torricelli stesso per risposta che, in argomento della percossa, aveva sì udito pronunziare al suo ospite alcune conclusioni importanti, ma di metterle in dialogo non se n' era discorso, nè aveva sentito dire da lui che ne avesse ridotto a perfezione il trattato.

Abbiamo di così fatte notizie il documento in una lettera autografa del principe Leopoldo, il quale rispondeva così il 9 Maggio 1665 a Michelangiolo Ricci, curioso di saper se era vero che il Borelli si preparava a scrivere un libro sopra la forza della percossa: « Deve sapere che le speculazioni fatte dal medesimo Borelli sopra questa esperienza della polvere credo lo abbiano portato a lavorare, e speculare sopra la forza e proporzione della percossa, che la buona memoria del nostro Galileo disse a me più volte aver ritrovata, ma non potè, per l' età o per qualsivoglia altro accidente che ne fosse cagione, darla fuori, com' io le feci ben cento volte istanza, ed al qual fine condussi qua il Torricelli di suo consenso, perchè potesse servire in mettere in carta i suoi pensieri, ma tutto fu invano » (MSS. Cim., T. XXIII, fol. 113).

Persuaso dunque il Principe che, quanto a procurare il Dialogo della percossa, le sue proprie sollecitudini fossero tornate vane, domandava curioso in che altro dunque si fosse, in quella dimora d'Arcetri, divagato il pensiero, e il Torricelli rispondeva che in distendere in dialogo una nuova scienza delle proporzioni. Di veder questo Dialogo mostrò allora esso Principe vivissimo desiderio, e il Torricelli riprese in mano la bozza, con quelle correzioni che ci aveva fatte nel leggerla, per averne l' approvazione, a Galileo, il quale, sperando di poter proseguir l' opera, aspettava all' ultimo a designar del disteso il titolo e la collocazione. Non si poteva però farne per il Principe la copia a pulito, senza nulla scriverví in fronte, per cui, ben sapendo il Torricelli che il discorso intorno al quinto libro di Euclide era compiuto, e ch' era fatto per aggiungersi agli altri dialoghi delle due Scienze nuove, l' ultimo de' quali era il quarto, nè del Dialogo della percossa, che sarebbe dovuto immediatamente succedere, avendo sentito mai farne motto; non dubitò che, anche secondo la mente dello stesso Galileo, non fosse il titolo questo: *Trattato del Galileo sopra la definizione delle proporzioni di Euclide — Giornata quinta da aggiungersi nel libro delle Nuove scienze.* E così fu scritto in fronte alla copia, che di sua propria mano il Torricelli condusse, per consegnarla al principe Leopoldo.

Così essendo, non può dunque da quel titolo argomentarsi che Galileo avesse dismesso il pensiero di aggiungere, dopo i primi quattro del moto, il dialogo della percossa, il quale era già preparato in parte: che se avesse l' Autore avuto il tempo di renderlo compiuto, e il Torricelli se ne fosse trovato in mano il disteso, non avrebbe dubitato, secondo che necessariamente portava l' ordine logico, d' anteporlo al trattato delle proporzioni, al quale avrebbe perciò scritto in fronte *Giornata sesta del Galileo.* Il fine e la necessità di queste osservazioni, che potrebbero qui ai lettori sembrar fuor di

proposito, si comprenderà meglio, quando in quest' altro capitolo si proverà di fatto che quel dialogo della percossa, di cui il Torricelli diceva di non saper niente, era già cominciato, e quasi condotto a mezzo, prima ch' egli venisse ospite in Arcetri; e quando diremo come tra i manoscritti galileiani fosse ritrovato esso Dialogo, e fosse aggiunto dagli editori delle opere agli altri cinque delle due Scienze nuove. Intanto riprendiamo il filo di questa storia.

La copia, che il Torricelli consegnò al principe Leopoldo, rimase manoscritta infino al 1674, quando il Viviani pensò di pubblicarla dopo quel trattato, che ne volle scrivere per i *nobili geometri principianti* col titolo: *Quinto libro degli Elementi di Euclide, ovvero Scienza universale delle proporzioni.* Ivi dice come venticinque anni fa, col permesso di Sua Altezza, ne avesse dal detto autografo preso copia, e come nell' atto del darla alle stampe l' avesse voluta diligentemente riscontrar sopra la bozza originale che, insiem con gli altri manoscritti torricelliani, si trovava allora nelle mani di Lodovico Serenai. « Ed avendola, soggiunge il Viviani stesso, ritrovata verso il fine con qualche cosa di più, aggiuntavi com' io credo dal Torricelli, non ho voluto mancare di unirla a questa quinta Giornata, come si vedrà, in carattere corsivo, e quale, dopo un diligente riscontro del rimanente, mi ha dettato il medesimo signor Lodovico » (Ediz. cit., pag. 60). Il Serenai infatti che, non contento di ritrar quella prima bozza, per dir così, in *fac simile,* aveva preso altresì, col permesso del principe Leopoldo, copia del dialogo dal Torricelli stesso messo a pulito; notava così sopra la prima carta, dop' avervi scritto il titolo: « Ma in questa copia, oltre all' esser diversa dal manoscritto di esso Torricelli in molte parole di poco momento, ci mancano verso il fine, a c. 20, circa due facce, che si leggono in detto manoscritto, e nell' altra copia, che ne ho fatta io » (MSS. Gal., P. V, T. V, fol. 39).

Che manchino le due facce, supplite dal Viviani e dagli altri editori in carattere corsivo, è un fatto: ma non si rende chiara la ragione di tal mancanza da ciò, che diceva dianzi lo stesso Viviani essere state aggiunte quelle cose dal Torricelli. Nella bozza originale è tutto scritto andantemente. senza segno alcuno di un' aggiunta posteriore, e si vedono, anche per queste pagine, ricorrere le solite correzioni, fatte alla presenza di Galileo, che dunque ebbe approvato qui come nel resto.

Ciò però non vorrebbe dire che non fosse propria del Torricelli l' invenzione di que' teoremi, con i quali concorreva a sublimare l' umile scienza galileiana delle proporzioni. I teoremi si riducono a due e noi gli vogliamo ordinatamente proporre alla considerazione dei nostri Lettori, perchè, riconoscendone da loro medesimi la superiorità, confrontati con gli altri tutti elementarissimi nei discorsi del Sagredo e del Salviati, si venga a confermare e a dichiarar meglio quel che il Viviani credeva: essere cioè quegli stessi teoremi aggiunti dal Torricelli, benchè Galileo, sentendoseli leggere in mezzo agli altri, si chiamasse contento e beato di lasciarli uscir fuori sotto il suo nome.

TEOREMA I. — « Se fra queste grandezze A e B s' immaginerà che sia frapposta, non una grandezza sola, ma più d' una, come si vede in questi

segni A, C, D, B; s' intenderà pure la proporzione della A alla B esser composta di tutte le proporzioni, le quali sono intermedie fra di esse: cioè delle proporzioni, che hanno la A alla C, la C alla D, e la D alla B. E così, se più fossero le grandezze, sempre la prima all' ultima ha proporzion composta di tutte quelle proporzioni, le quali mediano fra di esse » (Viviani, Scienza delle prop. cit., pag. 75).

Il teorema è reso generale per l' induzione dai casi particolari, come si faceva allora in Italia, dove non s' era introdotta l' Algebra cartesiana. Avendosi infatti A : C = C : B, avremo anche A : B = A . C : B . C, che resulta dal moltiplicare per C la seconda ragione dell' identica A : B = A : B. Come pure, avendosi A : C = C : D = D : B, avremo altresì A : B = A . C . D : H . C . D resultante dal moltiplicar per C . D la seconda ragione della detta identica A : B = A : B. La costanza della regola, in tutti gli altri esempi per qualunque numero di quantità intermedie, dava logico diritto al Matematico di creder la proposizione, come fa qui il Torricelli, e di pronunziarla vera in universale.

Teorema II. — « Quando le proporzioni componenti sieno uguali fra di loro, o per dir meglio sieno le stesse; allora la prima all' ultima avrà, come di sopra abbiamo detto, una tal proporzione composta di tutte le proporzioni intermedie. Ma perchè quelle proporzioni intermedie sono tutte uguali, potremo esprimere il medesimo nostro senso con dire che la proporzione della prima all' ultima ha una proporzione tanto molteplice della proporzione, che ha la prima alla seconda, quante per appunto saranno le proporzioni, che si frappongono fra la prima e l' ultima » (ivi).

Anche questo bel teorema, nuovo affatto, come l' altro da cui deriva, nella scienza delle proporzioni, si concludeva per induzione dai vari casi particolari. « Così per esempio, soggiunge, per dar ragione dimostrativa della pronunziata verità, il Torricelli, se fossero tre termini, e che la medesima proporzione fosse fra la prima e la seconda, che è fra la seconda e la terza; allora sarebbe vero che la prima alla terza avrebbe proporzione composta delle due proporzioni, le quali sono fra la prima e la seconda, e fra la seconda e la terza. Ma perchè queste due proporzioni si suppongono uguali, cioè le stesse, potrà dirsi che la proporzione della prima alla terza è duplicata della proporzione, che ha la prima alla seconda » (ivi).

Data essendo infatti A : B = B : C, se si moltiplica per A la seconda ragione dell' identica A : C = A : C, avremo A : C = A^2 : AC. Ma A . C, per la data, è uguale a B^2; dunque A : C = $A^2 : B^2$. Similmente, essendo quattro i termini nelle proporzioni continue A : B = B : C = C : D, se per A^2 si moltiplicherà la seconda ragione dell' identica A : D = A : D, avremo A : D = $A^3 : A^2 . D$. Ma per la data A . D = B . C, ossia $A^2 . D$ = A . B . C, e per essere A . C = B^2 è A . C . B = B^3; dunque A : D = $A^3 : B^3$, per cui si potrebbe dire col Torricelli « che la proporzione della prima alla quarta è composta di quelle tre proporzioni intermedie, ed ancora che è triplicata della proporzione della prima alla seconda » (ivi, pag. 75, 76).

Or essendo, dall' esame di questi teoremi, confermata anche meglio l'opinion del Viviani, che cioè si fossero aggiunti, nello stender le bozze del Dialogo, dal Torricelli, per arricchirne la Scienza galileiana delle proporzioni; consideriamo quel che dovette naturalmente avvenire nel ridurre, dopo la morte di Galileo, quella stessa bozza a pulito, per consegnarla nelle mani del principe Leopoldo. Chiunque trascrive trova sempre qualche cosa da correggere, nella scelta delle parole e nel disporle, per maggior chiarezza e armonia, con qualche varietà negl' incisi, di che il periodo s' intesse. Di qui nacquero quelle diversità in molte parole, che diceva di aver notate il Serenai nel riscontrar la copia con la bozza originale, soggiungendo però ch' eran cose di poco momento. Venuto poi il Torricelli stesso al punto, dove nella terza parte del Dialogo si tratta delle proporzioni composte, e dov' egli aveva aggiunto que' suoi due teoremi, ripensando forse che Galileo era tanto ricco, da non aver bisogno della roba altrui, deliberò di ritenerseli per sè, saltando nel copiare quel che prima con tanta liberalità ci aveva messo. Ed ecco rivelata la causa del mancar verso il fine, nella copia a pulito fatta per il principe Leopoldo, quelle due facce, che il Serenai e il Viviani avevano riscontrate nell' originale torricelliano.

IV.

La deliberazione di serbar per sè i teoremi aggiunti nel dialogo, dovette esser presa dal Torricelli, quand' ebbe a ripensare che Galileo, con tutto quel suo discorso, non aveva fatt' altro che dimostrare come il quinto libro, e molte altre parti degli Elementi di Euclide, avevano bisogno di una riforma. La riforma però non era fatta, perchè non bastava l' avere osservato che la regola degli egualmente moltiplici era insufficiente ad assicurarci della proporzionalità, che passa fra quattro grandezze, ma conveniva di più insegnare per quale altra via si potesse il Geometra condurre a quelle medesime conclusioni. Perciocchè nessuno dubitava della verità dei Teoremi euclidei, ma de' termini di mezzo che s' invocavano dall' Autore per dimostrarli.

Quand' anche, ripensava tra sè il Torricelli, si pubblicasse questo dialogo, ch' io ho qui disteso in aggiunta agli altri delle due Scienze nuove, quale utilità ne potrebbero ricavare i giovani studenti della Geometria e della Meccanica? Null' altra, dalla certezza in fuori che le prime proposizioni dei moti equabili, nel terzo dialogo galileiano, e tutte le proporzionalità, che intercedono fra linee e linee, fra superfice e linee, fra angoli e archi sottesi, nei vari libri euclidei, son verità che tuttavia rimangono a dimostrarsi. È dunque incominciata un' opera da Galileo che, per benefizio universale della Scienza matematica, vuol essere compiuta: d' onde, così discorrendo, venne a formarsi nell' animo dello stesso Torricelli il proposito di scrivere un trattato delle proporzioni, in cui forse troverebbero luogo i due teoremi inseriti

nel quinto Dialogo galileiano, e in ogni modo s' insegnerebbe come dimostrare altrimenti, senza gli equimolteplici, le proporzionalità geometriche, e le meccaniche concernenti i moti uniformi.

Fu il proposito mandato ad effetto in un opuscolo latino, che corse lungo tempo per le mani degli amici, col titolo *De proportionibus*, e che servì di testo nelle scuole di Geometria, per supplire al quinto, e al sesto libro degli Elementi di Euclide. « L' appendice al mio libretto delle proporzioni, scriveva il Torricelli il dì 24 Agosto 1647 al Ricci, è già messo al pulito. Il proemio mi riesce lunghissimo, particolarmente in riguardo all' opera, ma è pur necessario diffondersi per mostrare l' insufficienza e difetto del V libro di Euclide » (MSS. Gal. Disc., T. XV, fol. 115). Non fu mai stampato quell' opuscolo vivente l' Autore, e benchè il Serenai sollecitasse tante volte e in vari modi il Viviani, perchè lo pubblicasse insieme con le altre opere postume del comune Amico; si rimase nella sua bozza, e nella sua copia a pulito autografa, e si riman tuttavia nel tomo XXVI dei Discepoli di Galileo. Ivi può ritrovarlo intero chi vuole, o ne' detti originali o nella nitidissima e diligentissima copia, che ne fece il medesimo Serenai: e perchè è documento importantissimo, non solo della Storia della Geometria, ma e della Meccanica, ritrovandovisi la prima vera logica dimostrazione della proporzionalità fra gli spazi e i tempi nei moti uniformi, che in realtà manca negli antichi teoremi di Archimede, e ne' nuovi che Galileo ritrasse da lui; non dispiacerà ai nostri Lettori di veder qui in poche parole il riassunto della torricelliana riforma della Scienza delle proporzioni, e delle applicazioni di lei alla Meccanica.

Il trattato *De proportionibus* si divide in due parti, la prima delle quali è un proemio, dove si trattien l' Autore in assai lungo discorso col lettore amico intorno alle geometriche definizioni. Ragionando come il Nardi, e come il Cavalieri, osserva la fallacia, che s' asconde nel definito in quinto luogo, innanzi al suo quinto libro, da Euclide, e con queste parole termina la prima parte del suo discorso: « Tandem, ut ad conclusionem accedam, pari facilitate dubitabo magnitudines non esse proportionales, licet earum aequimultiplicia imperatam concordiam constantissime servent; et esse proportionales, licet ab eadem concordia aliquando recedant » (fol. 56 ad t.).

Notate le difficoltà, che s' incontrano nell' intendere le definizioni di Euclide, prevede che qualche cosa di simile potrebbe alcuno ritrovar nelle sue, da che s' espedisce con l' osservare la gran differenza che è tra l' altrui metodo antico o il suo proprio nuovo. « Euclides, suppositis difficillimis principiis, faciliora quaeque demonstravit: ego contra, praemissis facilioribus, notioribusque principiis, difficillima quaeque demonstrare conatus sum » (ibid.).

Se l' effetto l' abbia poi conseguito lo lasciò il Torricelli giudicare ai Lettori, passando all' altra parte del trattato, o, per più propriamente dire, al trattato delle proporzionali, a cui si premettono otto definizioni, e sei tra supposizioni e assiomi. Le prime proposizioni poi, che ricorrono a dimostrarsi, son le cinque seguenti, delle quali ci contentèremo di trascrivere il semplice enunciato:

« PROPOSITIO I. — Propositis duabus magnitudinibus, inaequalibus et eiusdem generis, quarum una sit maior, altera vero minor; si ex maiore auferatur dimidium, et rursus ab ea quae remanet dimidium detrahatur, atque iterum ex reliqua dimidium, et hoc fiat semper; relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minor erit proposita minori magnitudine. »

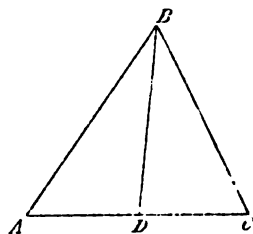
« PROPOSITIO II. — Si fuerit quodcumque triangulum, cuius basis secta sit in quotcumque partes inter se aequales, et ex vertice trianguli ad puncta singula divisionum basis ducantur rectae lineàe; erit totum triangulum divisum in triangula inter se aequalia, quod constat ex propos. XXXVIII primi libri: dico quamlibet summam horum triangulorum, ad reliquam, esse ut basis ad basim. »

« PROPOSITIO III. — Triangula eiusdem altitudinis eamdem habent rationem quam bases. »

« PROPOSITIO IV. — Si in quocumque triangulo fuerit quaedam recta parallela ad unum latus, haec parallela proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. »

« PROPOSITIO V. — Si in quocumque triangulo ABC (fig. 36) angulus quilibet ABC bifariam secetur a recta BD, dico etiam basim AC in ratione laterum sectam esse: hoc est segmentum AD, ad segmentum DC, eamdem habere rationem, quam habet latus AB ad BC » (ibid., fol. 61-65).

Figura 36.

Le altre cinque proposizioni, che si soggiungono, attendono a dimostrare col medesimo metodo, indipendentemente cioè dagli equimolteplici, che, essendo date quattro linee in proporzione, convertendo, componendo, dividendo e permutando, rimangono proporzionali: e finalmente che di due uguaglianze i membri, comunque composti, presi nel medesimo ordine, stanno fra loro in una medesima proporzione.

« PROPOSITIO VI. — Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et convertendo proportionales erunt. »

« PROPOSITIO VII. — Si divisae magnitudines proportionales fuerint, et componendo proportionales erunt. »

« PROPOSITIO VIII. — Si compositae magnitudines proportionales fuerint, et dividendo proportionales erunt. »

« PROPOSITIO IX. — Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutando proportionales erunt. »

« PROPOSITIO X. — Si fuerint quotcumque magnitudines, et aliae ipsis aequales numero, quae binae in eadem ratione sumantur, et ex aequo in eadem ratione erunt » (ibid., fol. 61-68).

Benchè siano le cinque precedenti proposizioni annunziate generalmente, non si dimostrano dall'Autore però che secondo un determinato genere di quantità, fra le quali i metodi antichi portavano a sceglier le linee. Così però, benchè fossero esse linee assai meno determinabili dei numeri, non si

veniva a dare alle proposizioni quella generalità, che ricevono in sè col far uso dei simboli algebrici, per cui fu costretto il Torricelli a soggiungere, alle dimostrate, nuove proposizioni *ut eas demonstremus universaliter veras esse, etiam in omni genere quantitatis.*

« Propositio XI. — Si fuerint tres magnitudines, aliaeque ipsis aequales numero, quae binae in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio ex aequalitate, in eadem ratione erunt. »

« Propositio XII. — Si compositae magnitudines proportionales fuerint, et per conversionem rationis proportionales erunt. »

« Propositio XIII. — Si fuerint ut totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, et reliqum ad reliqum erit ut erat totum ad totum. »

« Propositio XIV. — Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si, prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. »

« Propositio XV. — Si sint magnitudines quotcumque proportionales, quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium; ita se habebunt omnes simul antecedentes ad omnes consequentes simul. »

« Propositio XVI. — Eadem, ad minorem, maiorem habent rationem, quam ad maiorem. »

« Propositio XVII. — Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem et quinta ad secundam eamdem rationem, quam sexta ad quintam; etiam composita prima cum secunda, ad secundam, eamdem habebit rationem, quam tertia cum sexta ad quartam. »

« Propositio XVIII. — Si quatuor magnitudines eiusdem generis proportionales fuerint, maxima et minima reliquis duabus maiores erunt » (ibid., fol. 69-76).

Qui, scrive il Torricelli dop'aver dimostrata quest' ultima proposizione, faremo fine al trattatello delle proporzioni, in cui troveranno gli studiosi raccolto tutto quel che Euclide insegna nel suo quinto libro. Benchè il numero delle proposizioni euclidee ascenda a XXXIII o XXXIV, è però da osservare che non son tutte quelle propriamente dell' antico Autore, ma ve ne furono parecchie aggiunte da chi lo commentò e lo tradusse, e perciò si possono tralasciare, com' abbiam fatto noi, che scriviamo per i giovani principianti. Nonostante, prosegue a dire il Torricelli, perchè abbiamo introdotto gli studiosi all' intelligenza di alcune parti delle prime proposizioni del sesto libro, vogliamo compir l' opra, dimostrandole, col solito nostro metodo, intere « ut is, qui saltem libare contendit Geometriam, a sexto ipso Euclidis se citius queat expediri, omissis videlicet omnino tribus primis propositionibus, iam sibi notis. »

Nella prima infatti di quelle proposizioni dice Euclide che i triangoli e i parallelogrammi, aventi la medesima altezza, stanno fra loro come le basi, mentre nella terza torricelliana non si dimostra questa proprietà che rispetto ai triangoli. L' Autore greco, per provare la detta proporzionalità nell' une e nelle altre figure, si serve degli ugualmente molteplici, e il Nostro, come aveva senz' essi già conclusa l' annunziata proprietà nei triangoli, così lo fa

nel seguente modo nei parrallelogrammi, applicandovi la proposizione XIV: che cioè le semplici parti stanno in proporzione co' multipli, i quali secondo le loro mutue corrispondenze sian presi.

Abbiansi i due parallelogrammi AC, DF (figure 37, 38) con le altezze uguali: essi staranno come le basi. La dimostrazione, che s'avvolge in Euclide per discorso lungo e inconcludente, è dal Torricelli ridotta alla sua massima facilità e speditezza. Imperocchè, tirate le diagonali GB, HE, i rettangoli son doppi dei triangoli inscritti, e perciò, per la XIV, proporzionali. Ma i triangoli, per la III, stanno come le basi; dunque anche i rettangoli. « Sint parallogramma AC, DF in eadem altitudine: dico esse parallelogrammum AC ad DF ut basis AB, ad basim DE. Ductis enim diametris BG, EH, dividentur ab ipsis bifariam utraque parallelogramma, eruntque triangula AGB, DHE pariter multiplicia, cum sint dupla. Et erit, per XIV huius, parallelogrammum AC ad triangulum AGB, ut parallelogrammum DF ad triangulum DHE. Et permutando parallelogrammum AC, ad parallelogrammum DF, ut triangulum AGB ad triangulum DHE. Sed basis AB, ad basim DE, est per III[am] huius ut triangulum AGB ad triangulum DHE; ergo etc. » (ibid., fol. 149).

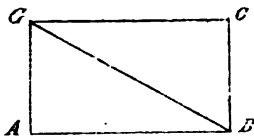
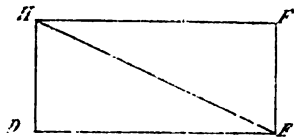



Figura 37.

Figura 38.

La seconda degli antichi Elementi è nella sua totalità dimostrata dalla quinta del nuovo trattato, ma la terza di là non è nella quinta di qui dimostrata altro che per la sua prima parte, rimanendo tuttavia a dimostrarsi, per renderla secondo Euclide compiuta, che se le parti della base abbiano la medesima proporzione che gli altri lati del triangolo, la linea retta, che dalla cima si tira sino al segamento della base, segherà l'angolo per mezzo. Ciò si soggiunge appunto dal Torricelli nel suo trattato, scansando gli equimolteplici, come pure, scansando gli equimolteplici, si dimostra l'ultima posta da Euclide in questo sesto libro, che cioè gli angoli inscritti nel medesimo cerchio son proporzionali agli archi compresi.

Così veniva finalmente operata, negli antichi insegnamenti geometrici, quella riforma, non troppo felicemente iniziata dal Benedetti, e solamente proposta dal Nardi e da Galileo, o come converrebbe per giustizia dire dal Cavalieri. Ma l'intenzione del Torricelli non era quella sola, come avvertimmo, di emendare la Geometria, ma altresì la Meccanica, i primi e principali teoremi della quale, benchè verissimi, si rimanevano nel libro delle Spirali e nel terzo dialogo delle Scienze nuove indimostrati. La prima legittima dimostrazione dunque che se ne avesse, è quale ora noi la diamo alla pubbiica luce, come importantissimo documento nella storia della Scienza del moto:

« Si punctum aliquod, aequabili semper velocitate, super aliqua recta linea AB (fig. 39) feratur, duasque ipsius portiones AC, CB permeaverit; dico

portionem AC ad CB eamdem habere rationem, quam habent tempora ipsa, quibus punctum portiones permeavit. »

« Ponantur DE, EF tempora, quibus punctum permeavit rectas AC, CB: nempe DE supponatur tempus rectae AC: ipsum vero EF tempus rectae CB. Ostendendum est rectam AC, ad rectam CB; esse ut tempus DE ad tempus EF. »

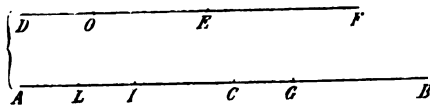



Figura 39.

« Nisi enim sit ita, coucipiamus, si possibile est, ut tempus DE ad EF, ita esse aliquam aliam lineam IC ad eamdem CB: et erit omnino ipsa IC vel minor vel maior quam AC. »

« Sit primum IC minor quam AC. Secetur CB bifariam, atque iterum bifariam, et hoc fiat semper, donec remaneat quaedam CG minor quam AI: dividaturque tota CB in partes aequales ipsi CG, quae quidem tota absumetur praecise. Item distribuatur et ipsa CA in partes aequales eidem CG, initio facto ex C, et continuata divisione quousque fieri poterit. Certum est aliquam divisionem casuram esse inter puncta A et I, quandoquidem recta CG metiens minor facta est quam AI. Cadat itaque inter A et I divisio L, et quoniam rectae AC tempus est ipsum DE, erit rectae LC, quae minor est, tempus minus quam DE. Esto igitur rectae LC tempus OE: tunc secetur tempus OE in totidem partes aequales, in quot aequales partes divisa est recta CB, eruntque singulae partes temporis OE tempora singularum partium aequalium rectae LC. Idemque dictum sit de partibus temporis EF, et rectae CB. Cum autem omnes partes rectarum LC, CB omnifariam sumptae inter se aequales sint, per constructionem, erunt etiam omnes partes temporum OE, EF, inter se aequales, ob suppositionem, aequalis semper velocitatis, sive motus aequabilis. »

« Jam recta LC ad CB non est ut recta minor IC ad eamdem CB, sed ipsa LC maior est, quam esse oporteret. Ut autem recta LC ad CB, ita tempus OE ad EF, quod infertur ex prima et sexta suppositione huius. Ergo etiam tempus OE maior est, quam esse oporteret. Quamobrem tempus DE multo maius est quam esse deberet ut ad EF eamdem habeat rationem, quam habet recta IC ad CB, quod est contra suppositum » (ibid., fol. 116-17).

Che se IC si dica dover esser maggiore di AC, e allora dimostra il Torricelli, con un ragionamento simile al precedente, che CB è troppo più grande di quel che non dovrebb' essere, perch' ella possa aver con l' antecedente stessa IC la ragion medesima, che ha il tempo DE al tempo EF, ciò che pure è contrario alla fatta supposizione. « Patet ergo quod recta AC ad CB est ut tempus DE ad EF, quandoquidem demonstravimus quam rationem habet tempus DE ad EF, eamdem nullam aliam lineam, praeter AC, posse habere ad CB, quod erat propositum » (ibid.).

La dimostrazione, lo riconosce ben da sè il Torricelli e lo confessa, non è di quella facilità nè di quella eleganza, che si sarebbe desiderata, ma non si poteva aspettar di meglio in chi intendeva di trattar la scienza co' metodi

antichi, tanto alieni dalla semplicità dei principii accennati di sopra, e dai quali hanno derivato i moderni le medesime conclusioni. La riforma in ogni modo, dal Torricelli stesso introdotta nel dimostrar le ragioni proporzionali, era di tanta importanza, da desiderarsi che fosse allora maggiormente diffusa: eppure è un fatto che la conobbero solo quei pochi, i quali erano intervenuti alle pubbliche lezioni dell'Autore, o avevano potuto prender copia del manoscritto di lui. Il Viviani non si risolveva di pubblicarlo, come il Serenai glie ne faceva istanza, o fosse perch' egli aspettava di dare alle stampe tutte insieme le opere postume dell'Amico, o fosse perch' egli stesso attendeva a scrivere delle proporzioni un nuovo trattato. Il fine, ch' ebbe di sostituire questo stesso trattato al torricelliano, non par si possa attribuire ad altro, che al desiderio di esaltare il suo proprio Maestro, vedendo che il Torricelli non faceva lì nemmeno un motto del Galileo, suo precursore, e che solamente lo rammemorava, a fin di dire com'avesse, per seguitar gli esempi di Archimede, lasciati i primi due teoremi dei moti uniformi senza logica conclusione.

Voleva dunque il Viviani fare apparire al mondo schiettamente galileiana la nuova scienza geometrica, da sostituirsi al quinto libro di Euclide, e non poteva dall'altra parte negare che, se l'impulso era venuto da Galileo, l'esecuzion dell'opera era tutto merito del Torricelli. Credette perciò di potersene sdebitare con l'inserire nel suo trattato alcune delle proposizioni di lui, e perchè il manoscritto era affidato alla custodia del Serenai, a lui ne chiese prima il permesso a voce, e poi nel seguente scritto, ch' egli intendeva di premettere alla stampa del libro:

« Rappresentai ier mattina a V. S. che, nell'andare disponendo con qualche nuovo ordine il trattato delle proporzioni, spiegato co' principii dimostrati dal gran Galileo mio maestro, con animo di stamparlo ora prontamente, sì per meglio servirne un gentilissimo cavaliere mio padrone, che mi richiese copia di quello, come per renderlo comune ancora ai giovani, che in questo pubblico studio si vanno introducendo nella Geometria; trovavo che mi sarebbe tornato molto in acconcio il valermi di due di quelle dimostrazioni, che il nostro caro amico signor Evangelista Torricelli, d'immortal nome e memoria, soleva spiegare nel medesimo Studio, tra le altre di quel suo libretto delle proporzioni, che con le altre sue cose si stamperà, le quali sono la proposizione X e XI di quell'ordine. »

« Soggiunsile che in fine di questo trattatello averei voluto anco aggiungere due problemi, che sono l'ottavo e il nono del sesto libro di Euclide, risoluti dal medesimo Torricelli con una sola costruzione e dimostrazione, con brevità maestosa, e propria di quel grand'Uomo. E con tutto che questa proposizione, e le altre due sopraddette, siano ormai note a molti, sì per mezzo dello stesso Autore, che andò insegnandole col detto suo libro delle proporzioni, del quale si valeva in luogo del quinto di Euclide, dandone e lasciandone pigliar copia liberamente; come ancora per mezzo mio, che spesso come cose del signor Torricelli l'ho conferite a chi m'è paruto opportuno;

le dissi che nondimeno io mi conoscevo in obbligo di non porle alle stampe, senza la precedente licenza di V. S., la quale sola tra gli altri, a titolo di vero amico e di fedeltà incomparabile, nell' ultima malattia del Torricelli era stata scelta da esso alla custodia, non solamente di queste, che di tutte le altre scritture matematiche e geometriche rimastegli da pubblicare. »

« Quanto fino a qui le significai in voce, tanto ho pensato poi, per miglior governo di questo fatto, di replicarle nel presente foglio, che io le invio, affinchè V. S. ancora in piè di questo si contenti, come particolarmente ne la prego per mia maggior quiete e sodisfazione, di confermarmi di proprio scritto quella medesima cortese facoltà, che subito ella si compiacque di darmi sopra di ciò, assicurandola che, oltre al far noto come devo l'Autore di tali tre proposizioni, insieme con questa permissione di V. S. mi s' aggiungerà questo al gran numero dei favori, de' quali ormai sono trent' anni che io mi trovo in possesso, ed intanto io mi ratifico al solito etc. » (MSS. Gal. Disc., T. LXVIII, fol. 12).

Nel foglio, che segue in ordine a questo nel volume ora citato, il Viviani stesso scrisse così di sua propria mano, mettendo a suo piacere in forma la risposta o l' approvazione del Serenai : « Per quelle medesime ragioni, che mi mossero ier mattina a darvi subito libera facoltà in voce di poter pubblicare ogni volta queste poche cose del nostro Amico: per le medesime torno volentierissimo a concedervele, ancora adesso in scritto, come desiderate, dichiarandomi con questa che, non solo mi contento che nel disporre il trattato delle proporzioni spiegate co' principii dimostrati dal Galileo, e che volete pubblicare prontamente, voi inseriate quelle due proposizioni X e XI del signor Evangelista Torricelli, che si trovano nel suo trattato latino manoscritto *De proportionibus,* con quell' altre due unite in una proposizione, che io ho poi trovata nel foglio originale da me segnato di sotto col n.° 13; ma vi prego inoltre con istanza particolare a non tralasciare questa opportuna occasione, perchè, volendo voi già darle fuori per di chi elle sono, venite a cooperare all' onore del comune Amico, gli ponete anticipatamente in sicuro quello, che per essere ormai noto a tanti potrebbe trovare chi vi s' affezionasse come a cosa propria, ed insieme beneficate il prossimo, senza scapito d' alcuna delle Opere postume del medesimo Autore, che a Dio piacendo si sono tra poco per veder fuori, nelle quali non sarà poi errore nessuno che queste tre dimostrazioni si riveggano stampate di nuovo ai luoghi loro. Di tanto vi prego approvando, e contentandomi, e sottoscrivendomi di propria mano.... » (ivi, fol. 13).

Invece di questa risposta però, messagli in bocca dal Viviani, il Serenai scrisse di suo proprio sentimento quell' altra lettera lunga, inserita da pag. 117-21 nella prima edizione della Scienza universale delle proporzioni; pregevole lettera, per le notizie che vi si leggono relative alla storia dei manoscritti torricelliani. Questa nuova forma di concessione sostituita a quella ultimamente trascritta, non si trovava oramai più in corrispondenza con la formale domanda che la precedeva, per cui, come cosa fuor di luogo sop-

pressa, pensò il Viviani di supplirvi con quelle avvertenze, stampate in carattere corsivo a pag. 114, 116 della citata edizione. Del resto, benchè due, la X e l'XI, fossero le proposizioni, che voleva traspor nel suo dal trattato torricelliano, si contentò poi di una sola, notando in margine a pag. 47 che quella sua XIX era senza gli equimolteplici dimostrata *secondo la proposizione XI del trattato delle proporzioni del Torricelli.* Non sapremmo poi dire dove, e per quale occasione fosse scritta la seguente avvertenza al Lettore, che apparisce autografa nell'estremo lembo dell'ultimo foglio del citato volume manoscritto:

« Fin dall'anno 1674, e di nuovo nel 1690, fu stampato in Firenze il quinto libro degli Elementi di Euclide con questo titolo: *Scienza universale delle proporzioni, spiegata con la dottrina del Galileo, con nuovo ordine distesa dall'ultimo suo discepolo, e dedicata all'A. S.ma e R.ma del principe cardinale Leopoldo de' Medici, beneficientissimo mecenate dei Letterati.* In questo libro, in cui esso Discepolo, nel dare ordine alle proposizioni procura di allontanarsi men che possibile fosse da quello del proprio autore Euclide, seguitato e citato come primo maestro da que' Geometri, che scrissero dopo di lui; fu in più luoghi allegato in margine un trattato simile delle proporzioni, composto, pochi anni avanti la sua morte, dal celebratissimo Evangelista Torricelli, che ne aveva lasciato prender copia a molti suoi uditori. »

Così fatte notizie però riguardano più presto la storia del libro, che quella della scienza, dalla quale non si veniva per verità ad accrescer di molto i meriti dell'Autore, confessando egli stesso di avervi atteso in un tempo, in cui si ritrovava, per gravi indisposizioni di testa, inabile a più ardue contemplazioni. (Scienza delle proporz. cit., pag. VIII). L'opera è assai più ristretta e più elementare di quella del Torricelli, alla quale, come si disse, fu nonostante sostituita, per avere una nuova occasione di esaltare il nome di Galileo. Secondo quel che infatti egli insegna nel suo quinto Dialogo, s'incomincia dal Viviani a dimostrare la quinta definizione di Euclide, dalla quale si svolgono poi le altre proposizioni che, ordinate in un trattato nuovo, componevano quella, che portava già il titolo di *Scienza universale delle proporzioni.*

Che fosse l'opera del Viviani più ristretta di quella del Torricelli, si dimostra dall'essersi la detta scienza delle proporzioni trascurato ivi di applicarla alla Meccanica, che fu la prima e principale intenzione, per cui si fece la riforma euclidea. Forse esso Viviani cansò di entrare nel geloso argomento, perchè la legittima dimostrazione del primo teorema galileiano dei moti uniformi, che mancava affatto ai tempi del Torricelli, era stata ora ritrovata e messa in pubblico nella proposizione LXXV *De vi percussionis.* Ivi infatti il Borelli, con metodi nuovi e che nulla affatto partecipavano di quelle difficoltà, per espedirsi dalle quali tanto ebbe a faticare lo stesso Autore *De proportionibus;* dimostra insomma così in poche parole che due corpi uguali, moventisi con uguali impulsi, passano uniformemente spazi proporzionali ai tempi.

Siano nelle figure 37 e 38, qui poco addietro disegnate, que' due corpi

uguali A, D, che, con l' eguaglianza degl' impulsi ricevuti, passano per tutti i punti delle linee AB, DE in istanti di tempo rappresentati dalle infinite linee, fra sè tutte eguali, condotte da ciascuno di que' punti parallele alle AG, DH. Dalla somma di così fatti istanti resulta il tempo del moto, il qual tempo dunque è rappresentato dalla superficie dei due rettangoli GB, HE *ex methodo indivisibilium Cavalerii.* Ma i rettangoli, aventi per supposizione altezze uguali, stanno come le basi AB, DE, che son gli spazi passati dai due mobili ne' due vari tempi; dunque anche essi tempi stanno come gli spazi. Così il Borelli, promovendo la scienza, che il Lettore desiderava nel suo primo entrare al terzo dialogo delle due Scienze nuove, tacitamente veniva a insinuare che il più risoluto metodo di trattar le più sottili questioni meccaniche non era quello antico di Galileo, benchè riformato, ma l' altro nuovo proposto dal Cavalieri.

CAPITOLO III.

Del sesto dialogo aggiunto alle due Scienze nuove
ossia
Della forza della percossa

SOMMARIO

I. Dei principii, da cui dipende la forza della percossa, proposti da Aristotile, dal Cardano e da Galileo; e come fossero dimostrati falsi. — II. Del ritrovamento o della pubblicazione del Sesto dialogo galileiano: se ne esaminano brevemente le materie, e si conclude essere anch'egli informato dai medesimi falsi principii professati in gioventù dall'Autore. — III. Della reintegrazione del Dialogo galileiano pubblicato dal Bonaventuri. — IV. Degli strumenti immaginati e descritti per misurare la forza della percossa. — V. Della nuova scienza della percossa istituita, prima da Giovan Marco Marci fra gli stranieri, e poi dal Borelli nella Scuola galileiana, e di ciò che conferirono a promover la detta scienza gli Accademici di Londra e di Parigi. — VI. Delle relazioni fra gli angoli dell'incidenza e della riflessione, e fra i momenti delle percosse dirette e delle oblique

I.

Il dialogo delle proporzioni andò separato dalle altre scritture sue sorelle, dal 1674 al 1718, anno in cui si fece in Firenze la nuova edizione delle opere di Galileo, diretta da Tommaso Bonaventuri. Alle prime quattro giornate delle due Scienze nuove si vide anzi allora, non solo aggiuntavi questa Quinta, trasposta dal trattato del Viviani, ma una Sesta altresì, la quale non poteva non metter negli animi lo stupore, che si proverebbe a vedere improvviso comparire in piazza una persona, che da tanto tempo credevasi morta. Quella sesta Giornata infatti s' intitolava *Della percossa,* scrittura che tutti lamentavano, o per non avere avuto Galileo il tempo di condurla alla sua perfezione, o per essere andata smarrita fra le carte di lui: lamenti universali ultimamente raccolti insieme dal Borelli come fascicolo di

mirra, ch' egli affisse alla soglia del suo libro *De vi percussionis*. La curiosità perciò della strana apparizione, e l' importanza dell' argomento, che ci promette di venire a svelarci uno dei più astrusi misteri, in che siasi tenuta chiusa la scienza del moto; concorrono ad indirizzare lungo questi sentieri il discorso, che, per correre al suo termine più diretto e spedito, vuol rimontare in su dove la Storia ha il principio.

Non riuscirà cosa nuova, nè inaspettata ai nostri Lettori, se diciamo che il principio di questa, come dell' altra scienza del moto, è nelle Questioni meccaniche di Aristotile, nella XIX delle quali si domanda perchè una scure gravata da un gran peso e leggermente posata su un legno, lo incide appena, e lo spacca così facilmente a sollevare, e a percoter con la stessa semplice scure, benchè ora pesi tanto meno di dianzi, che quel gran carico la premeva? « An quia, risponde, omnia cum motu fiunt, et grave ipsum gravitatis magis assumit, motu dum movetur, quam dum quiescit? » (Operum, Tomus XI, Venetiis 1560, fol. 34).

S' introduce dunque dal Filosofo nella Meccanica il principio, che la velocità nel mobile aumenta il peso: principio, che alcuni poi giudicarono falso, specialmente argomentando dal fatto che la percossa producesi dal martello, anche menato di sotto in su contro la gravità sua naturale. Ciò però non sembra che possa con buone ragioni contradire a Aristotile, il quesito del quale non è intorno a ogni genere di percossa, ma a quella fatta particolarmente dalla scure, menata dai boscaioli contro un legno, che le soggiaccia posato sul suolo. Che se per gravità si voglia intender la mole, ossia la somma delle particelle materiali, da cui si misura il peso di un corpo sulle braccia di una bilancia; il discorso di Aristotile si riduce all' espressione di quell' altro più vero e più generale principio, che cioè la forza della percossa è il prodotto della velocità per la massa. La dottrina insomma, dal Filosofo professata nelle Questioni meccaniche, piuttosto che falsa, si potrebbe dire non bene e non chiaramente espressa, ciò che a fare si lasciava ai futuri commentatori del testo. I commenti però si videro apparire assai tardi, e intanto i Matematici, timidi di non smarrirsi, tornarono a calcar le ristrette orme segnate a loro innanzi dai passi del Maestro.

Girolamo Cardano fu il primo, che osò levarsi da una tal suggezione, per secondar piuttosto i deliri della sua propria fantasia. Egli ebbe, come ad altre occasioni fu da noi notato, fra i fisici contemporanei e i posteriori il più chiaro e più distinto concetto della compressione, e della elasticità dell' aria: e avendo osservato che tra la pressione e la percossa è una tal notabile differenza, che in quella il corpo premuto rimane in quiete, e in questa risalta bene spesso in frantumi; pensò che non potesse quella forza di risalto attribuirsi ad altro, che alla elasticità dell' aria, ond' è perciò che si ridusse a dire non operarsi altrimenti la percossa, che per insinuarsi a modo di cuneo ne' pori del percosso l' aria stessa, sospintavi dal percuziente con gran violenza.

Giulio Cesare Scaligero se ne rise, nella sua CCCXXXI Esercitazione.

Quel Genovese dunque, diceva, che, interrogato in giudizio chi avesse ammazzato l'uomo, rispondeva: le punte del forcone; avrebbe dovuto dir piuttosto, te giudice o Cardano, che invece fu l'aria, e i retori dovrebbero oramai lasciar di ripetere quelle loro figure, non più dicendo che fu la gioventù, la notte, venere e il vino, ma l'aria che commise il delitto. « Equidem didiceram, poi soggiunge, motum sicut pulsum addere ponderi. Nam et absque ictu sola impressione plus affertur momenti, quam quantum eius pondus efficere valeat. Quippe rapum manus cum cultro imposita non scindet, at compressione secabit. Hoc ex nisu fit, ita etiam in ictu. Aristotiles, in XIX propositione Mechanicorum, ait: impositam securim non secare, quia pondus solum habet: motum vero movere » (Francofurti 1592, pag. 1060).

Coglie di qui lo Scaligero l'occasione di dire che il suo maestro Giovanni del Giocondo, architetto nobilissimo, che solo seppe intendere ed eseguire i disegni postumi di Bramante, sciolse un giorno all'imperatore Massimiliano questo problema: « Quot pondo proportionem haberet pugnus hominis ferientis, cum seipso non feriente comparatus » (ibid., pag. 1061). E perchè, poi soggiunge, questa, insieme con altre simili invenzioni, *fortunae saevitia periere,* si volle studiar di recuperarle in un suo libro un Autore francese, le speculazioni del quale non dovevano essere tenute in poco pregio, se il Viviani le tradusse di sua propria mano, e le serbò fra le sue carte come memoriale di scienza. Fra i Manoscritti galileiani infatti, al foglio 162 del tomo 138 dei Discepoli, sotto questa avvertenza *Da un libretto intitolato* Ricreazioni scientifiche *in francese,* si legge: « Problema III. Dire quanto pesi un colpo d'un pugno, d'un martello o di un'ascie, in riguardo di quel che peserebbe s'egli stesse in riposo e senza battere. »

« Giulio Scaligero, nella sua Esercitazione CCCXXXI contro il Cardano, narra che un matematico di Massimiliano imperatore propose un giorno questa questione, e prometteva di darne la soluzione. Ma lo Scaligero non la diede altrimenti, e io la risolvo in questa maniera: »

« Prendete una bilancia e lasciatevi posare un pugno, un martello o un'asce sopra uno de' gusci, o sopra un braccio della bilancia, e mettete dentro l'altro guscio tanto peso, quanto basta per contrappesarlo. Dopo, caricando continuamente il guscio, e percotendo dall'altra estremità col pugno, martello o altro; si potrà sperimentare quanto di peso possa far sollevare ciascun colpo, e conseguentemente quanto egli valga. Perchè, come dice Aristotile, il moto che si fa nel battere aggiunge gran peso, e ciò perch'egli è più veloce. E in effetto chi mettesse mille martelli o il peso di mille libbre sopra una pietra, e la stringesse con forza di vite, di leva o di altra macchina; non gli farebbe niente, in riguardo di colui che la percotesse. Non si ved' egli che un coltello sopra il burro, o un'asce posata sopra una carta, senza percossa, non l'intacca niente? Battasi un poco sopra un legno, e si vedrà che effetto ne segue. »

Il problema era dunque risoluto dall'Autore francese, comparando i momenti della gravità con quelli della percossa, e riducendone le leggi delle

proporzioni a quelle dei pesi sulla bilancia. Galileo, in quel medesimo tempo o poco prima, era venuto nello stesso concetto, se non che, invece di riconoscerne l'inspirazione dalle dottrine aristoteliche, come fa lo scrittore delle sopra citate parole tradotte dal Viviani, incomincia, in quel suo discorso aggiunto alla *Scienza meccanica,* a trattare della percossa, ridendosi di Aristotile che, alla lunghezza del manico nel martello, ne avesse attribuita l'essenziale efficacia. Non cita però nelle Opere il luogo, dove dal Filosofo si dice questo, che pure i Matematici, incominciando da Leonardo da Vinci, avevano per verissimo, e qual legittima conseguenza del principio, che « ab eadem vi plus transfertur id extremum, quod longior a centro distat » (ibid., fol. 34), come giusto si verifica nel martello col manico più lungo. Sembrava che piuttosto avesse dovuto Galileo citar la XIX delle Questioni meccaniche, che servì di documento allo Scaligero, per ridur la scienza traviata dal Cardano sul suo retto sentiero, e che il Borelli stesso, benchè censore non troppo indulgente, ebbe, nel proemio al suo libro Della percossa, a lodare *pro sua sagacitate.*

Comunque sia, così Galileo avverso, come il francese Autore seguace di Aristotile, riducono la forza della percossa agli effetti della stadera, e delle altre macchine, nelle quali si vede « potersi muovere qualunque gran resistenza da ogni data piccola forza, purchè lo spazio, per lo quale si moverà la resistenza, abbia quella proporzione medesima, che tra essa gran resistenza e la piccola forza si trova « (Alb. XI, 124). Così, per esempio, soggiunge, un martello « il quale, avendo quattro di resistenza, vien mosso da forza tale che, liberandosi da essa in quel termine dove fa la percossa, anderia lontano, non trovando l'intoppo, dieci passi, e viene in detto termine opposto un gran trave, la cui resistenza al moto è come quattromila, cioè mille volte maggiore di quella del martello; fatta in esso la percossa, sarà bene spinto avanti, ma per la millesima parte delli dieci passi, nei quali si sarà mosso il martello » (ivi, pag. 125).

Furon queste le dottrine, che si professarono dai Matematici, fatte poche eccezioni, intorno alla forza della percossa, infino a che non venne alla luce, nel 1667, il trattato del Borelli. Il Torricelli e il Viviani intanto esplicavano quelle galileiane dottrine, illustrandole con alcuni pensieri, che dicevano di avere inteso profferire dalla bocca dello stesso Galileo nei congressi di Arcetri, e il Nardi compendiava così il Discorso aggiunto infine alla *Scienza meccanica,* confermando la proporzione ivi assegnata tra la forza del percuziente, e la resistenza che il percosso gli contrappone.

« Certo che la percossa, egli dice nella veduta XXII della Scena III, tal moltiplicazione fa di forza, che quasi mirabil sembra, attesochè vediamo, con un piccolo martello percotendo un chiodo, penetrarsi un legno durissimo, benchè, se noi sopra il chiodo ponessimo un peso dieci e cento volte più grave dello stesso martello, nulla quasi di segno c'imprimemmo. Che diremo poi se l'esperienza ne dimostri che, con un piccol martello, potremo anco una grandissima mole di luogo movere, se di percoterla lungo tempo du-

riamo? Di qui veramente apparisce che gli effetti insensibili di ciascun colpo moltiplicati divengono alla fine sensibili, massime nell'ondeggiamento di qualche mobile, o nelle sue particelle conservato: apparisce ancora che nessuno, benchè minimo atto, manca in natura di effetto. »

« Ora, per trovare la cagione della forza, che la percossa dimostra, bisogna considerar prima il peso del martello, e quanta in esso la resistenza all'esser mosso si trovi. Secondo, per quanto spazio si moverebbe cacciato dalla forza, se intoppo non trovasse. Terzo, quanta sia la resistenza al movimento di quel peso, ov' ei percote. Quarto ed ultimo, per quanto spazio si muova il corpo, che la percossa riceve. Quindi tal proporzione dalla Natura mantenersi il Galileo osserva che, quanto la resistenza del percosso è maggiore della resistenza del percotente, tanto minore spazio il percosso passerà di quello, che trascorso il percotente si avrebbe. Sia, per esempio, la resistenza del martello 10, quella del percosso 100, e pongasi che spinto il martello fosse per andare innanzi 100 braccia, non trovando intoppo: avverrà che, intoppando nella resistenza suddetta, la spingerà avanti un solo braccio, perchè, siccome la resistenza del percotente è cento volte minore di quella del percosso, così lo spazio, per il quale mosso lo stesso percotente sarebbesi, è cento volte maggiore dello spazio, per cui il percosso muovesi, talmente che, conchiudendo, diremo la forza della percossa da tal principio dipendere: che quella forza, che muover può uno di resistenza per cento di spazio, moverà cento di resistenza per uno di spazio » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 435, 36).

Fra gli stranieri, a que' tempi, il Mersenno, non sodisfatto di queste dottrine, che si professavano nella Scuola galileiana; rinnovellò la strana ipotesi del Cardano, attribuendo all'aria annidata dentro i pori del corpo percosso i maravigliosi effetti, che non produrrebbe il percuziente, o naturalmente gravitando, o compresso per via di un torchio. « Quae valde conformia iis quae de cylindro ferreo deprimendo, vel depresso, in nostris *Mechanicis* dicta sunt: nempe motum, quo aer interiicitur, aliquid habere, quod non possit a pondere, imo nec a praelis suppleri. Aer siquidem interceptus subiecti corporis poros ingreditur, illiusque partes ea velocitate comprimit et deprimit, vel cogit, ut subsiliant, quam nullum pondus, nullave pressio supplere potest » (Novar. Observat., T. III, Parisiis 1644, pag. 203).

Ad eccezione di pochi, ai quali piaceva, come al Mersenno, di ammettere la fantasia dove trovavan difficile il penetrare con la ragione, i più, anche fuori d'Italia, professavano il principio galileiano, da cui diceva il Nardi che dipende la forza della percossa. Giova tra quegli stranieri annoverare Isacco Vossio, il quale, scrivendo, in appendice al suo libro *De Nili origine,* una dissertazione intitolata *De potentiis quibusdam mechanicis,* rassegna fra quelle meccaniche potenze anche la percossa, e dice esser verissimo il già noto principio galileiano, ch' egli anzi mette in forma di proposizione, per passare con matematici argomenti a dimostrarla, ma poi soggiunge che, nè da Galileo stesso, nè da nessun altro de' suoi seguaci fu fatta una osserva-

zione importante, senza la quale non è possibile, trattandosi delle varie percosse fatte dai corpi, ritrovar la precisa misura dei loro momenti. « De viribus percussionis habet nonnulla Galilaeus, vir magnae sagacitatis, qui, licet propius veritatem attigerit, totam tamen difficultatem non sustulit. Percussionum efficaciam refert ille ad velocitatem et pondus corporis percutientis, neglecto pondere ad ictum perpendiculari, absque quo tamen percussionum momenta mensurari nequeunt » (Hagae Comitis 1666, pag. 170).

Credè insomma il Vossio di essere stato egli il primo ad osservare il fatto, e a formulare la legge che *omnis pressio fit a perpendiculari pondere,* benchè Leonardo da Vinci avesse descritti in una sua nota corpi di vario peso che, pur essendo della stessa materia e avendo altezze perpendicolari uguali, si profondano ugualmente nel tenero fango: e il Torricelli, nella quarta delle sue Lezioni accademiche, ripensando al grande effetto dell' asta infilata nel ferro della picca, che pareva peso superfluo e che dovesse perciò riuscire al colpo d' impedimento, piuttosto che di aiuto; proponeva a risolvere il problema: « Se quel legno della picca, essendo egualmente velocitato, facesse il medesimo effetto, mentre si adopra disteso in asta, e mentre si adoprasse raccolto in una palla. Così anco se una trave egualmente velocitata fosse per dare il medesimo urto, percotendo una volta per lo lungo, ed un' altra per traverso » (Milano 1823, pag. 107).

Ebbe il Vossio per risoluti i problemi, dicendo che la picca in asta e la trave per lo lungo fanno maggior effetto, perch' è dall' altezza perpendicolare, che si misura la forza dell' urto, ma questa era piuttosto l' affermazione di un fatto, che la conclusione di una verità dal suo proprio principio, rimanendo tuttavia a sapersi il perchè e in che modo l' altezza perpendicolare del percuziente conferisca a render più valido il colpo. Che poi veramente non prelucessero alle speculazioni di esso Vossio i principii necessarii a promovere utilmente la scienza, apparisce dalla soluzione di quel problema, agitato allora fra i curiosi dell' arte cavalleresca: in qual parte cioè la spada menata in giro faccia maggiore la ferita. Rispondevano alcuni nella punta, perchè ivi il moto è maggiormente veloce; soggiungevano altri nel centro della gravità, perchè ivi raccogliesi tutta insieme la potenza della materia. « Sed profecto, entra a dire in mezzo ai disputanti il Vossio, omnia haec sunt inania: non celeritatis tantum, sed et latitudinis et ponderis perpendicularis singularum ensis partium habenda est ratio » (ibid., pag. 166).

Le ferite dunque, fatte nei varii punti del taglio della spada, stanno in ragion composta della velocità del moto, e della larghezza della lama, cosicchè, in un bastone o in una verga in cui le sezioni fossero tutte uguali, la minor percossa si farebbe presso il manico, e la maggiore verso la punta. Così pure aveva concluso Leonardo da Vinci, e gli altri matematici, dietro il principio del Filosofo che *ab eadem vi plus transfertur id extremum, quod longior a centro distat;* ond' è che il Vossio non fece di nulla essenzialmente progredire la scienza della percossa, la quale si rimase perciò tra l' ipotesi fisica del Cardano, e la teoria meccanica di Galileo. E perciocchè

questa non era meno falsa di quella, non s' aveva alcuna speranza di progresso, se non dallo sgombrarsi che farebbero le vie della verità dall' uno errore e dall' altro.

L' ipotesi del Cardano pareva impossibile che avesse seguaci in uomini di senno: eppure non mancarono alcuni, i quali si misero volentieri dietro al Mersenno, principalmente sedotti dal sembrar loro che, per l' intermedio dell' aria, si spiegassero quelle compressioni e quelle espansioni dei corpi percossi, che non si comprendeva come potess' esser l' effetto della sola forza immediata nei percuzienti. Benemeriti perciò dell' avere sgombrato dall' errore cardanico i sentieri della scienza son da dire coloro, i quali dimostrarono in che modo agisca la forza della percossa in schiacciare e allargare i cedevoli corpi sotto la forza del maglio. Noi non possiamo citare il nome proprio dell' Autore di così fatta dimostrazione, essendo di ciò solamente certi che appartenne alla Scuola galileiana, trovandosi raccolte nel citato manoscritto attribuito al Magiotti, insieme con le tante altre, anche le speculazioni di lui. La questione è trattata nella sua generalità, sì rispetto ai vari generi di corpi, sì rispetto al vario modo di agir la forza sopr' essi; e solo, per maggiore semplicità e per più matematica esattezza, si suppongono sferiche le particelle integranti.

« L' acqua, si legge, cadendo da alto, si slarga per tutti i versi, ed una palla di terra fresca o di altra cosa tenera si schiaccia e allarga, ed ancora un ferro o altro si lascia traforare ed aprire, se con qualche cosa dura sarà percosso, e si distende e dilata all' incudine, perchè i componenti di quella tal materia (quali o siano tondi o di altra figura non importa, poichè il medesimo segue essendo dal colpo spinti) si allargano per altro verso, come qui sotto si vede, e siano per adesso di figura sferica. »

« Siano i cerchi EAG e CDB (fig. 40), che fra loro si tocchino, e tirisi la CG: dico che passerà ancora per il toccamento. Se essa non passerà per il toccamento, o passerà di sopra o passerà di sotto. Passi prima di sotto, e sia GRC. Tirisi, dal punto G al toccamento N, una linea retta, e dal medesimo toccamento al punto C un' altra linea retta. Perchè la GL all' LN sta come la CI alla IN, e gli angoli contenuti dai lati proporzionali sono retti; sarà il triangolo GLN simile al triangolo GIN. E perchè sopra la linea retta AB vi cade una linea retta CN, farà gli angoli conseguenti uguali a due retti. Ma in cambio dell' angolo CNI piglisi GNL, che a lui è uguale: sarà la GC una linea retta, quale passerà per il toccamento. Adunque due linee rette, partendosi dai medesimi termini G, C, conterrebbero spazio, che è impossibile, quale si dovea dimostrare. »

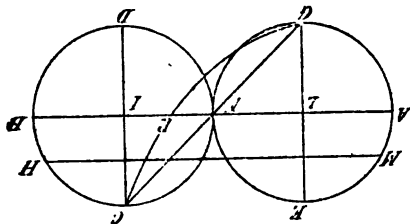



Figura 40.

« Adunque, spingendosi per linea retta, niuno dei detti cerchi muterà

sito, ma è impossibile che gl' infiniti componenti di un corpo tutti nel sopra detto modo si urtino. »

« Se siano aggravati due cerchi, che si tocchino per di fuori, dai punti dove si aggravano e spingono tirata una linea retta, quale non passi per i centri, quale ancora non passerà per il toccamento; dico che si rivolgeranno l' uno sopra l' altro verso dove i punti presi sono fuori della linea, e più facilmente, quanto più ad essa linea saranno lontani. »

« Mentre si spingano i sopraddetti cerchi per il punto M e H (nella precedente figura) la linea, la quale li congiunge, non passi per il toccamento: mentre il cerchio MNG sia aggravato in M, girerà sopra il cerchio HND, ed egli sopra MNG si rivolgerà. Il medesimo faranno i componenti di qualsivoglia cosa, mentre saranno percossi: e mentre che tutti, che è impossibile, non si urtino per quella linea che passa per i loro centri, si allargheranno e scorreranno per diverso dove » (fol. 220, 21).

Potevano i seguaci del Cardano, per queste ragioni, persuadersi che si ammaccano i corpi per effetto della forza della percossa, e non per l'espansione dell' aria dentro i loro pori rinchiusa; ond' è facile congetturare che nessuno o pochi rimanessero, oltrepassata la metà del secolo XVII, i lusingati dall' esempio, o i soggiogati dall' autorità del Mersenno. Ebbe perciò ad acquistare allora maggior prevalenza il principio galileiano, il quale a poco andò che fu anch' esso convinto di falso. Ma così sottili essendo gli agguati, non fu possibile eluderli, se non da poi che la Scienza si rese esperta in ragionare intorno alle varie proporzioni della forza, che si comunica ai corpi più o meno, secondo la quantità della loro materia. Galileo, senza dubbio, non avrebbe potuto contro i Peripatetici concludere l' uguale velocità dei cadenti di qualunque peso, senza implicitamente ammettere che gl' impulsi della gravità son proporzionali alle masse, ma non seppe applicar nè estendere questa legge a qualunque potenza. Nel 1604 il Sarpi gli proponeva la soluzione del seguente problema: Si hanno due palle, una di oro che pesa 20 libbre, e l' altra di argento di libbre 19. Supponiamo che siano ambedue mosse da forza uguale a 12: anderanno i mobili ugualmente veloci? Parrebbe di sì, risponde il Sarpi, applicandovi le dottrine stabilite insieme con Galileo intorno al moto naturale dei gravi. Ma poi conclude con approvare colui che dicesse non dover essere uguali le velocità de' due mobili di differente peso, benchè abbia ricevuto ciascuno in sè impressione uguale di forza.

« Se saranno due mobili di disuguale specie, e una virtù minore di quello, che sia capace ricevere qual si voglia di loro; si domanda se, comunicandosi la virtù ad ambedue, ne riceveranno ugualmente: come se l'oro fosse atto di ricevere dalla somma virtù 20, e non più, e l' altro 19 e non più; se saranno mossi da virtù 12, se ambedue riceveranno 12. Par di sì, perchè la virtù si comunica tutta; il mobile è capace: adunque l' effetto è lo stesso. Par di no, perchè allora due mobili di specie diversa, da ugual forza spinti, anderanno allo stessso termine con la stessa velocità. Se uno dicesse: la forza 12 moverà l' argento e l' oro allo stesso termine, non con

la stessa velocità?.... Perchè non, se ambedue sono capaci anco di maggiore, che quella qual 12 li può comunicare? » (Lettere, Firenze 1863, Vol. I, pag. 14).

Avviava così il Sarpi le questioni meccaniche in un campo nuovo e l'incertezza del risolverle dipendeva come si disse dal non essersi ancora stabilite le leggi della comunicazione dei moti, formulate già in una scienza più antica. Leonardo da Vinci, per esempio, dall'aver posto che ogni potenza è il prodotto della velocità per la quantità di materia, ne aveva concluso che, essendo le potenze uguali, le velocità stanno in reciproca ragione delle masse dei corpi. « Se una potenza, diceva, moverà un corpo, in alquanto tempo, un alquanto spazio; la massima potenza moverà la metà di quel corpo, nel medesimo tempo, due volte quello spazio: ovvero la medesima virtù moverà la metà di quel corpo, per tutto quello spazio, nella metà di quel tempo » (Les Manuscrits, Man. F, Paris 1389, fol. 26). Se fosse dunque Leonardo risorto, ed entrato in mezzo alle dispute insorte fra il Sarpi e Galileo, non solo avrebbe confermato con certezza di scienza che due mobili l'uno peso come venti, e l'altro come diciannove, sarebbero stati da ugual forza diversamente velocilati, ma avrebbe determinate le proporzioni di quelle diversità, dicendo che la palla di argento si sarebbe mossa venti diciannovesimi più veloce di quella dell'oro.

Nella risorta scienza del moto fu Niccolò Aggiunti che prese a dimostrare le prime leggi della comunicazion delle forze, per applicarla alla percossa, *la quale opera,* egli dice, *con la velocità e con la copia della materia.* Non fu dunque il Borelli, se non che in pubblico, il primo a dire e a dimostrare che la potenza percussiva, essendo le velocità uguali, dipende dalla mole corporea, risovvenendosi i nostri Lettori di aver sentito dimostrar, nel precedente Tomo di questa Storia, a pag. 188, 89, allo stesso Aggiunti che *La medesima velocità, nelle maggiori e minori quantità di materia, opera più o meno potentemente, secondo la proporzione di essa materia: e che, se saranno due mobili di uguale velocità, fatti della stessa materia, ma di quantità disuguale di essa, il momento dell'uno, al momento dell'altro, sta come la quantità della materia dell'uno alla quantità della materia dell'altro.*

Ebbe altrove il Borelli a notare che l'errore di tutti i suoi antecessori nella scienza della percossa dipendeva dal creder con Aristotile che gli effetti del colpo fossero prodotti dal peso naturale, che nel cadere si moltiplica via via: contro il quale errore poneva nel trattato *De vi percussionis* il cap. XXXIV, in cui concludeva la proposizione CXXXIV col dire essere impossibile « ut vis impetus augeat vim ponderis eiusdem corporis, et hoc profecto contingit cum pila gravis sursum proiicitur perpendiculariter ad horizontem, cum e contra nisus gravitatis fiat deorsum » (Bononiae 1667, pag. 293). Da quegli erranti antecessori però del Borelli era da escluder l'Aggiunti, il quale, in una Nota da noi trascritta e pubblicata nella pagina precedente alle due sopra citate, aggiungeva alla *percossa naturale,* di che solo s'occuparono Ari-

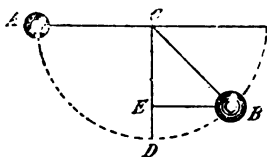
stotile e Galileo, la *percossa violenta,* fatta dal corpo mosso di sotto in su, e la *media,* che dice esser quella del corpo grave che, movendosi orizontalmente, percote. Confermava questa sua terza definizione, proponendosi di dimostrare che *Anco la sola velocità, senza il peso, opera ed ha momento:* proposizione che apparisce falsa, come noi la giudicammo, se per peso ivi intendesi la materia. Ma se intenderemo, secondo che deve aver inteso l'Aggiunti, la materia, che non esercita il suo peso, o perchè contrariato, come nel moto proiettizio all' in su, o perchè equilibrato, come nel moto orizontale; la proposizione è verissima, e le ragioni, che la dimostran tale, son più semplici e più efficaci di quelle stesse addotte nel citato cap. XXXIV *De vi percussionis.*

La morte arrestò nelle Note manoscritte dell' Aggiunti i progressi di queste speculazioni intorno alla nuova Scienza della percossa, a proseguir la quale dette, più di trent' anni dopo, opera il Borelli. Egli incomincia dall' osservare che la virtù partecipata al proietto dal proiciente è diffusiva di sè in tutte e singole le particelle del corpo, per le quali si distribuisce ugualmente: d' onde avviene che, quanto maggiore è il numero di esse particelle integranti, altrettanto sia divisa la virtù motrice, e perciò minore la velocità, la qual dunque sarà tale, da crescere col crescer della forza impulsiva, e col diminuire della quantità di materia o della massa. Le più volgari esperienze confermano questa conclusione, perchè agitando in mano, per esempio, un corpo diviso in frantumi di varia grandezza, e, gittandoli tutti insieme, si vedono i più piccoli andar più lontano degli altri.

Chiamate F, F′ le forze impresse in due vari corpi, de' quali M, M′ sian le respettive moli o masse, il discorso del Borelli si traduce analiticamente nelle formule $V = F : M$, $V' = F' : M'$, dalle quali conseguono prima di tutto le proposizioni XII e XIII, poste dall' Autore per fondamento al suo trattato *De vi percussionis;* quella che dice: « Si duo corpora eadem velocitate moveantur, vis motiva ad vim motivam eamdem proportionem habet, quam unum corpus ad aliud » (pag. 36) e questa: « Si duo corpora aequalia inaequalibus velocitatibus moveantur, eorum virtutes motivae eamdem proportionem habebunt, quam velocitates » (pag. 38). Conseguiva altresì dal sopra posto principio un' altra proposizione importante, che ricorre in ordine la XV, e nella quale il Borelli dimostra che, essendo le forze impulsive uguali, stanno le velocità reciprocamente come le moli. « Igitur si fuerint duo corpora inaequalia, quae impellantur ab aequalibus viribus motivis, erunt eorum velocitates reciproce proportionales magnitudinibus corporum impulsorum » (pag. 40).

Figura 41.

Questa proposizione nel manoscritto attribuito al Magiotti è confermata da una bella esperienza, la quale è così un poco troppo forse frettolosamente descritta: « Se appenderemo due palle A, B (fig. 41) di qualsivoglia materia, una il doppio più grave dell' altra, e quella più leggera rimo-

veremo lontano dal perpendicolo il doppio della più grave, le quali lasciate in libertà, acciò si urtino; una non spingerà indietro l'altra, perocchè tanto quanto è di lei più grave, tanto l'altra è più veloce » (fol. 205).

La fretta nel descrivere, che si accennava, trasparisce dall'apparente improprietà dell'espressione, per ridur la quale alla matematica esattezza si potrà osservar che l'Autore riferisce le distanze all'infimo punto D del perpendicolo, a partir dal quale si deve misurar l'altezza della caduta, doppia in potenza, ossia il quadrato. Così, se intendasi la palla A esser sollevata per tutto il quadrante, e perciò scendere perpendicolamente per l'altezza CD; affinchè l'altra palla B produca in D la metà dell'urto, convien sollevarla per un arco, di cui il seno verso DE sia la quarta parte di tutta DC, come era per la legge galileiana notissimo all'Autore, e com'aveva proposto il Borelli nel descriver una simile esperienza, la quale egli diceva esser benissimo accomodata all'intento, perchè i pendoli « efficiunt transitus per arcum AC (nella precedente figura) et arcum DB aequitemporaneos, et ideo, si in eodem instanti demittantur a terminis A, B, efficientur quoque percussiones in D in unico quoque instanti » (pag. 202). Il Mariotte poi descrisse, dietro tali esempi, in principio del suo trattato *De la percussion,* quella Macchina di precisione, con la quale si potevano verificar questa, e altre leggi.

Qualche cosa di simile doveva avere inventato Leonardo da Vinci, nelle Note del quale vedemmo essere stata annunziata già la proposizione XV, che il Borelli dava al pubblico per cosa nuova, e dall'essersi ignorata la quale nacquero le incertezze e i dubbi di Galileo e del Sarpi intorno alle quantità dei moti comunicati, e nacque altresì l'errore dello stesso Galileo in assegnar le proporzioni delle velocità fra il percuziente e il percosso. Diceva, come già sappiamo, essere queste velocità reciproche tra la potenza del martello, e la resistenza del chiodo, come son reciproche ne' pesi equilibrati nella bilancia, o sul declivio di un piano. *Sed negotium percussionis longe diversa ratione procedit,* ebbe a rispondere al suo gran Maestro il Borelli, giustamente osservando che, nell'atto in cui si produce l'effetto, il martello va con velocità uguale a quella del chiodo, assai diversa dalla prima, che aveva nello scender liberamente per dare il colpo. E riducendo alle già dimostrate leggi nuove queste sue osservazioni, trovava che la velocità del percuziente a quella del percosso non sta nella proporzione della semplice mole di questo alla mole di quello, ma in una proporzione molto maggiore. « Si igitur potentia percussiva non est facultas motus, nec vis ponderis, reliquum est ut sit moles corporea, quod licet videatur incredibile, vel saltem sit ignotum, ostendetur tamen in progressu huius operis, in percussione, moles corporeas suis velocitatibus reciproce non respondere. Nam malleus, licet vehementissime moveatur, antequam percussionem inferat, et antequam ad contactum percussi corporis perducatur, et resistentiam quiescentis corporis superet; tamen, in actu percussionis, non potest malleus pristinam velocitatem retinere. Cogitur enim moveri eadem velocitate simul cum corpore percusso, quandoquidem concipi nequeunt duo corpora se tangentia, et simul agitata,

quorum subsequens et propellens celerius moveatur, quam antecedens impulsum. Itaque, si comparetur velocitas mallei, antequam percussionem inferat, cum velocitate acquisita a corpore percusso, et tunc illa ad hanc velocitatem maiorem proportionem habebit, quam moles percussi corporis ad molem percutientis: habent enim eamdem proportionem quam summa corporum percussi et percutientis ad corpus percutiens » (pag. IX, X).

Dimostrava ciò il Borelli nella proposizione XIX, supponendo che un corpo indifferente al moto, come sarebbe una perfetta sfera posata sopra un piano perfettamente orizontale, ceda a qualunque più leggero impulso, a cui nulladimeno non diminuisce la virtù motiva. Sia un corpo qualunque A che, movendosi con la quantità di moto A . V, ne incontri direttamente un altro B, nello stato della detta indifferenza: ambedue procederanno insieme congiunti, e così congiunti serberanno pure la medesima quantità di moto, la quale dovrà necessariamente risultar d'imminuita velocità, essendo da A in A + B cresciuta la mole corporea. Qualunque siasi però quella velocità, che chiameremo V', la quantità di moto sarà espressa da $(A + B)\,V' = A \cdot V$, e perciò $\frac{V}{V'} = \frac{A + B}{A}$, che è maggior proporzione di $\frac{B}{A}$, assegnata da Galileo *per sufficientiam iuvenilis eius ratiocinii,* come disse il Borelli, il quale stimò che poi vecchio si fosse ricreduto, quand'ebbe a pronunziar che la forza della percossa era infinita, e in un altro dialogo prometteva come tale di dimostrarla.

Quel dialogo però non ebbe la fortuna di vederlo appresso all'Autore vivente nessuno degli amici e dei familiari, non eccettuato lo stesso Torricelli chiamato come si sa dal principe Leopoldo, per questo effetto, nell'ospizio di Arcetri. Anzi gli eredi stessi di Galileo, soggiunge il Borelli, *mihi retulerunt nec inter schedulas reperta est pagella, quae hoc titulo insigniretur,* cosicchè tutti coloro, i quali erano intervenuti nell'Accademia della Crusca ad ascoltar le torricelliane lezioni, con tanta applaudita eloquenza recitate intorno alla forza della percossa, *hanc scientiam una cum Galileo defunctam esse perpetuo questi sunt.*

Per ristorar dunque la scienza di tanta iattura, rivolgendo spesso in mente i detti di Galileo, nè potendo credere che quel grand'Uomo si fosse allucinato, pensò il Borelli di scrivere un libro a parte sull'argomento del Dialogo perduto. « At tandem, post diuturnas mentis agitationes, Dei beneficio, hanc physicae et mathematicae partem ex integro proprio marte me reperisse puto, et veram et intimam naturam energiae percussionis, eiusque causas, proprietates et effectus in hoc libro luculenter demonstrasse mihi videor, quae, saltem ob novitatem et materiae praestantiam, non iniucunda fore censeo » (pag. XII).

La Scienza nuova, che s'istituiva nel libro *De vi percussionis,* credeva dunque l'Autore fosse quella in sostanza, che s'avrebbe avuta direttamente dal grande Maestro, se si fosse potuto, dopo la morte di lui, *in armario secretiori, inter alia scripta, hanc dissertationem, calamo exaratam, sal-*

tem non omnino completam, reperiri. E ora che la scoperta è fatta, e che da quasi due secoli è stata esposta al pubblico dagli armadi segreti, possiamo noi, fatti giudici con cognizione di causa, sentenziar che il Borelli s'era ingannato a creder che la sua nuova Scienza della percossa fosse quella medesima di Galileo, il quale avesse nel Dialogo riparato all' insufficienza del suo primo giovanile giudizio. Galileo invece non aveva fatto altro da vecchio che confermare l' errore antico, assottigliando l' ingegno in speculazioni e in esperienze, per dimostrar l' analogia che passa fra i momenti della gravità nelle macchine, e i momenti delle forze nella percossa, della quale sempre ignorò le vere leggi ritrovate poi *proprio marte* dal Borelli: cosicchè insomma il sesto dialogo aggiunto alle due Scienze nuove, che costò tante lacrime al mondo, niente altro è che uno splendido tessuto di paralogismi. Così resulta dal libero esame, che noi sottoporremo al giudizio dei nostri liberi Lettori, dop' aver sodisfatta in loro la curiosità di saper come mai avvenisse la felice invenzione di ciò, che quelli stessi, i quali dovevano averlo in mano, credettero e dissero irreparabilmente perduto: ond' è che dal suo principio al termine, con più spedito passo che sia possibile, ci studieremo di condurre la nostra Storia.

II.

Terminava Galileo il suo giovanile discorso *Della forza della percossa* con questa avvertenza: « So che qui nasceranno ad alcuni delle difficoltà e delle istanze, le quali però con poca fatica si torranno di mezzo, e noi le rimetteremo volontariamente tra i problemi meccanici, che in fine di questo discorso si aggiungeranno » (Alb. XI, 125). Fra i problemi meccanici infatti, de' quali però Galileo non lasciò che la semplice proposta, e qualche frettoloso accenno alle loro soluzioni, se ne trovano alcuni relativi alla forza della percossa, come i seguenti: « Perchè le aste lunghe lanciate fanno maggior colpo. — Perchè per far diversi effetti si cerchino diverse grandezze di martello e lunghezza di manichi. — Quando si voglia ficcar l' asta nel maglio, meglio succederà percuotendo l' asta in terra, lasciando il maglio libero, che se altri brancasse il maglio con la mano e percotesse con l' asta in terra » (Alb. XIV, 321).

Che siano veramente questi quei Problemi meccanici, accennati sulla fine del citato *Discorso,* vien confermato dal veder che a risolverli s' invocano dall' Autore i medesimi principii. « Se quello, scriveva, sopra il quale si vuol percotere, cederà al percuziente con pari velocità della sua, la percossa sarà nulla. — La forza dunque della percossa vien misurata dalla velocità del percuziente sopra la cedenza del percosso » (ivi): nè ciò vuol dir altro, se non che la potenza e la resistenza stanno reciprocamente come le loro velocità,

secondo che sempre accade in tutti gli altri meccanici strumenti. Non si vede però come qui vengano a togliersi di mezzo le difficoltà e là le istanze, che potessero sovvenire alla mente di coloro, ne' quali si volevano persuadere così fatti principii, e ciò s' intende essere avvenuto perchè rimasero que' meccanici Problemi un semplice proposito, abbandonato affatto da Galileo insieme con le giovanili speculazioni della forza della percossa, le quali, quando tornarono ad agitargli la mente, pensò anche a esporre il già maturo concetto sotto più nobile e splendida veste.

L' occasione, che fece Galileo già vecchio ritornar sulle abbandonate giovanili speculazioni della percossa, apparisce manifesta da ciò, che si legge nel IV dialogo, dove al Salviati, che terminava il suo lungo discorso col far osservare i vari casi, e le varie condizioni di moto e di posizion del percosso, che conferiscono a produrre più o men gagliardo il colpo del proietto; il Sagredo soggiunge: « Il ricordar V. S. questi colpi e queste percosse mi ha risvegliato nella mente un problema, o vogliam dire questione meccanica, della quale non ho trovato appresso Autore alcuno la soluzione, nè cosa che mi scemi la maraviglia, o almeno in parte mi quieti l' intelletto. E il dubbio e lo stupor mio consiste nel non restar capace onde possa derivare, e da qual principio possa dipendere l' energia e la forza immensa, che si vede consistere nella percossa, mentre col semplice colpo di un martello, che non abbia peso maggiore di otto o dieci libbre, veggiamo superarsi resistenze tali, le quali non cederanno al peso di un grave, che senza percossa vi faccia impeto solamente calcando e premendo, benchè la gravità di quello passi molte centinaia di libbre » (Alb. XIII, 247). Che se fosse alcuno curioso di saper con certezza il tempo, in cui le teorie dei proietti ricondussero Galileo alla contemplazione degli effetti della percossa, potremmo sodisfarlo dicendo che fu verso il 1634, nel Gennaio del qual anno aveva già concluso che *qualunque lieve percossa aveva forza infinita:* conclusione che, annunziata all' Aggiunti, rispondeva essere *veramente mirabilissima* » (Alb. X, 13).

L' intenzione poi di proporre in dialogo, in quegli stessi discorsi intorno alle due Scienze nuove, quel che aveva quarant' anni prima pensato di ridurre fra i Problemi meccanici, è apertamente espressa dallo stesso Salviati, il quale così rispondeva al Sagredo, mostratosi desiderosissimo di sapere quel che intorno alla forza immensa della percossa avesse Galileo speculato di nuovo: « E perchè omai so che la curiosità di V. S. volentieri sentirebbe quei pensieri, che si allontanano dall' opinabile, non aspetterò la sua richiesta, ma le dò parola che, spedita che averemo la lettura di questo trattato dei proietti, gli spiegherò tutte quelle fantasie, o vogliam dire stravaganze, che dai discorsi dell' Accademico mi son rimaste nella memoria » (Alb. XIII, 247).

Sembrerebbe di qui che il primo pensiero fosse stato quello di soggiungere il trattato della percossa in questo stesso dialogo quarto, dopo quello dei proietti, al quale si voleva aggiungere, come complemento dei moti parabolici e dell' arte di dirigere i tiri, il discorso dell' uso delle catenuzze. Ma perchè la giornata, benchè protratta a sera, non poteva a tanto colloquio non

riuscire scarsa, a Simplicio, che chiedeva fosse mantenuta la data promessa d' esplicare qual sia l' utilità, che dalle catenuzze si può ritrarre, e dopo questo arrecare le speculazioni che si diceva essere state fatte dall' Accademico intorno alla forza della percossa; il Salviati così rispondeva: « Assai per questo giorno ci siamo occupati nelle contemplazioni passate: l' ora, che non poco è tarda, non ci basterebbe a gran segno per disbrigarci dalle nominate materie: però differiremo il congresso ad altro tempo più opportuno » (ivi, pag. 266).

Ciò significava che in un altro Dialogo a parte si sarebbe trattato della forza della percossa, e dell' utilità delle catenuzze negli usi ballistici, di che era incominciato a farsi il disteso, quando già l' Elzevirio aveva finito di stampare tutto quel che riguardava i proietti. Ma perchè, alle difficoltà dell' argomento aggiungendosi quelle della vista, che ogni giorno più si affievoliva, Galileo conosceva che troppo penoso, a voler dare l' opera compiuta, sarebbe stato per sè e per gli editori l' indugio; prese risoluzione di pubblicare intanto i quattro dialoghi, aspettando per aggiungervi l' altro l' occasione, che si credeva prossima, di una ristampa. La difficoltà dell' argomento si studiava di superarla con la meditazione più intensa e, servendosi della mano di Marco Ambrogetti, suppliva in parte all' insufficienza della sua propria vista, Così, il Dialogo, verso la fine dell' Ottobre del 1638, era stato condotto infino a quel punto, in cui il Salviati termina il suo discorso intorno all' effetto, che nasce, quando negli strettoi, allo spingere senza percossa, s' aggiunge una percossa, facendo un composto d' ambedue (Alb. XIII, 329). La proposta del Viviani intorno alla dimostrazione del principio supposto divagò Galileo dall' intrapreso argomento, ma che avesse intenzione di ritornarci sopra, per ridurlo ad effetto, apparisce da ciò che scriveva il dì primo Agosto 1639 al Baliani del migliorare e ampliare lo scritto e pubblicato da sè, infino a quel tempo, intorno al moto « con aggiungervi altre speculazioncelle, ed in particolare quella attinente alla forza della percossa, nell' investigazione della quale ho consumate molte centinaia e migliaia di ore, e finalmente ridottala ad assai facile esplicazione, sicchè altri, in manco di mezz' ora di tempo, potrà restarne capace. E qui voglio tornare a dirgli che non ho memoria alcuna di quelle scritture, che Ella dice essergli state mandate già come pensieri del Vieta, da me affermatogli essere miei: epperò desidererei di rinfrescarmi col suo favore la memoria, ed in particolare dello scritto intorno alla percossa, il quale non può essere se non imperfetto, essendochè quello, nel quale io mi quieto, non è stato da me ritrovato salvo che da pochi anni in qua, nè so io di averne dato fuori intera notizia » (Lettere pel trecent. natalizio cit., pag. 46).

Galileo dunque aveva dimenticato affatto quel suo *Discorso primo ed antico,* ch' ei volle rivendicare dal Vieta, a cui si attribuiva, benchè lo tenesse per cosa imperfetta, e da non farne perciò nessun conto. Dicendo poi che non s' acquietava in altro, che nelle cose ritrovate da pochi anni in qua, mostrava di compiacersi del nuovo dialogo, di cui diceva di non averne dato

fuori a nessuno notizia, e incorava una dolce speranza d'aver presto a darlo compiuto, premettendolo, perchè più gli premeva, e contro le prime intenzioni, al trattato delle catenuzze, benchè più immediatamente questo si riferisse ai proietti. Col Viviani però, com'apparisce dal primo di questi capitoli, s'intrattenne in migliorare e in correggere le parti già stampate, piuttostochè in aggiungervene delle nuove, e, venuto il Torricelli, si sa bene che in tutt'altro fu impiegato il tempo, che in speculare e scrivere sulla forza della percossa.

Certo una gran curiosità ci frugherebbe di sapere il fine, perchè Galileo tenesse così gelosamente occulta la notizia di que' fogli scritti intorno alla detta forza, non a solo il Viviani, ma allo stesso Torricelli, il quale, mentre da tutti si credeva esser venuto a dispensare i tesori raccolti in Arcetri, si udì con grande meraviglia introdursi nell'Accademia, con queste parole, a leggere intorno alle proprietà e agli effetti delle percosse e degli urti: « Se la fortuna non avesse invidiata la gloria di questo scoprimento al nostro secolo, già era certo che il famosissimo Galilei lavorava questa gioia, per arricchirne il monile della toscana Filosofia. Molte cose nondimeno da' suoi scritti e da' suoi ragionamenti familiari si raccoglievano intorno alla percossa, e due fra le altre: cioè una, l'esperienza di certi archi, con cui s'ingegnava di dimostrare l'immensità di detta forza: l'altra erano epiteti iperbolici, coi quali dava manifestamente a divedere ch'egli avesse fermo concetto nell'animo che la forza della percossa fosse infinita » (Lez. accad. cit., pag. 68): e soggiungeva esser venuto per rintracciare col proprio ingegno le vestigia di quelle notizie, raccolte a voce e lette in alcuni frammenti rimasti degli scritti di Galileo, i quali frammenti, come si confermerà dalle cose che saremo per dire, si riducevano a quelli, che si leggono dalla linea 29, a pag. 330, infino alla fine del VI dialogo stampato nella edizione completa dell'Albèri.

Del Dialogo incominciato, disteso con l'aiuto manuale dell'Ambrogetti, e condotto al punto che dicemmo di sopra, non ebbe dunque notizia dal suo ospitatore nemmeno il Torricelli, intorno al qual fatto rimane insodisfatta la nostra curiosità di sapere per qual fine, invece di proseguire addiritto, divertisse Galileo il valido aiuto del suo ospitato intorno a un altro argomento, che, se non era estraneo, non si riferiva però, se non che accidentalmente, al soggetto dei discorsi e delle dimostrazioni del moto. Forse si riprometteva il buon Vecchio più lunga vita, la quale venutagli inaspettatamente meno, fece sì che, fra gli altri scritti postumi, rimanesse anche quello, al quale aveva dato mano, inconsapevole di ciò che scriveva, l'Ambrogetti.

Colui che, avendone intelligenza, ebbe primo a veder quegli scritti, fu il figliolo ed erede dell'Autore Vincenzio, il quale, dettandogliene, fece prenderne copia al Viviani, ed egli sulla stessa copia scrisse poi questo titolo, e questa nota: « Ultimo congresso del signor Galileo intorno alla forza della percossa, datomi a copiare dal signor Vincenzio Galilei, dopo la morte del Padre. Questo non è stampato, ma l'originale si trova appresso gli eredi di detto Vincenzio, e non mi sovviene se sia di mano del medesimo signor Ga-

lileo, oppure di Marco Ambrogetti, come piuttosto io mi credo, o se fosse in foglio o in quarto. Ne lasciai di questo pigliar copia al padre Francesco delle Scuole pie, cioè a don Famiano Michelini, in tempo che egli abitava al portone di Annalena, ed egli poi mi disse averne dato altre copie » (Nelli, Filoa IX, fol. 54).

Sembra però che fossero queste copie poco diffuse, e che quelli stessi, i quali le presero, le tenessero fra le loro carte dimenticate, intantochè, nel 1665, nessuno in Toscana, non eccettuato lo stesso principe Leopoldo, sapeva nulla di quest' ultimo congresso intorno alla percossa, ritrovato fra gli scritti postumi di Galileo. Il Borelli perciò, per rintracciare anch' egli col proprio ingegno le vestigia di quelle cognizioni, che si lamentavano da tutti con grave danno perdute, aveva seco stesso proposto di scrivere il trattato *De vi percussionis,* del qual proposito dava così avviso, per lettera del dì 6 Aprile 1665 da Pisa, al principe Leopoldo: « Sono entrato a speculare la natura e la proprietà della forza della percossa, soggetto intorno al quale il gran Galileo vi speculò gran tempo, ma non ci lasciò nulla in scritto, se non che tal forza fosse infinita. Ora, se la passione non m' inganna, mi pare d' aver trovato il capo di questo bandolo molto intrigato, e procurato di perfezionare e poi scrivere questi concetti, se pure mi riuscirà cosa buona » (MSS. Cim., T. XVIII, fol. 152).

Il Principe mandava, per lettera autografa del dì 9 Maggio appresso, la bella notizia a Roma a Michelangiolo Ricci, rallegrandosi nella speranza che s' avesse a ristorare la toscana Filosofia della impotenza di Galileo a distendere i suoi concetti, al qual fine soggiungeva di aver inutilmente condotto a Firenze il Torricelli (ivi, T. XXIII, fol. 113): e il Ricci rispondeva così due settimane dopo, consolandosi anch' egli che al danno irreparabile s' apprestasse qualche ristoro: « Si fece gran perdita con la morte del signor Galileo, e specialmente della dimostrazione, tanto stimata da lui e da tutti gli intendenti, della forza della percossa: materia egualmente ardua e curiosa, per la quale ha ingegno molto proporzionato il signor Borelli » (ivi, T. XVIII, fol. 188).

Il Viviani, che si sentiva continuo venire intorno agli orecchi il mormorio di questi lamenti, reprimeva i desideri, e mortificava la pietà, che lo avrebbe consigliato d' uscire in pubblico a consolarli: e poi, dopo aver ritratto lo sguardo da quella copia, che aveva presa a dettatura dal signor Vincenzio, sogghignava, leggendo così nel proemio al libro *De vi percussionis:* « Cum autem hoc Galileus postremis suae vitae annis scripsisset, sperabatur post eius mortem in armario secretiori, inter alia scripta, hanc dissertationem calamo exaratam, saltem non omnino completam reperiri debere: sed, non sine amicorum tristitia, nec inter schedulas reperta est pagella, quae hoc titulo insigneretur, ut Galilei haeredes mihi retulerunt, Idipsum testatus est clarissimus Torricellius qui, ut audio, conatus est vestigia aliqua huius cognitionis inquirere, in suis lectionibus calamo exaratis, ... et post eius mortem stetit Florentiae de hac re altum silentium » (pag. IX, X).

Le ragioni di quest' alto silenzio non erano di defraudare la scienza, nè d' invidiare alla gloria di Galileo, cose tanto aliene dall' animo del Viviani, ch' ebbe a farsi una gran violenza di tenere occulta la preziosa notizia, la quale voleva concorresse fra le altre come pietra monumentale all' edifizio, che meditava di erigere al suo grande Maestro, affinchè fosse meglio conosciuto dagli invidiosi Francesi, dedicando l' opera al loro re Luigi XIV. Il timore di essere prevenuto, come gli avvenne di fatto riguardo al trattato delle resistenze, lo consigliò a tenere quell' alto silenzio anche con lo stesso principe Leopoldo, e intanto, per illustrare il Dialogo che, comparendo nella vita e nelle opere di Galileo inaspettato, avrebbe con sorpresa grande di tutto il mondo tolto via le lunghe e antiche querele; il Viviani pensava di dimostrare più chiaramente certe cose, e inventava e descriveva strumenti nuovi, per meglio confermar quelle, che credeva ammirabili verità, insegnate intorno al modo e alle ragioni della percossa in persona del Salviati. E perchè insieme coi laboriosi commenti avessero i Lettori sott' occhio più fedele e completo il testo, essendo già di Vincenzio Galilei rimasto erede il figlio Cosimo, appresso al quale si ritrovavano le carte manoscritte dell' avo, si rivolse a esso Cosimo per collazionar la copia con l' originale, e per esaminar meglio, ciò che non aveva potuto fare, quando alla presenza del detto signor Vincenzio, che teneva quell' originale in mano, scriveva a dettatura; se altre carte ci fossero, in cui si leggessero della percossa pensieri sparsi o interlocuzioni staccate.

Trovò, così diligentemente collazionando, essere la sua copia mancante di un passo, che il dettatore dovette aver saltato per inavvertenza: e per rammemorarsi il luogo e il discorso, che voleva essere aggiunto, scriveva così in una sua nota, che si legge a tergo del fol. 16, P. V, T. IV, de' MSS di Galileo: « Nel congresso ultimo mio manoscritto, a c. 8, dopo il nono verso, deve seguitare così, secondo l' originale del Galileo, alle parole che dicono: *computandovi il primo braccio, che questo scese libero e solo* — SAGR. Io veramente inclino a credere questo stesso, etc. » (Alb. XIII, dalla lin. 22-37 della pag. 321). Trovò altresì, come s' aspettava, alcuni pensieri sparsi, il primo de' quali trascriveva nel Tomo, e sopra la prima faccia del foglio sopra citato, premettendovi questa avvertenza: « *Da un foglio originale del signor Galileo, di sua mano, tra le cose della percossa.* In ogni mobile, che deva esser mosso violentemente, pare che siano due spezie di resistenza, etc. » (Alb. XIII, dalla linea 33-37 della pag. 329, e dalla 1-23 della pag. seguente). Altri simili pensieri trovò pure sparsi in alcune carte slegate, ch' egli diligentemente trascrisse a c. 37-41 del T. III, P. VI, de' citati MSS. galileiani, forse con quell' ordine, che aveva dato prima a loro il Torricelli, e con questa avvertenza in principio: « *Roba copiata da un esemplare del Galileo, che si trovava in mano del signor Vincenzio suo figliolo, di mano di questo, e tutto appresso del signor Cosimo.* Il momento del grave nell' alto della percossa, etc. » (Alb. XIII, dalla linea 29-37 della pag. 330, infino alla fine).

Questi pensieri sparsi gli aggiunse il Viviani in fine alla copia del Dialogo, che gli aveva dettato il signor Vincenzio, e ch' era quello incominciato

dallo stesso Galileo a distendere con l'aiuto dell'Ambrogetti, il termine del qual Dialogo, lasciato a mezzo, è nell'interlocuzion del Salviati, che termina alla linea 32 della pag. 329 nella citata edizione completa dell'Albèri. Così, sull'originale completata la copia e corretta, la custodiva gelosamente il Viviani per pubblicarla a suo tempo fra le opere postume di Galileo, dopo il trattato delle Resistenze. Andata l'intenzione fallita, per le avventure da noi narrate nel cap. VIII del Tomo precedente, rimase, fra le altre carte scritte in simile soggetto dal Viviani, abbandonato anche il Dialogo della percossa. Avrebbe potuto cogliere nel 1674 l'occasione di pubblicarlo nel dare, dopo la *Scienza delle proporzioni,* quel suo *Ragguaglio delle ultime opere del Galileo,* ma erano a quel tempo usciti alla luce, non il libro solo del Borelli, ma il trattato del Wallis, dai quali manifestamente si concludeva la falsità del concetto galileiano intorno alla natura della forza della percossa. Per non volgere perciò in biasimo le lodi, che dava al suo Maestro il mondo, immaginandosi ch'egli avesse speculate le verità recondite e maravigliose, ch'egli stesso diceva; fu contento il Viviani a fare un semplice cenno del ritrovarsi appresso di lui quel che da tutti si rimpiangeva, con irreparabile danno, perduto.

Narra come, rimasto erede di Galileo il figliolo di lui Vincenzio, col quale seguitò a intrattenere l'antica familiare amicizia; gli dettasse, perchè ne pigliasse copia, tre diverse scritture, ritrovate inedite fra le altre carte di suo padre. La prima conteneva il disteso di sei Operazioni astronomiche, e la seconda consisteva in dodici Problemi e Questioni spezzate. « La terza scrittura dettatami, prosegue così a narrare lo stesso Viviani, è un altro principio di nuovo congresso intitolato *ultimo,* forse così detto dal Galileo, avanti che gli venisse concetto di ridurre anche le postille a' suoi oppositori in forma di dialogo. In questo congresso il Galileo introduce al solito per interlocutori il Salviati ed il Sagredo, escludendo Simplicio, e ponendo per terzo il signor Paolo Aproino, stato già suo uditore delle Matematiche in Padova. Tal principio è disteso in dialogo, in sei fogli in circa, dove si spiegano alcune sperienze fatte dal Galileo fin ne' tempi ch'egli era colà lettore, allora che andava investigando la misura della forza della percossa, che in ultimo egli considerò come infinita, e questa materia, dopo spiegata l'esperienza, voleva il Galileo trattar matematicamente in tutto il restante del Congresso, come terza Scienza, dopo le due già promosse da lui medesimo, e con questa finir di pubblicare il rimanente delle sue più elaborate fatiche, quale sarebbe stata questa, intorno alla quale egli medesimo disse aver consumato molte migliaia di ore speculando e filosofando, ed averne in fine conseguito cognizioni lontane da' nostri primi concetti, e però nuove e per la loro novità ammirande » (Scienza univ. delle proporz. cit., pag. 103).

Divagato il Viviani di qui un poco il discorso in deplorare la perdita immensa delle preziose speculazioni, rimaste entro sì ricca miniera d'un tanto Filosofo e Matematico, e consolatosi che fosse venuto a ristorare il danno, per ciò che s'appartiene alla percossa, il celebratissimo Gian Alfonso Borelli, che egregiamente trattò il subietto nella nuova opera sua; « ma tornando, poi sog-

giunge, alla copia ch' io mi ritrovo della scrittura intitolata *Ultimo congresso*, questa, in alcuni luoghi dov' io aveva qualche difficoltà, mi fu in aiuto a riscontrarla col proprio suo originale il molto reverendo signor Cosimo, figliolo del suddetto signor Vincenzio, e degno nipote del Galileo » (ivi, pag. 104).

Coloro, ch' ebbero a leggere così fatte notizie, pensarono che quest' ultimo congresso, di cui qui parla il Viviani, doveva ritrovarsi postumo fra i manoscritti, de' quali sapevano essere stato legittimo erede il nepote di lui Jacopo Panzanini. Tommaso Bonaventuri perciò, che del Panzanini era amico, lo richese del detto manoscritto, per aggiungerlo, insieme con quell' altro delle proporzioni, ai quattro dialoghi delle due Scienze nuove, nella edizione, che nel 1718 stava preparando delle opere di Galileo. La pubblicazione però non fu fatta col criterio, che sarebbesi desiderato superiore a quello della maggior parte degli editori toccati in sorte al grand' Uomo. Superficialmente leggendo *Principio della quinta Giornata,* scritto in capo al dialogo delle proporzioni, e *Ultimo congresso* intitolato quello della percossa, non dubitò il Bonaventuri di posporre in ordine questo a quello, non badando all' anacronismo, in che avrebbero offeso i Lettori più attenti. Bastava del resto aver portata questa attenzione sopra le linee di stampa, con le quali incominciano le due scritture, per avvedersi che il dialogo della percossa si rappresenta *quindici giorni* dopo il colloquio tenuto intorno ai proietti (Alb. XIII, 306), e quello delle proporzioni con l' *interposizione di qualche anno* (ivi, pag. 288).

La rappresentanza del dramma apparisce dunque nella prima edizione fiorentina turpemente deformata, per sola colpa dell' editore, il quale avrebbe dovuto pensare, qualunque si fosse l' autorità del titolo, che la prima autorità era quella della ragione, la quale avrebbegli suggerito che l' avvenimento dopo quindici giorni precede a quello dopo qualche anno. Vero è bene che non era il nodo estricabile, se non a colui, che avesse avuto le necessarie notizie storiche; intorno a che non sappiamo se il Bonaventuri, che poteva avere a mano, come noi i documenti da rintracciarle, sia in tutto meritevole di scusa: imperocchè il titolo di *Giornata quinta* fu posto al Dialogo delle proporzioni, come si fece osservare altrove, quando ancora il Torricelli non sapeva che Galileo avesse incominciato a stendere il Dialogo della percossa: e il titolo di *Congresso ultimo* fu messo a questo stesso Dialogo della percossa, quando Galileo non pensava ancora di lasciarlo a mezzo, per saltare a scriverne, con l' aiuto del Torricelli, un altro d' argomento molto diverso.

Avrebbero queste ragioni, non solo dato la licenza o il diritto, ma imposto il dovere all' editore di mettere, in luogo della Giornata quinta, il trattato della percossa, e quello delle proporzioni in ultimo luogo, non ostante il titolo scritto dal Torricelli e da Galileo. Ma perchè, come spesso segue, l' altrui autorità prevalse al proprio giudizio, s' incorse in quella deformità, la quale tuttavia resta, e resterà nelle opere galileiane indelebilmente impressa, come le deformità del corpo, che si contraggono dalla natura.

Tale è la storia della pubblicazione del Dialogo della percossa, che il Viviani riguardava come una terza Scienza nuova. E tale pure aspettavasi che

gli dovesse riuscire al giudizio anche il Borelli, il quale congetturava che, non avendo trovato riscontrar le leggi della comunicazione dei moti con i già ammessi giovanili principii, *ab hisce difficultatibus excitatus* si fosse volto Galileo da vecchio a professar della natura della percossa più sane dottrine. Non era questa però che una dolce lusinga, perchè della promessa nuova Scienza della percossa annunziava il Sagredo così la conclusione, a mezzo alla quarta Giornata: « Io vorrei pur trovar modo di misurar la forza di questa percossa, la quale non penso però che sia infinita; anzi stimo ch' ell' abbia il suo termine, da potersi pareggiare, e finalmente regolare con altre forze di gravità prementi o di leve o di viti o di altri strumenti meccanici, dei quali io a sodisfazione resto capace della moltiplicazione della forza loro » (Alb. XIII, 247).

Poteva di qui argomentare il Borelli che Galileo da vecchio non aveva trovata nessuna difficoltà a professare le antiche dottrine, seguitando a comparare il moto del martello che percote coi pesi morti sostenuti sul declivio dei piani, o sui bracci delle leve. Vero è bene che ivi il Salviati annunzia tre proposizioni, che furono poi dimostrate nel libro del Borelli, ma essendo di natural senso comune, e di semplice fatto, i principii dai quali si concludono quelle stesse proposizioni; non si poteva congetturare di lì che Galileo si fosse almeno introdotto alla scoperta delle vere leggi, dalle quali si regola la forza della percossa.

Le tre dette proposizioni corrispondono alla XXX, XXXI e XXXIV *De vi percussionis,* ma Galileo le pronunzia com' evidenti per sè medesime. Chi potrebbe infatti metter dubbio intorno alla prima, che dice: « Colui che corre per ferir con una lancia il suo nemico, se nel sopraggiungerlo accaderà che quello si muova, fuggendo con pari velocità, non farà colpo, e l' azione sarà un semplice toccar senza offendere » (Alb. XIII, 245): o cercar dimostrazione della seconda, che immediatamente così si soggiunge: « Ma se la percossa verrà ricevuta in un soggetto, che non in tutto ceda al percuziente, ma solamente in parte; la percossa danneggerà, ma non con tutto l' impeto, ma solo con l' eccesso della velocità di esso percuziente sopra la velocità della ritirata e cedenza del percosso? » (ivi, pag. 246).

La terza proposizione che da Galileo s' annunzia: « Quando il percosso si movesse con moto contrario verso il percuziente, il colpo e l' incontro si farebbe tanto più gagliardo, quanto le due velocità contrarie unite son maggiori, che la sola del percuziente » (ivi); sembra che avesse bisogno d' esser dichiarata con qualche discorso, come il Borelli fa nella detta sua XXXIV: ma basta fare una semplice riflessione per riconoscerla vera. Suppongansi per esempio due corpi A e B (fig. 42) che, venendosi incontro, si urtano in D con le velocità CD, DF: è chiaro che l' urto ricevuto dal corpo B in D, per essergli il corpo A venuto incontro da C, è quel medesimo che riceverebbe, se fosse

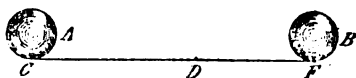



Figura 42.

andato a percotere nel medesimo corpo A, rimasto immobile in C, con la velocità FC.

Da queste verità non era dunque promossa la scienza, e tanto meno era promossa da ciò, che ivi appresso il Salviati soggiunge della percossa obliqua, la quale si dice dover esser più debole della diretta, *e più e più secondo la maggiore obliquità* (Alb. XIII, 246), ossia secondo gli angoli dell'incidenza. Da nessuna parte insomma aveva intorno a ciò progredito il Salviati dei Dialoghi nuovi, applicando all'urto dei corpi ponderosi quel falso teorema, ne' primi dialoghi pronunziato intorno alla luce, dalla quale vengono le superficie illuminate più o meno, *secondo che i raggi illuminanti vi cascano sopra più o meno obliquamente* (Alb. I, 91). Se lo sviscerato ossequio perciò, e il desiderio di magnificar tutto ciò che si riferiva al Maestro non avessero fatto passare il Borelli sopra questi, che dalle cose dimostrate nel suo proprio libro apparivano errori manifesti, non sarebbesi lusingato d'aver dovuto vedere, se la sorte non l'invidiava, aggiunta alle altre due nuove la terza scienza della percossa. Ma le lusinghe non hanno oramai più potere sopra di noi, fatti certi de' pensieri di Galileo, sopra i quali vogliamo dare una breve scorsa, per confermare quel che si diceva: non essere cioè per altro scritto il Dialogo, che per rimovere le difficoltà e le istanze nate in chi, nella *Scienza meccanica,* avesse letto il primo giovanile Discorso.

Incomincia infatti l'Aproino a rivelare le speculazioni dell'Accademico, le quali tendevano a questo principalmente: a dimostrare cioè che, come nelle altre macchine, così nell'operazione della percossa interviene il movimento del percuziente congiunto con la sua velocità contro il movimento del resistente, ed il suo poco o molto dovere esser mosso; ond'essendo simili i modi dell'operare, simili anco saranno del percotere e del sollevar pesi le ragioni delle misure. Fu dall'intenzione di dimostrar ciò che si condusse, per prima cosa, a immaginar l'esperienza della stadera, che da una parte risente l'urto fatto da un filo d'acqua cadente giù da una secchia sul fondo di un'altra simile secchia a lei sottoposta, e dall'altra sostiene un peso morto, per misurar con esso la forza della percossa. Ma perchè, ignorandosi le leggi idrauliche scoperte poi dal Castelli e dal Torricelli, non si sapeva misurare il peso dell'acqua, rimasta in aria fra le due secchie, e non si poteva perciò dedurne la quantità precisa dell'urto contro il fondo della secchia inferiore, dovè Galileo rivolgersi ad altre esperienze.

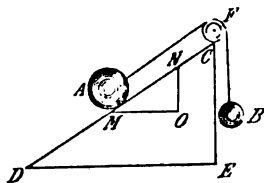
Fra queste scelse quella del palo confitto dalla berta, della quale si poteva misurar la caduta, come si poteva del palo misurare a ogni colpo la quantità della trafitta. Supponeva che, essendo la berta cento libbre, cadendo dall'altezza di quattro braccia conficcasse il palo per quattro dita, la qual fitta fosse parimente operata da un peso morto di mille libbre. Tornando a ripetere il colpo, il palo anderà ancora più giù: per minore spazio però di prima, il quale supponiamo che sia ridotto a due dita. Se come si è fatto, serbando il medesimo peso e la medesima altezza del cadente, si tornasse a soprapporre il medesimo peso morto delle mille libbre, non se ne vedrebbe

l'effetto, se non a condizione che fosse un tal premente molto maggiore. Tanto poi maggiore dovrebb' essere più e più, per far le fitte uguali a quelle del terzo, del quarto, del quinto colpo della berta: cosicchè ritrarre si può, conclude il Salviati, *la forza della percossa essere infinita, o vogliam dire indeterminata, e indeterminabile* (Alb. XIII, 314).

Qui però, al principale intento del dimostratore, s' attraversa negli ascoltanti una difficoltà, sembrando che negli ordigni meccanici non si verifichi questa infinità di forza, che s' attribuisce alla percossa. Ma il Salviati risponde ch' ei perciò non credè doversi, nel percotere e nel sollevar pesi, procedere dalla Natura con mezzi diversi, e conferma particolarmente il suo detto con l' esempio della stadera, nella quale, egli dice, « è manifesto che un piccolissimo peso di una libbra, scendendo, alzerà un peso di cento, e di mille e più quante ne piace, se noi lo costituiremo nell' ago cento o mille volte e più lontano dal centro, che l' altro peso massimo: cioè se noi faremo che lo spazio, per lo quale scenderà quello, sia cento e mille e più volte maggiore dello spazio della salita dell' altro: cioè se la velocità di quello sia cento e mille volte maggiore della velocità di questo » (ivi, 317).

Credendo di aver così rimossa ogni difficoltà, e gl' interlocutori confessando di esserne rimasti sodisfatti, procede innanzi il Salviati col suo discorso a considerare gli effetti della berta, che ficca il palo, i quali effetti, essendo ogni volta diversi, domanda quale di questi si dovrà prendere per ferma e certa misura della forza del colpo, che pure, quanto a sè, è sempre il medesimo. La nuova difficoltà si trova dal promotore stesso insuperabile, per cui si consiglia di tentare altre esperienze e altri modi di riuscire ad avere una misura costante di quegli effetti. Immagina perciò di avere sopra un sostegno posato un gran peso, a cui, per mezzo di una fune che passi per la gola di una carrucola fissa, sia congiunto, liberamente pendulo, un altro peso minore. Questo è certo che stando quieto non moverà l' altro, ma sollevandolo, e poi lasciatolo di lì cader liberamente, darà, per l' impeto conceputo nella discesa, alla corda una tale strappata, che sarà al gran peso come un colpo, che lo voglia cacciare in su. Supponendo ora che la gravità del gran solido posto in quiete sia per esempio cento volte maggiore della gravità del piccolo peso, cadente dall' altezza di un braccio, sarà, dice il Salviati, dimostrato che si osserva nella percossa la medesima regola, che negli altri strumenti meccanici, se si troverà che il gran peso sia, per la strappata del minore, sollevato per un solo centesimo di braccio.

Figura 43.

Per giungere alla promessa conclusione, invocando il teorema primo dimostrato nella terza giornata, riduce il Salviati a equabili i moti accelerati della caduta del piccolo peso e del balzo del grande, cosicchè gli si viene lo strumento delle esperienze a trasformare in un piano inclinato, sopra il quale il peso A (fig. 43) sia sostenuto dal peso B, pendente dalla carrucola all' altra estremità della corda;

dov' è manifesto, egli dice, la resistenza del grande esser sempre ed in tutti i luoghi la medesima, il che non accade nella resistenza del chiodo e del palo, ne' quali ella va sempre crescendo, con proporzione ignotissima, nel dover penetrare il muro o il terreno.

Suppongasi ora che CD sia cento misure o CE dieci: il piccolo grave B di dieci pesi farà, secondo le note leggi meccaniche, equilibrio al grande A di cento, e ogni minima aggiunta a quello basterà per muovere questo. Sia mosso per esempio da M in N: per altrettanto spazio sarà sceso il peso B nella perpendicolare. E perchè questo rappresenta il percuziente e quello il peso morto, che equivale alla percossa, se ne dovranno comparare insieme le velocità o gli spazi passati nelle medesime direzioni perpendicolari. Condotte perciò le MO, NO parallele alle DE, CE, sarà NO la misura dell' ascesa perpendicolare del corpo grave A, la quale facilmente si determina, rispetto alla caduta perpendicolare di B, uguale a MN, dalle equazioni $MN : NO = DC : CE = 100 : 10$, d' onde $NO = \frac{MN}{10}$. « Adunque è manifesto, conclude il Salvlati, che la caduta del peso di dieci libbre, fattà nella perpendicolare, è bastante a sollevare il peso di cento libbre, pur nella perpendicolare, ma solo per lo spazio della decima parte della scesa del cadente di dieci libbre. Ma quella forza, che può alzare un peso di cento libbre, è eguale alla forza, con la quale il medesimo peso delle cento libbre calca in giù, e questa era la potente a cacciare il palo postavi sopra e premendo; ecco dunque esplicato come la caduta di dieci libbre di peso è potente a cacciare una resistenza equivalente a quella, che ha il peso di cento libbre, per essere sollevato, ma la cacciata non sarà più che per la decima parte della scesa del percuziente. E se noi porremo la resistenza del palo essere raddoppiata e triplicata, sicchè vi bisogni per superarla la pressura di dugento o trecento libbre di peso morto, replicando simil discorso, troveremo l' impeto delle dieci libbre cadenti a perpendicolo esser potente a cacciare, sì come la prima, la seconda e la terza volta il palo: e come nella prima la decima parte della sua scesa, così nella seconda volta la ventesima, e nella terza la trentesima parte della sua scesa. E così, moltiplicando la resistenza in infinito, sempre la medesima percossa la potrà superare, ma col cacciare il resistente sempre per minore e minore spazio, con alterna proporzione » (ivi, pag. 327, 28).

Ecco in somma qual' è il processo del ragionamento, tenuto da Galileo nel VI dialogo, e quale ne è la conclusione: ciò che, se avesse potuto leggere il Borelli, avrebbe dovuto confessare di essere rimasto illuso nel suo giudizio, vigendo tuttavia contro le ultime speculazioni del suo Maestro la sentenza pronunziata contro le dottrine, ch' egli aveva insegnate nel suo primo giovanile Discorso. Imperocchè la proporzione, che passa tra le velocità e i corpi A, B, mentre l' uno scende nel perpendicolo, e l' altro sale sul piano; è tutt' affatto diversa da quella, che nel libro *De vi percussionis* si dimostra dover passare fra quegli stessi termini, mentre che si considerino i due corpi venir tra loro a conflitto. Essendo dunque la conclusione

di Galileo manifestamente falsa non dovrebbe far maraviglia che tutto intero il detto Dialogo niente altro sia che un bel tessuto di paralogismi, come si diceva.

Di mezzo però a quei paralogismi risalta una verità nuova, nella quale consiste tutto il merito, e in cui si raccoglie il frutto unico di quelle migliaia di ore, che Galileo stesso diceva di avere spese intorno al penetrare i maravigliosi effetti della percossa. Ma per prepararci a dire in che consista una tal novità, ritorniamo indietro sulle ragioni, che il Salviati adduce per concluder che la Natura, nel moltiplicare la forza sopra il piano inclinato e nella percossa, procede nella medesima maniera.

È chiaro che fra gli altri ordigni meccanici si sceglie il piano, perchè meglio atto a rappresentare col peso pendulo il percuziente, e, con l'altro appoggiato, il peso morto che preme. Avrebbe del resto il discorso condotto a concludere più semplicemente il medesimo dai principii immediati della leva, secondo i quali è manifesto che una piccolissima potenza vale a pareggiare una grandissima resistenza, purchè si osservi l'ordine delle distanze, contrariamente prese dal punto di appoggio. E qui torna a proposito il famosissimo detto di Archimede: *Da mihi ubi sistam, et terram coelumque movebo,* che Galileo applicava alla percossa, ripetendo anch'egli enfaticamente per somiglianza: *Mettimi fuori della Terra, anzi dell'universo riunito insieme in un globo, e lo commoverò percotendolo col mio martello.*

Ecco la maravigliosa sentenza che l'Archimede novello era venuto a pronunziare, concludendo in forma di general proposizione, « come qualsivoglia piccolissimo peso, scendendo, faccia salire qualsivoglia immensa e gravissima mole » (ivi, pag. 316). La proposizione fu poi come verissima dimostrata anche dall'Huyghens, nella terza del suo trattato *De motu corporum ex vi percussionis,* dove così l'Autore l'annunzia: « Corpus quamlibet magnum a quamlibet exiguo corpore, et qualicumque celeritate impacto, movetur » (Opuscula postuma, Lugd. Batav. 1703, pag. 373). Confermò pure lo stesso il Mariotte nella VIII della seconda parte del suo libro *De la percussion,* esagerando anch'egli come il Nostro l'effetto del piccolissimo verso qualunque grandissimo col chiamarlo *infinito.* « La force du choc horisontal est infinie: c'est-a-dire, que si un corps tres-petit en choque directement un autre tres-pesant en repos par un mouvement horisontal, si lent, qu'il puisse être; il le mettra en mouvement » (Oeuvres, T: I, A la Haye 1740, pag. 72). Ma nè l'esempio del gran naviglio, che in acqua quieta e in aria calma può esser tirato a riva *avec un tres-petit fil de soie, sans que le fil se rompe,* nè l'altro dell'Huyghens, da somiglianti immagini desunto, hanno a che rivedere nulla con la bella dimostrazione meccanica di Galileo, ricavata dal fatto della grandissima sfera pendula, il centro di gravità della quale è necessariamente spostato dal solo toccarla, non che dal percoterla che faccia un chicco di panico: dimostrazione illustrata così dal Viviani con molta semplicità ed evidenza.

« Il grandissimo peso A (fig. 44), pendente dal perpendicolo RA, sarà sollevato dal piccolissimo peso B, pendente dal medesimo punto R al filo RB.

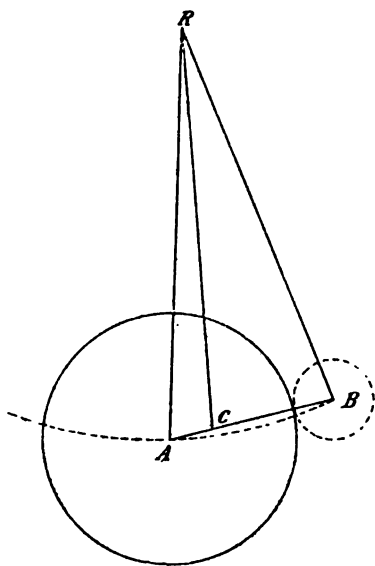



Figura 44.

Perchè, congiunti i centri di gravità di essi gravi, cioè quello di A, che si suppone essere condotto nell' infimo punto del suo moto possibile, e quello di B colla retta BA, il loro centro comune sarà in essa BA, come in C, fuori del pendulo RA, il qual centro C, passando per l' arco del suo moto fatto dal semidiametro RC, calerà fino che esso si ritrovi nel detto piombo, e però il gran peso A verrà necessariamente sollevato » (MSS. Gal. Disc., T. CXIII, fol. 6 a tergo).

Nè l' Huyghens nè il Mariotte potevano aver notizia di questa proposizione, che il Viviani così bene illustra sopra il testo galileiano, della copia del quale egli era già venuto in possesso: e pure è certo che non ne aveva ancora avuto notizia il Borelli, quando scriveva la XVI e la XVII *De vi percussionis*. Benchè dunque si trovassero, in dimostrare la medesima verità, tanti insigni matematici concordi, volle Onorato Fabry apporre la nota di falsità alle due dette proposizioni borelliane, l' Autor delle quali, per confermare l' assunto che, rimanendosi tuttavia inedito il Dialogo galileiano compariva nella Scienza meccanica come nuovo; s' incontrò in una dimostrazione, che concludeva dai principii medesimi di Galileo, e si rassomigliava perciò moltissimo a quella del Viviani.

Sia GF (fig. 45) una libbra senza peso sostenuta nel suo mezzo A, da cui penda per un filo, pur senza peso, un vastissimo globo, che movendosi qua e là descriverebbe col suo centro B il semicerchio GBF. Lasciato però in libera posa si costituirà nel suo luogo più basso, e la libbra FG si disporrà in perfetta linea orizzontale. Aggiungasi ora in G un altro piccolo corpo: il centro del sistema dovrà da B risalir verso G, per la linea di congiunzione GB, infino a un punto, per esempio O, che sia da G, B distante per lunghezze reciproche ai pesi. Ivi però non potrà stabilirsi, ma scenderà, infintantochè la linea AO non si disponga perpendicolare in AB, ciò che non può farsi, senza che il punto B non risalga alquanto su per l' arco BF. « Ergo, ne conclude il Borelli, non obstante illa resistentia positiva, corpus B elevabitur sursum in arcu BF.

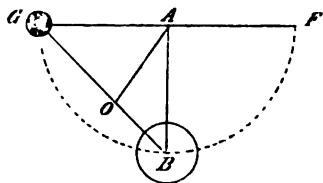



Figura 45.

Praeterea, quia perinde est si loco corpusculi G ponderosi applicetur quaelibet vis motiva, sive animata, sive proiectitia, quae aequalem energiam habeat quam pondus G, et illa ubicumque applicata, sive in G aut in B idem praestat ac pondus G; proindeque vastum corpus pensile B a quacumque vi motiva tantulum impelli sursum poterit » (Historia incendii aetnaei, Reg. Julio 1670, pag. 149).

Il Borelli dunque, l'Huyghens e il Mariotte, a cui potremo altresì aggiungere il Wallis, non fecero altro che confermare una verità, la quale non sapevano che fosse stata rivelata da Galileo, per bocca di quel suo Salviati, a cui primo faceva pronunziare e dimostrare che qualunque grandissimo peso può, in certe condizioni, esser mosso da qualunque minima forza. Dal considerar poi che il medesimo effetto ne segue, o tocchi il piccolo corpo il grandissimo o lo percuota, s'ingerì nello stesso Galileo il concetto che, a quel modo che opera la Natura in moltiplicar la forza nelle macchine e negli urti violenti, quando son le proporzioni infinite o incommensurabili; a quel medesimo modo ella operi anche nelle proporzioni definite. Sarebbe come a voler dire che le proprietà convenienti alla somma delle infinite linee indivisibili, contessenti una superficie, convenissero a ciascuna linea particolare, commettendo un paralogismo, che facilmente si scoprirebbe con l'osservare che si paragonano insieme due cose di un genere diverso.

Dalle astratte speculazioni venivasi quel medesimo paralogismo a tradurre nei fatti, quando s'immaginavan da Galileo e da' suoi seguaci quegli strumenti, e si eseguivano quelle esperienze ordinate a misurare la forza della percossa fatta sopra uno de' piatti, a proporzione del peso morto posto sull'altro piatto della bilancia. È dovuto al Borelli anche il merito di aver fugato dalla Scienza questo errore pernicioso, predominante nella Scuola alla quale egli stesso apparteneva, ed è argomento degno di storia. Ma prima di passar oltre a trattarlo, vogliamo ripigliare il filo del nostro primo discorso intorno al sesto dialogo galileiano, che vedemmo esser rimasto incompleto, sì per quel che riguarda la forza della percossa, e sì per non trovarvisi fatto alcun motto di quell' altro promesso trattatello dell'uso delle catenuzze nella ballistica. È come una statua di Fidia, collocata sul piedestallo in una pubblica piazza da un archeologo, a quel modo ch' ei la ritrovò, sotto le macerie, mutilata, e che noi veniamo ora a reintegrare, almeno nelle principali e più distinte sue membra.

III.

Dicemmo che Galileo, distratto da altre cure suggeritegli dal Viviani e dal Torricelli, lasciò il dialogo della percossa interrotto al punto, dop' aver dimostrato, per la somiglianza di ciò che avviene de' gravi sul declivio di un piano e nel perpendicolo, che i momenti del percuziente e del percosso stanno

reciprocamente come la velocità di questo alla velocità di quello. Confermava da così fatte relazioni il primario e principale suo assunto, che cioè la forza, così nelle macchine che muovono, come in quelle che percotono, sia infinita. Dicemmo altresì che, per rendere di ciò l' intrapresa trattazione compiuta, non aveva l' Autore lasciato altro che alcune frettolose note manoscritte, ritrovate fra le carte del Viviani sotto il titolo di *Roba copiata da un esemplare del Galileo.* Apparisce da coteste note che voleva al Salviati far proseguire il discorso, per confermare l' infinità della potenza del colpo in ogni corpo grave cadente, desumendone le ragioni dalla natura del moto accelerato. E perchè si vedeva di lì nascere facilmente alcune difficoltà contro l' assunto, doveva intrattenersi il Salviati stesso a rimoverle dalle dubbiose menti degl' interlocutori.

I ragionamenti però, fino a questo punto tenuti fra gli amici, non avevano avuto per subietto altro che le percosse fatte nelle cadute naturali; ond' è che, a voler esaurire il tema, rimaneva a dir tuttavia delle percosse artificiali: di quelle cioè prodotte da qualunque forza di proiezione, o comunque sia dirette per l' orizzonte o all' insù, come nei martelli fabbrili, e che Galileo par avesse intenzione di distinguere, comprendendone sotto il nome di *urti* le varietà degli effetti. Col dimostrar dunque che anche gli urti son soggetti alle medesime leggi delle percosse naturali, e che son perciò anch' essi di potenza infinita, si doveva terminar l' argomento, preso dai conversanti a trattare in questa prima parte della giornata.

La *roba* scritta, nella quale s' accennava a questo proposito di proseguire e di dar perfezione al trattato della percossa; prima che dal Viviani, come dicemmo, era stata, vivente Galileo, copiata dal Torricelli, a cui non era, di ciò che aveva speculato il suo ospite in tal soggetto, da qualche enfatica espressione in fuori attinta ai familiari colloqui, pervenuta altra notizia. Il principe Leopoldo, che non si poteva dar pace di vedere, con sì grave danno della Filosofia toscana e della Scienza universale, fallite le sue intenzioni, non lasciava mai occasione d' entrare intorno a ciò in discorso con lo stesso Torricelli, il quale ebbe finalmente un giorno a mostrare a Sua Altezza, in que' foglietti copiati, ciò che avesse Galileo lasciato scritto della percossa. Gli volle il Principe leggere attentamente, e trovando che contenevano pensieri, i quali s' accennava che sarebbero svolti, o proposizioni, che si prometteva verrebbero dimostrate, espresse il suo desiderio, per non dire il comando, che adempisse il discepolo quel che s' era proposto di fare il Maestro. Si discuteva intorno alla forma, e se dovessero mettersi quelle cose in dialogo: ma sembrando ciò troppo arbitrio, e vedendo tuttavia lontana l' occasion di stamparlo, parve più conveniente il leggere a qualche pubblica udienza. Fece perciò esso Principe ammettere il Torricelli fra gli Accademici della Crusca, la quale, proponendosi allora di definir le parole con la notizia delle cose, accoglieva in sè quegli egregi Toscani, che sapevano scrivere elegante, perchè avevano prima imparato a pensare profondo. Erano quasi tutti perciò discepoli e seguaci di Galileo, per cui fu una tale adunanza creduta la più opportuna per

divulgarvi gli oracoli ultimamente pronunziati in Arcetri, ciò che significava il banditore dicendo « che anco l'istesso Galileo s'appagherebbe piuttosto di questa sola udienza, che di pubblicare i frammenti de' rimasti suoi scritti » (Lez. accad. cit., pag. 69). Giova a noi credere che fossero così fatte espressioni sincere, benchè alcuni si maravigliassero che si venisse a mescolare la crusca ne' sacchi del Torricelli, tutti pieni di fior di farina. Il Cavalieri, appena avuta la notizia della nuova elezione accademica, scriveva così all'eletto, il dì 14 Luglio 1642, in una lettera da Bologna: « Gli Accademici della Crusca hanno fatto un grande acquisto con l'aggregazione di V. S., che gli porterà fior di roba. Se non che vogliono cose piuttosto fisiche che matematiche, e forse con ragione, poichè quelle assomiglierei io piuttosto alla crusca, e queste al fior di farina, vero cibo e nutrimento dell'intelletto. Nondimeno conviene accomodarsi al loro genio, anzi al genio universale » (MSS. Gal. Disc., T. XLI, fol. 126). E accomodandosi a questo genio universale anche il Torricelli, incominciò a leggere dalla bugnola i suoi fisici argomenti.

Letto appena il primo discorso, per ringraziare il Principe e gli Accademici che lo avevano ammesso, entrò subito in argomento della percossa, dimostrando ch' ell' è infinita, perchè infiniti son gl' istanti di tempo, nei quali, cadendo il corpo che ha da percotere, si moltiplica la gravità di lui, che « nei corpi naturali è come fontana, dalla quale continuamente scaturiscono momenti di peso » (ivi, pag. 73): nè la dimostrazione consiste in altro che nell'esplicare il concetto di Galileo: « Il momento di un grave, nell' atto della percossa, altro non è che un composto ed aggregato d' infiniti momenti, ciascuno di essi eguale al solo momento o interno e naturale di sè medesimo, o estrinseco e violento, qual' è quello della forza movente. Tali momenti, nel tempo della mossa del grave, si vanno accumulando in istante, con eguale additamento, e conservando in esso, nel modo appunto che si va accrescendo la velocità di un grave cadente.... » (Alb. XIII, 330, 31).

Nasceva però contro queste dottrine un dubbio, che non si vedeva come risolverlo facilmente, perchè se il momento di un grave, nell'atto della percossa, non è altro che un aggregato degl' infiniti momenti acquistati negli infiniti istanti del tempo della caduta, sembrava che la stessa percossa che ne segue dovess'essere in qualunque caso infinita: ciò che contradice all'osservazione dei fatti, potendo anche un grande grave cadente produrre un piccolo colpo. All'istanza già preveduta accennava di voler rispondere Galileo, così scrivendo fra le altre note del suo foglio: « La forza della percossa è d' infinito momento, tuttavolta che ella si applichi, in un momento ed in un istante, dal grave percuziente sopra materia non cedente, come si dimostrerà » (ivi, pag. 331).

La dimostrazione che manca fu supplita dal Torricelli, il quale, osservando che l'impeto conceputo da un grave nello scendere in giù è totalmente estinto nel ritornare in su per altrettanto spazio, ne concluse la seguente risposta, che si conforma col pensiero di Galileo: « Allora seguirebbe l'effetto infinito, ad ogni benchè piccola percossa, quando la percossa fosse

momentanea: cioè quando il percuziente applicasse tutto quel cumulo di momenti, che egli ha dentro di sè aggregati insieme, che sono veramente infiniti, e gli conferisse tutti al suo resistente in un solo istante di tempo. Ma se nell'applicargli gli applica con qualche spazio di tempo non è più necessario che l'effetto segua infinito, anzi può esser minimo, ma però nullo non mai » (Lez. accad. cit., pag. 76).

Che nullo veramente non sia manifesto si scorge, scriveva Galileo, dall'esperienza, « poichè se con un ben piccolo martello si anderà con percosse uniformi incontrando la testa di una grandissima trave, che sia a giacere in terra, dopo molte e molte percosse si vedrà finalmente essersi mossa la trave per qualche spazio percettibile: segno evidentissimo che ogni percossa operò separatamente per la sua parte nello spingere la trave: poichè, se la prima percossa non fosse a parte di tale effetto, tutte le altre susseguenti, come in luogo di prime, niente affatto opererebbero » (Alb. XIII, 331, 32). Il Torricelli conferma questo stesso pensiero, asseverando niuna sorta di percossa esser tanto debole, che non faccia effetto in qualunque gagliardissima resistenza, e adduce a dimostrarlo esperienze simili, e simili ragioni espresse talvolta con le medesime parole, che aveva lette nel manoscritto galileiano. « Imperocchè se il primo colpo, egli dice, non avesse operato cosa alcuna, adunque il secondo colpo si potrebbe chiamare e considerare per primo. Essendo poi il secondo eguale di forza al primo, e ritrovando il resistente nella medesima disposizion per appunto, nè esso ancora opererà cosa alcuna. Così proveremo che nè il millesimo nè il milionesimo potrebbero giammai operare, se non avesse operato anche il primo. Che poi li molti operino, parlino questa volta per me le porte di Agrippa e le statue del Vaticano: si vedono pure, benchè di bronzo durissimo, consumate dal solo accostamento delle mani del popolo curioso e devoto » (Lez. accad. cit., pag. 94, 95).

Altre obiezioni prevedeva il Torricelli contro la dottrina galileiana della percossa infinita, e prometteva agli Accademici sarebbe venuto a ribatterle in un'altra tornata. Consisteva la principale di quelle obiezioni nel dire che, se un grave cadente avesse dentro di sè momento infinito, dovrebbe aver anche velocità infinita. Nè il Torricelli nega che non sia veramente così, purchè però s'intenda di una velocità assoluta, e non paragonata con altra minore, perchè quando il grave nella quiete avesse per esempio il momento di una libbra, « allora di velocità non aveva cosa alcuna: avendo poi dopo la caduta acquistato qualche velocità, questo mi pare che si possa chiamare accrescimento infinito. Il passaggio dall'esser nulla all'essere qualche cosa suol giudicarsi mutazione infinita » (ivi, pag. 87, 88).

Ma per ridur l'argomento contro l'avversario anche più stringente, osserva il Torricelli che i momenti intrinsechi sono un che precedente, e sono la vera e l'unica causa della maggiore o minore velocità, per cui « possono stare e sussistere da sè stessi, senza l'aiuto e la compagnia di velocità alcuna » (ivi, pag. 100). Si richiama per confermar ciò ai principii meccanici, da sè pubblicamente professati nel trattato *De motu,* rispetto a ciò che av-

viene de' gravi applicati all'estremità della libbra, in distanze diverse, o posati sopra piani con diverse inclinazioni « dove hanno, egli dice, i diversi momenti in atto, ma le diverse velocità solo in potenza. Ma la velocità per sè stessa non può già sussistere senza i momenti esterni » (ivi). Qui per verità non sembra che si sodisfaccia pienamente all'istanza, che cioè una potenza infinita, venendo all'atto, non debba produrre effetto infinito: si toccava delle velocità virtuali la gelosa questione, la quale era solamente risolubile da principii tutt'affatto diversi dai torricelliani, considerando la quiete non come la privazione assoluta del moto, ma come il primo principio e il termine ultimo del moto.

Comunque sia, aveva il Torricelli nelle due dette Lezioni esplicato il pensiero galileiano per quel che riguarda la percossa naturale, ma tornò a leggere agli Accademici anche la terza volta, per trattare dell'urto, *fratello della percossa, e padre di molte speculazioni* (ivi, pag. 106). Queste speculazioni però, nel foglio manoscritto di Galileo, che serviva per distendere le Lezioni accademiche di testo; si limitavano nell'accennare ad alcune esperienze, per le quali si mostrava « come s'imprima ne' mobili, e più ne' più gravi, ed in essi si moltiplichi e conservi la forza, che con qualche tempo gli si va comunicando » (Alb. XIII. 332).

Da così fatte esperienze dello scaccino, che serra le porte di bronzo di S. Giovanni, e del sagrestano, che, a furia di dare strappate alla fune, riesce finalmente a far sonare una grossa campana, variate dal Torricelli negli esempi del gran vascello, e della tavola di abeto che, tirati l'una e l'altro per un cavo dalle braccia di un uomo, si fanno arrivare a percotere con varia velocità, e con vario effetto; si deduce la teoria galileiana dell'urto, che dallo stesso Torricelli si riassume in queste parole: « Abbiamo detto che la forza dell'urto non dipende altrimenti dalla quantità della materia, poichè se ciò fosse converrebbe che la medesima palla di sessanta libbre di ferro facesse sempre la medesima operazione, lanciata una volta da un uomo, e una volta avventata da un cannone. Non dipende ne anche assolutamente dalla velocità, perchè con maggior velocità urterà una tavola d'abeto, tirata per l'acqua quiescente, che un vastissimo galeone: eppure il meno veloce farà maggior violenza nell'urtare » (Lez. accad. cit., pag. 118).

Sembra che da questi così premessi e verissimi principii ne dovesse concludere il valent'uomo che nè da sola la quantità di materia, nè da sola la velocità, ma dal composto d'ambedue insieme ne resulta la forza dell'urto, come pochi anni prima aveva concluso l'Aggiunti, e scritto nei dimenticati suoi fogli: eppure non sa far altro che adombrare il concetto galileiano, invocando la renitenza della materia all'esser mossa. « Ella altro non è, diceva, che un vaso di Circe incantato, il quale serve per ricettacolo delle forze e de' momenti dell'impeto. La forza poi e gl'impeti sono astratti tanto sottili, son quintessenze tanto spiritose, che in altre ampolle non si posson racchiudere, che nell'intima corpulenza dei solidi naturali » (ivi, pag. 110). E come le ampolle tanto più ricevono di liquore, quanto più ne sono capaci,

così son atti a far maggiore conserva di forza i solidi più corpulenti; e non fa perciò maraviglia che il vascello, il quale porta seco i momenti accumulati per lo spazio di un' ora dal tirar delle braccia di quell' uomo, faccia maggior effetto della tavola di abeto, la quale non portava seco altro che la forza e i momenti accumulati in quaranta battute di polso.

Soggiunge immediatamente d' inclinar forse a credere « che se fosse possibile di racchiudere e restringere dentro a un vilissimo emisfero di noce, ma infrangibile, tutta quella forza e fatica, che nello spazio di mezz' ora è stata prodotta dal traente del nostro immaginato vascello; crederei, dico, che forse quel leggerisssimo guscio facesse nell' atto dell' urtare la medesima operazione, che faceva l' immensa mole del naviglio » (ivi, pag. 111, 12). Si conferma di qui che non era nella mente del Torricelli ben definito il concetto di forza, o di quantità di moto, che sappiamo risultar dal prodotto della velocità per la massa: che se si fossero nel discorso ora trascritto disposti gli elementi secondo l' ordine proprio, avrebbe dovuto dir chi lo fece che se fosse impressa al guscio della noce tanta velocità, da compensare con essa al difetto della mole, avrebbe, nell' essere spinto a riva, prodotto la medesima percossa del gran naviglio. L' incerta opinione si sarebbe trasformata così in quelle leggi matematiche, della scoperta delle quali lasciarono Galileo e il Torricelli il merito a un loro discepolo.

Le lezioni del Torricelli fatte recitare dal principe Leopoldo, affinchè si divulgassero, nel più sollecito ed efficace modo, fra i letterati e gli scienziati toscani convenuti insieme nell' Accademia della Crusca, i pensieri postumi di Galileo; rimasero sconosciute al pubblico infino al 1715, quando pensò a stamparle insieme in un volume in Firenze quel Tommaso Bonaventuri che, raccogliendo tre anni dopo le opere galileiane, aggiunse agli altri delle due Scienze nuove il dialogo sesto. A lui dunque aveva dato in mano la sorte quelle scritture, dalle quali riunite insieme resultavan compiute le speculazioni di Galileo intorno alla forza della percossa, non facendo altro il Torricelli che proseguire l' opera del Salviati, rimasta interrotta nel manoscritto copiato dal Viviani. L' editore fiorentino però non seppe vedere queste relazioni, che passavano fra le Lezioni accademiche del Discepolo, e il Dialogo incominciato dal Maestro, perchè altrimenti non avrebbe dubitato di unire insieme le due scritture, che, sebbene apparissero sotto forme diverse, comprendevano in un solo pensiero la mente dell' Autore intera e perfetta. Se noi dovessimo perciò, com' editori che si assumono l' ufficio di dar le opere galileiane complete, ristampare i dialoghi delle due Scienze nuove, aggiungeremmo al sesto, dove fu lasciato interrotto dal Bonaventuri, le tre Lezioni accademiche sulla forza della percossa. Il disteso, è vero, è del Torricelli, ma i pensieri sono di Galileo, com' apparisce dalla scrittura, che servì ad esse Lezioni di testo, ond' è che la ragione d' inserirle fra le altre opere galileiane sarebbe quella medesima, che consigliò ad inserire il quinto dialogo sulla riforma di Euclide. Così sarebbe riserbato a noi, condannati come rei tante volte di avere infranto l' idolo antico, il merito di averlo invece restau-

rato in uno almeno degli angoli dell' altare, e di esser venuti, noi unici al mondo, a tergere le lacrime al popolo devoto.

Questo merito nonostante noi lo reputiam quasi nulla verso un altro, che ci ripromettiamo di acquistare appresso agli offesi Galileiani, ai quasi si annunzia che, dopo aver riconosciute e riordinate le divise scritture integranti il VI dialogo, per quel che riguarda il trattato della percossa; abbiam trovato da reintegrarlo altresì per quel che riguarda l' uso delle catenelle, a dar regola, senza ricorrere ai calcoli laboriosi, di dirigere i tiri delle artiglierie.

Sulla fine della quarta Giornata il Salviati, dop' aver detto che le catenelle, lentamente sospese per le loro estremità, s' incurvano in una certa sacca, che moltissimo si rassomiglia alla parabola; accenna a qualche non piccola utilità, alla quale potrebber così fatte catenelle servire, di che promette agli interlocutori che ne avrebbe trattato appresso. Speditosi poi dalla dimostrazione della corda tesa, per la quale aveva divagato il discorso, Simplicio lo richiama alla fatta promessa d' esplicar cioè « qual sia l' utilità, che da simili catenelle si può ritrarre, e dopo questo arrecare quelle speculazioni, che dal nostro Accademico sono state fatte intorno alla forza della percossa » (Alb. XIII, 266). Ma l' ora essendo così tarda, da non bastare a disbrigar le nominate materie, si consiglia il Salviati *di differire il congresso ad altro tempo più opportuno.*

Era in quel congresso dunque proposto di trattar prima delle catenelle, e poi della percossa, ma fu il proposito riformato, premettendo questo a quello argomento, qualunque se ne fosse la ragione, la quale non dispensava però esso Salviati dal mantenere intere le sue promesse. E che veramente avesse intenzione di mantenerle, apparisce dall' avere al colloquio così ben misurato il tempo che, esaurito il primo trattato, intorno al quale anche compresa la teoria degli urti si sarebbe la conversazione intrattenuta appena infino a ora di nona; rimanesse tanto di sera, da passare a sodisfare i desiderosi d' intendere a quale uso mai si adoprerebbero le catenelle. Ciò nonostante que' desiderii, dopo più che un secolo e mezzo, si rimangono insodisfatti, nè par che se ne dolesse o se ne dolga alcuno de' Galileiani più infervorati. Noi dunque siamo stati fra costoro i primi ed i soli, che ci siamo industriosamente messi a cercare, e finalmente abbiamo trovato quella seconda parte del dialogo galileiano, la quale, soggiungendosi alla prima della percossa, dava al buon Salviati materia da filosofar con gli amici infino a sera. Come ci occorresse a fare la scoperta, in mezzo a certi farraginosi manoscritti datici a esaminare da un nostro amico, ci dispenseremo dal narrarlo ai nostri Lettori, i quali noi crediamo desiderosi piuttosto di veder senza indugio quel che di là fu da noi ricopiato, ed è quanto appresso:

« Sagredo. — I vostri ragionamenti, sig. Salviati, mi hanno d' ogni parte così persuaso le forze delle percosse naturali e degli urti essere infinite, che potete oramai risparmiarvi di trattenere intorno a ciò altri discorsi. Potete dunque passar liberamente per me a mantenere l' altra vostra pro-

messa, quale era di dirci l'utilità, che sperava di ricavare il nostro Accademico dalle catenuzze, applicate a punteggiare molte linee paraboliche sopra una piana superficie. Ma vedo qui il sig. Aproino in atto di una certa maraviglia. »

« Aproino. — Voi mi avete inteso, sig. Sagredo, perchè questa vostra proposta mi riesce affatto nuova. »

« Sagredo. — Avete ragione: io non ho pensato che non era la S. V. presente, quando, prima di congedarci la sera del passato nostro congresso, il sig. Salviati fece intendere a me e al sig. Simplicio che appresso alla dimostrazione della forza della percossa avrebbe soggiunta la notizia delle catenuzze appese dalle estremità loro, le quali con la loro sacca diceva che naturalmente s'accomodano alla curvatura di linee paraboliche. »

« Aproino. — A una prima maraviglia voi non fate così che aggiungermene un'altra molto maggiore, per la quale sono entrato in grandissima curiosità di vedere il fine di una cosa, ch'era sempre rimasta senz'alcuno significato a' miei, come a tutti gli occhi volgari. Mi rivolgo perciò a fare istanza insieme con voi al sig. Salviati, perchè voglia senz'altro indugio entrare in questo nuovo ragionamento. »

« Salviati. — Il sig. Aproino, che troppo tardi è venuto a pigliar parte nella nostra conversazione, non saprà forse che nell'altro nostro congresso si lessero le dimostrazioni dell'Accademico intorno alla nuova Scienza dei proietti, per fondamento della quale si poneva che, fatta astrazione dagl'impedimenti dell'aria, e da qualsivoglia altro estrinseco accidente, descrivono essi proietti in aria una linea curva, non punto differente dalla parabola. Di qui venivano inaspettatamente suggerite certissime norme all'arte dei bombardieri, nel dirigere i loro tiri, cosicchè, fatto prima esperienza dell'impeto, ossia della forza che ha di cacciare in su nel perpendicolo, con una data misura di polvere, lo strumento, il sapere a qual distanza avrebbe gettata la medesima palla, nella tale o nella tal'altra inclinazion della squadra, si riduceva a calcoli matematici disposti dall'Autore in tavole esattissime per servigio dei militari. Ma perchè l'uso di coteste tavole richiedeva pure qualche notizia delle dottrine, e in ogni modo bisognava ricorrere alle pagine di un libro, e a trattar gli strumenti dell'uomo letterato, di che non può sempre aversi comodità in un accampamento; dall'avere osservato che la sacca delle catenelle è una parabola, venne in mente allo stesso Accademico di ridurre a un semplice esercizio manuale quel che il Filosofo aveva scritto ne' suoi libri. »

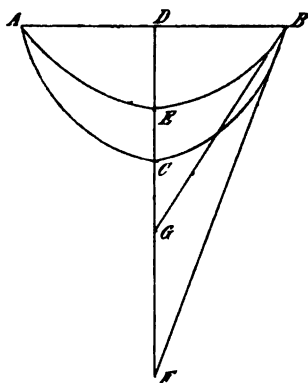



Figura 46.

« Supponga, sig. Aproino, di avere sopra una superficie piana, come sarebbe una tavoletta di legno o un cartoncino assai duro, appuntati in A e in B (fig. 46), all'estremità di una linea ori-

zontale, due spilli, dai quali si faccia pendere una sottilissima catena, che lenteggiando s' incurverà secondo la linea ACB in figura di una parabola, l' altezza della quale sarà CD e AB l' ampiezza. S' ella vorrà mantenere quella medesima ampiezza, ma descrivere parabole più o meno alte, che passino per un dato scopo v. g. per E, ella non dovrebbe far altro che ritirare la catenella per uno dei suoi capi. S' immagini ora che coteste curve rappresentino le vie disegnate per aria da un proietto in B: ella intenderà facilmente come si possa, conducendo le tangenti BF, BG, misurare gli angoli DBF, DBG, e così sapere l' elevazione del pezzo, a cui corrispondono le richieste ampiezze e altezze del tiro. Un quadrante perciò giustamente diviso e applicato alla tavoletta, col centro in B, servirebbe a risolvere così questo, come altri simili problemi. »

« APROINO. — Intendo benissimo come sarebbe un tale strumento assai comodo per i militari, ai quali presterebbe non punto minor servigio del Compasso di proporzione, che lo stesso Inventore descrisse e pubblicò, per facilitare le operazioni geometriche e aritmetiche a quelle persone, le quali, essendo in tanti altri maneggi occupate e distratte, non possono avere la pazienza assidua, che ci vuole per seguir le regole insegnate dai libri. Ma a condurre le divisate operazioni ad effetto mi si presentano alcune difficoltà, la prima delle quali è intorno al modo come possa la catenuzza lasciar, sulla superficie da lei toccata, il vestigio. »

« SALVIATI. — Il modo più facile, e che pure non aberra di troppo dalla richiesta precisione, è quello di punteggiare o con uno stile o con una penna; ma volendo avere un disegno e serbarlo, per servirsene come di stampa, usava il nostro Accademico di traforare con uno spillo il cartone lungo le tracce della catena, e poi con lo spolvero ne riproduceva altrove, e quante volte gli fosse piaciuto, il medesimo disegno. Questo, che voi vedete così traforato e così annerito lungo queste tre linee, sopra le quali passò il piumaccino pieno di polvere di brace; era preparato per ritrovare i gradi delle elevazioni nelle parabole di varia altezza, e di tutte le quali fosse 465 l' ampiezza totale. Chiesi questo cartoncino all' Autore, appresso al quale era rimasto inutile, per averne fatto un altro simile e più preciso, un giorno che lo trovai nel suo studio, tutto intento a questi esercizi, e, benchè vile agli occhi del volgo, la Filosofia nonostante e l' amicizia me lo fanno tenere in grandissimo pregio. »

« APROINO. — Io non me ne pregerei punto meno di voi, sig. Salviati, quanto all' amicizia, ma quanto alla Filosofia io per me non troverei d' acquietarmi nell' ammirare il pregio dell' invenzione, se non allora, che mi venisse dimostrato essere veramente parabolica la linea, secondo la quale s' incurva una catena. E perchè, asseverandolo voi con tanta fiducia, non posso credere che non ne abbiate qualche ragione dimostrativa, vi prego a dirmela, perchè io abbia insieme con voi a tenere da qui innanzi in quel pregio che si merita, e ch' io desidero, la invenzione del nostro comune amico. »

« SALVIATI. — La dimostrazione, che voi richiedete, si riduce all' evi-

denza di un fatto, perchè, se voi descriverete, con gli strumenti suggeritivi, e con le regole insegnate dai Geometri, le parabole ACB, AEB, come nella figura precedente, o quante altre più ve ne piacesse, e poi vi adatterete una catenella; troverete che ella cammina *ad unguem* sopra ognuna delle parabole geometriche da voi descritte. »

« SAGREDO. — Io ho più volte fatta questa esperienza, ed ho trovato che si verifica, specialmente nelle parabole con elevazione sotto ai 45 gradi. Vi confesso però, sig. Salviati, che questo modo di descrivere meccanicamente le curve non ha ottenuto mai nella mia mente l'assenso, che avrei dato a una vera e propria dimostrazion matematica, e quale mi sembra si richiederebbe, per far di queste catenuzze uno strumento militare, che esattamente risponda alle operazioni della Ballistica, come risponde il compasso alle operazioni dell'Aritmetica e della Geometria. Sento perciò anch'io di partecipare con le difficoltà del signor Aproino. »

« SALVIATI. — Buon per me che io mi trovo in grado di poter dare ampia sodisfazione ad ambedue, avendo io avuto dal nostro Accademico questa matematica dimostrazione, che voi desiderate. Vi dirò anzi, per vostra consolazione, ch'egli medesimo mi ha confessato più volte di non essersi acquietato di affidare conclusione così importante alla semplice vista, nella quale, e nel non risponder sempre la materia alle intenzioni dell'arte, poteva sospettarsi qualche fallacia. Di qui è che solo allora propose l'uso del suo nuovo strumento militare quando riuscì a dimostrar che la linea, nella quale si dispongono gli anelli di una catena, è quella medesima, che segnano i proietti per l'aria: nè io v'avrei promesso di darvi questo trattato, quando non ne avessi avuto certezza di scienza. »

« SAGREDO. — M'immagino che non possa questa certezza dipendere da altro, che dalle dottrine già dimostrate intorno alla nuova Scienza del moto. »

« SALVIATI. — Non poteva non esser così, come voi dite, e son particolarmente così fatte dottrine derivate da una di quelle proposizioni, che voi vi rammenterete di avere udita leggere da me, nel trattato delle resistenze dei solidi allo spezzarsi. Immaginate infatti che siano tutti gli anelli componenti la catena infilati in un'asta orizzontale sostenuta a' due estremi, la quale, a un tratto, nei punti dov'è gravata, si fiacchi, rimanendo esse sole l'estremità immobili: tutti gli altri anelli, che stavano nel mezzo, abbandonati, cadranno, e cadendo non potranno accomodarsi in quel nuovo stato di equilibrio, se non a condizion che ciascuno sia sceso quanto comportava il suo proprio momento. E perchè l'ordine di quelle scese, incominciando dal secondo anello infino a quello di mezzo, è che decide della figura, secondo la quale viene a incurvarsi la metà della catena, che necessariamente sarà simile all'altra; voi intendete che tutto si riduce a sapere con qual momento gravitino gli anelli, che si suppongono simili e uguali, sopra tutta la lunghezza dell'asta, secondo le distanze varie di qua e di là dai sostegni. »

« APROINO. — Permettete, sig. Salviati, che io aiuti la mia debole in-

telligenza con un poco di figura: Sia CD (fig. 47) l'asta appoggiata nelle sue estremità: supposto che i pesi di due anelli, uno in B, l'altro in A, siano rappresentati dai gravi H, F, fra loro uguali e pendenti nell'asta da que' medesimi punti B, A; voi proponete di risolvere il problema qual sia il momento del peso H in B verso il momento del medesimo peso, o del suo eguale F, in A. Io, nella scienza matematica, che ho potuto fin qui imparare dai maestri e dai libri, non ritrovo chiari i principii per risolvere la questione, ma in ogni modo non mi sembrano alieni dalle speculazioni meccaniche intorno alla Libbra, per cui non vederei come c' entrassero le proposizioni delle resistenze dei solidi allo spezzarsi, anco quando avessi avuto la sorte d' intervenire, come il sig. Sagredo, ai passati vostri congressi. »

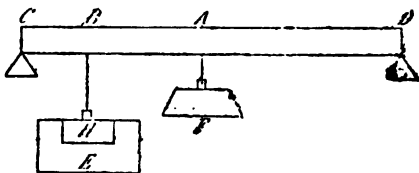



Figura 47.

« SALVIATI. — Ma la nuova Scienza delle resistenze voi dovete sapere che da nessun' altra dipende, che da quella antica di Archimede intorno alla Libbra, purchè la linea geometrica, all' estremità della quale s' aggiungono i pesi, si consideri come una verga solida, che debba spezzarsi. Se sia la libbra AB (fig. 48) col sostegno in C, voi dite, per la dottrina degli equiponderanti, che sarà in equilibrio, quando, alla potenza del peso A in alzare, giustamente resista il peso B all' essere alzato. Ma le medesime ragioni di potenza e di resistenza si possono applicare allo strumento, considerando la linea AB come una verga solida, la quale consisterà in equilibrio, tutte le volte che la potenza di A allo spezzare equivalga alla resistenza B all' essere spezzato. Che se quelle due opposte virtù di operare e di resistere fossero le massime in produrre il relativo effetto, qualunque minima aggiunta all' una o detrazione all'altra basterà per turbar l'equilibrio, ossia per fiaccare la verga, facendola abbassare e rivolgere intorno al centro C, come nella semplice Libbra. »

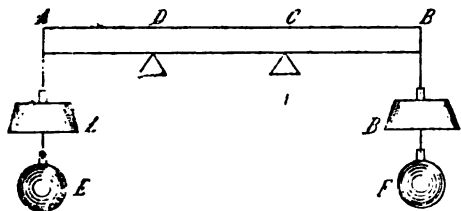



Figura 48.

« SAGREDO. — Voi ora, sig. Salviati, mi fate congetturare che la proposizione, nel trattato delle resistenze da voi stesso poco sopra accennata, possa essere la dodicesima, la quale, se ben mi ricordo, pronunziaste in questa maniera: *Se nella lunghezza di un cilindro si noteranno due luoghi, sopra i quali si voglia far la frazione di esso cilindro, le resistenze di detti due luoghi hanno fra di loro la medesima proporzione, che i rettangoli fatti dalle distanze di essi luoghi contrariamente presi.* Se non che io vi confesso che mi trovo combattuto da due parti circa a questa proposizione: il primo assalto mi viene dal considerarla in sè stessa, e il secondo dal passare a farne l' applicazione ai momenti del medesimo peso collocato

a varie distanze dal mezzo dell'asta. Io non ho infatti dubitato mai della verità della detta proposizione, ma del modo come da voi stesso veniva dimostrata, fondandovi sopra un supposto, secondo me dubitabile, perchè forse da me non bene inteso, che cioè i momenti dei gravi appesi in una bilancia hanno tra loro la proporzione composta delle distanze dal sostegno e delle moli. Questo quanto alla proposizione in sè stessa: quanto poi all'applicazione, che si accennava di farne ai momenti dei pesi, nella Libbra appoggiata alle estremità della sua lunghezza, mi teneva in dubbio il pensare che, nella detta XII, il cilindro, sopra cui proponevasi di far la frazione, si considerava invece da voi con gli appoggi nei punti di mezzo. »

« Salviati. — Non dubitate, sig. Sagredo, che io troverò modo di quietare la vostra mente intorno all'uno e all'altro dubbio. E incominciando dal primo, io non vi negherò che la proporzion dei momenti, come trasparisce dalla XII proposizione del trattato delle resistenze, non lasciasse qualche cosa a desiderare. Si poteva però non difficilmente supplire al difetto richiamandosi alla definizione, che dei momenti danno gli Autori della Scienza meccanica, e alle note leggi degli equiponderanti nella Libbra. Resultando infatti da quelle leggi che permane allora la macchina in equilibrio, quando, come nella precedente figura, il peso A, moltiplicato per la distanza AC dal sostegno, è uguale al peso B moltiplicato per la distanza BC; se voi date alla propensione o all'impeto di andare in basso, composto di gravità e di posizione, il nome di *momento,* averete già concluso che i momenti nella bilancia hanno la ragion composta delle distanze e dei pesi. »

« Dietro queste considerazioni non stimò necessario l'Autore del trattato delle resistenze che si dimostrasse una cosa, di sì facile conclusione dagli antichi teoremi di Archimede. Ma nell'ordinare le proposizioni ultimamente da lui dimostrate, per servire di fondamento al nuovo trattatello dell'uso delle catenuzze, incominciandosi dall'invocare i momenti, secondo la proporzion dei quali scendono più o meno gli anelli, credè bene l'Accademico di dover mettere espressa la proposizione, ch'io vi leggerò sopra questo foglio, nella forma originale, nella quale fu scritta, e che anche per noi sarà in ordine la prima di quelle, che ricorreranno via via nel nostro ragionamento. »

« Propositio I. — Ponderum in Libra suspensorum momenta habent rationem compositam ex ratione ipsorum ponderum, et ex ratione distantiarum. »

« Pendeant pondera DE, et F (fig. 49) ex distantiis AB, BC: dico momentum ponderis DE, ad momentum ponderis F, habere rationem compositam ex rationibus ponderis DE, ad pondus F, et distantiae AB ad distantiam BC. Ut enim AB ad BC, ita fiat pondus F ad pondus DO: cum ergo pondera F et DO habeant rationem distantiarum AB, BC permutatam, erit momentum ponderis F aequale momento ponderis DE. Cum

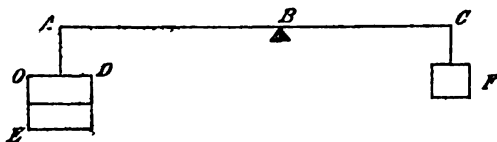



Figura 49.

igitur sint tria pondera utcumque ED, F, et DO, erit ratio ponderis ED ad DO composita ex rationibus ED ad F, et F ad DO. Ut autem pondus ED, ad pondus DO, ita momentum ED ad momentum DO; pendent enim ex eodem puncto: igitur, cum momentum DO sit aequale momento F, ratio momenti ED ad momentum F erit composita ex ratione ponderis ED ad pondus F, et ponderis F ad pondus DO. Factum est autem pondus F ad pondus DO ut distantia AB ad distantiam BC; ergo patet momentum ponderis ED, ad momentum ponderis F, habere rationem compositam ex rationibus ponderum ED, F, et distantiarum AB, BC. »

« APROINO. — Io ringrazio voi, sig. Salviati, e benedico anche insieme i dubbi del sig. Sagredo, che hanno dato occasione di metter fuori un teorema, nel quale non ho memoria di essermi incontrato mai, leggendo ciò che in simile materia è stato scritto dagli altri autori. La conclusione io la vedo poi scendere da così chiari principii, che mi fanno intravedere non poche altre conseguenze utili alla dottrina dei moti. »

« SALVIATI. — L'utilità che voi sagacemente avete appresa, la vedrete presto, sig. Aproino, ricavarsi dalle applicazioni che ne faremo, ma intanto è bene che passiamo a risolvere l'altro dubbio del sig. Sagredo, nel sereno volto del quale mi par di leggere la soddisfazione, che già ha avuto del primo. »

« SAGREDO. — Non dite solo sodisfazione, ma compiacenza, per essere anche a me, come al sig. Aproino, giunta quella dimostrazione della proporzion dei momenti cosa del tutto nuova. E benchè io forse potessi anche da me riuscire a intendere le ragioni del trapasso, dal cilindro sostenuto nel mezzo, al cilindro appoggiato negli estremi, essendo lì lì per fiaccarsi, aggravato nell'uno e nell'altro modo dai medesimi pesi; aspetto che voi me ne alleviate la fatica, e rendiate me, più che da me medesimo, sicuro di aver veduto il vero. »

« SALVIATI. — Io lascerei volentieri intera a voi la compiacenza di ritrovare come sia vero che s'hanno le medesime condizioni d'equilibrio nella libbra geometrica, e nella verga rigida che vuole spezzarsi, o siano i sostegni nel mezzo o negli estremi, essendo dall'altra parte la cosa facilissima a dimostrarsi. Ma perchè voi volete che io sovvenga ad alleggerirvi la fatica, richiamerò la vostra considerazione sopra la libbra AB, poco fa disegnata nella figura 48, la quale voi ben sapete consistere in equilibrio intorno al punto C, quando sta il peso A al peso B reciprocamente, come la distanza BC alla AC. Componendo, troveremo il peso A col peso B, al semplice peso A o al semplice peso B, essere come BC con AC, ossia AB, a BC o ad AC: ond'è manifesto che rimane la bilancia in equilibrio, tanto col sostegno in C e i pesi in A, B, quanto col mettere in A e in B i sostegni, e in C la somma di quegli stessi due pesi. Dalla libbra geometrica facendo poi il trapasso al cilindro solido, intenderete che, se A, B sono i massimi sforzi, ai quali quello stesso cilindro resiste senza spezzarsi, sostenuto in C; sostenuto invece in A e in B, la somma dei due pesi in C misurerà la massima forza, a cui può resistere il solido all'esser rotto in quel medesimo punto. »

« Riduciamoci ora alla memoria la proposizione XII delle resistenze: fu in quella da noi dimostrato che, se le forze A, B son minime per rompere in C, e le E, F parimente minime per rompere in D, le forze A, B, alle E, F hanno reciprocamente la medesima proporzione, che il rettangolo ADB al rettangolo ACB. Ma per quel che s' è detto e convenuto, tant' è a mantenere i sostegni in D, C, e i pesi in A, B, e in E, F, quanto a trasportare i sostegni in A, B, e i pesi A, B, riuniti insieme, in C, e gli altri E, F riuniti in D; diremo dunque, e sia questa la seconda proposizione, che, avendosi un cilindro sostenuto nelle sue estremità A, B, il peso che può rompere in C, al peso che può rompere in D, ossia la resistenza in C, alla resistenza in D, sta come il rettangolo ADB, al rettangolo ACB. La dimostrazione perciò sarebbe ora quella medesima, che fu allora, e solo si potrebbe ripetere in grazia del sig. Aproino, che non era presente. »

« Aproino. — Voi mi avete così bene, sig. Salviati, preparate le vie co' vostri dotti ragionamenti, che non diffido di riuscire da me medesimo a rintracciare quella dimostrazione. In ogni modo, per non indugiar di troppo a venire a concludere il rimanente che è il desiderato fine del nostro colloquio, supporrò come vera la proposizione, che voi avete messa in ordine la seconda. »

« Salviati. — Se così è, non rimane a fare che un passo solo, per riuscire all' intento nostro principale, qual era quello di saper con quali varii momenti pesino gli anelli sopra l' asta, nella quale s' immaginava che fossero infilati, e di lì dedurne le proporzioni delle scese, per concludere all' ultimo qual sia la linea, nella quale s' incurva la catena. Vi annunzio intanto, riferendoci alla figura, per quel primo proposito disegnata, questa terza proposizione, che dice: il momento del peso F in A, al momento del medesimo peso, o di un peso uguale H in B, sta omologamente come il rettangolo CAD, al rettangolo CBD. »

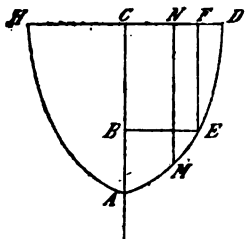
« Sagredo. — Cosicchè i momenti stanno contrariamente alle resistenze, e l' anello della catena in B averà meno impeto di scendere, che non ha l' anello in A, perchè quello trova, nell' asta che più gli resiste, maggiore l' impedimento. Così pure intendo perchè la catena, dal primo anello a quello di mezzo, si dilunghi sempre più dalla disposizione orizzontale, che aveva essendo infilata nell' asta, trovandosi poi al suo proprio peso abbandonata. Mi sembra anche di veder distinto l' albore di quel lume di verità, che voi sarete presto per rivelare alle nostre desiderose pupille: e perchè l' indugio ne riesce penoso, proseguite, sig. Salviati, a dimostrare che i momenti dei pesi F, H hanno tra di loro la medesima proporzione, che i rettangoli fatti dalle distanze di essi luoghi omologamente presi. »

« Salviati. — La dimostrazione, dietro quel che è stato detto fin qui, e consentito da voi insieme col sig. Aproino, è facile e spedita. Imperocchè, mantenuta sott' occhio la medesima rappresentazione, supponiamo che sia il peso F la misura della resistenza in A, e che la misura della resistenza in B sia il peso H aggrandito in E. Sarà, per la seconda proposizione, la resistenza

in A, alla resistenza in B; ossia il peso F al peso E, come il rettangolo CBD al rettangolo CAD. Ma essendo i pesi H, E attaccati al medesimo punto della Libbra, hanno la proporzion medesima dei loro momenti, cioè il momento di H al momento di E (che è uguale al momento di F, per avere la medesima virtù di rompere l'asta) sta come il peso F al peso E; dunque il momento di H, al momento di F, sta come il rettangolo CBD al rettangolo CAD, secondo quel che mi proposi di dimostrare. »

« Ci siamo ora finalmente condotti, per questa ordinata serie di proposizioni, a ritrovare quel che s'andava cercando in fino dal principio del nostro ragionamento, e a che si diceva ridursi la somma delle cose: a sapere cioè con qual momento facciano i vari anelli della catena impeto di scendere, abbandonati dall'asta che gli sosteneva. Sia l'asta rappresentata dalla linea orizontale HD (fig. 50) e per l'impeto o il momento, che ha l'anello in F, supponiamo che possa scendere in fino in E, quant'è la linea perpendicolare FE, e parimente l'anello in N possa scendere quanto la linea MN. Perchè le scese debbono essere proporzionali ai loro momenti, sarà dunque, per le cose già dimostrate, FE ad NM come il rettangolo HFD al rettangolo HND. Ora che altro ci rimane per concludere che i punti E, M, e tutti gli altri rispondenti agli anelli di una catena, sono veramente in una parabola, se non che invocare un teorema, che non troverete scritto da nessuno Autore o antico o moderno, ma che il nostro Accademico dimostrò in

Figura 50.

grazia del suo trattato delle resistenze? Io vi voglio ora proporre quel teorema che è tale: Le parallele al diametro della parabola di cui seghino perpendicolarmente la base, hanno la proporzione medesima dei rettangoli fatti dai segamenti; e così v. g. le NM, FE, parallele al diametro AC nella disegnata figura, staranno fra loro come i rettangoli HND, HFD. »

« APROINO. — Il padre Fra Bonaventura Cavalieri, quando fui poco tempo fa a visitarlo a Bologna, e a proposito del mio strumento da rinforzare l'udito essendo entrato con lui in ragionamento dei Conici, mi disse cotesto stesso teorema, ma non intesi bene, se come sua propria invenzione o del sig. Galileo. »

« SALVIATI. — Potrebb'esser benissimo che anche il padre Bonaventura, a cui il nostro Amico è solito dare il nome di Archimede del nostro tempo, si fosse incontrato in cotesta medesima passione della parabola, utilissima per molte dimostrazioni di Meccanica e di Geometria: ma io posso assicurarvi di avere avuto, ne' colloqui coll'Accademico, una tale notizia molti anni prima che fosse l'ingegno del Cavalieri maturo a produrre di simili frutti. »

« SAGREDO. — Voi mi fate ora risovvenire di avere udito questo medesimo in Padova, quando il nostro Matematico insegnava nel nostro pubblico studio. E perchè la verità non fa caro di sè a nessuno, che desiderosamente, e per le medesime vie rette la cerca, consolateci, sig. Salviati, col mostrarla di nuovo ai nostri occhi svelata. »

« Salviati. — Mi gode l' animo di poter darvi piena sodisfazione, anche questa volta, non ricercandosi veramente in voi altra precognizione da quella in fuori, che aveste allora, quando dalla semplice generazione della parabola immediatamente vi conclusi che le diametrali stanno come i quadrati delle applicate. »

« Aproino. — Io ho bene a memoria la dimostrazione, che ne dà nei suoi Conici Apollonio, e perciò tengo anch' io come cosa già nota che la linea AC sta alla AB, come il quadrato di CD sta al quadrato di BE. »

« Salviati. Così veramente essendo, dividiamo, e averemo AC meno AB, ossia BC, ossia l' uguale EF, sta ad AC, come il quadrato di CD, meno il quadrato di BE, sta al quadrato di CD. Ma la differenza di due quadrati essendo uguale al rettangolo fatto dalla somma e dalla differenza delle radici, secondo che facilmente si deduce dalla IV^a del secondo di Euclide, sarà il quadrato di CD, meno il quadrato di BE, uguale alla linea CD più BE, ossia HF moltiplicata per la linea CD meno BE, ossia FD, o altrimenti la differenza dei due detti quadrati sarà uguale al rettangolo HFD: onde EF ad AC avrà la proporzion medesima che il rettangolo HFD al quadrato di CD. In pari modo dimostreremo che NM ad AC ha la proporzione che il rettangolo HND al quadrato di CD: onde avendo le due proporzioni i conseguenti uguali, e dovendo esser perciò gli antecedenti proporzionali, si conclude che FE, MN stanno insieme come i rettangoli HFD, HND, secondo ciò che io v' ebbi promesso, per satisfare al vostro desiderio. »

Il Dialogo rimane a questo punto interrotto, ma il trattato dell' uso delle catenuzze in ogni modo è compiuto, e ciò che si sente dovervi mancare non poteva esser altro che il congedo fra gl' interlocutori più o meno cerimonioso. Nel consentir nonostante i nostri Lettori che si comprenda nelle trascritte parole intero l' argomento, potrebbero domandare a noi le ragioni, che ci hanno fatto attribuire quella scrittura a Galileo. Intorno a che è da distinguere tra la forma e la materia, la quale che sia schiettamente galileiana basterebbe a provarlo con certezza il fatto, che autografo dell' Accademico, nel codice e nel foglio da noi citati nel Tomo precedente all' articolo IV del Cap. VIII, è il teorema letto dal Salviati intorno ai momenti composti delle distanze e delle moli; che pure è autografa la proposizione, da noi parimente ivi citata, dei pesi uguali che, nell' asta sostenuta all' estremità, operano con momenti omologamente proporzionali ai rettangoli fatti sulle distanze dai sostegni; che autografo in fine è il disegno da noi nel citato Tomo e capitolo rappresentato, in cui accennava Galileo di voler applicare la proposizione ultimamente detta agli anelli della catena, con manifesta intenzione di concluderne la curvità di lei parabolica.

Nè vogliamo proseguire oltre il nostro discorso, senza fare osservare che la scoperta del Dialogo delle catenuzze, a noi felicemente in questi ultimi giorni occorsa, ci ha tolti alcuni dubbi, e ha dichiarati certi fatti rimasti a noi oscuri, quando nel detto Cap. VIII si esponeva la nostra storia, nella quale si diceva di non sapere intendere come si rimanessero fra le altre carte inutili gli autografi dianzi commemorati; e, potendo con la materia di essi l'Au-

tore illustrare il suo trattato delle resistenze, lo volesse nulladimeno lasciare in questo difetto, perchè poi, a sovvenire ai bisogni della Scienza, vi supplissero a gara il Cavalieri, il Torricelli e il Viviani. Ora abbiamo inteso che le proposizioni rimaste manoscritte erano ordinate a un trattato alquanto diverso da quello proprio delle resistenze, e che, tutt' altro ch' esser dimostrate per esser poi rifiutate, come ci parve ritrovandole così neglette, dovevano anzi servire di ricca trama, sopra la quale si ordirebbe il rimanente colloquio, per condurre a sera con esso la giornata incominciatasi col discorso della percossa.

Tornando ora a dire delle ragioni, per le quali si provi che l' altro discorso dell' uso delle catenuzze da noi trascritto era informato ai concetti di Galileo, si può aggiungere che il cartoncino traforato lungo il filo delle linee paraboliche con uno spillo, per riprodurre con lo spolvero il medesimo disegno, con quelle macchie nere lasciatevi sopra dal piumaccino, e in quello stato proprio che apparisce dalle parole del Salviati, si conserva tuttavia cucito, in luogo del foglio 41, nel II Tomo della Parte V dei Manoscritti di Galileo, dove ripetutamente negli angoli opposti si legge autografo *amplitudo tota 465.* Ma la più autorevole conferma di ciò, che s' intende provare, si ha dalla testimonianza del Viviani, a cui crediamo di dovere attribuire il disteso del dialogo, o del frammento di dialogo da noi ritrovato, in una copia, che deve essere di quel tempo.

In margine alla pag. 284 dell' edizione di Leida, dove al Sagredo, che proponeva potersi con una catenuzza punteggiare molte linee paraboliche, il Salviati rispondeva *potersi et ancora con qualche utilità non piccola come appresso vi dirò;* il Viviani apponeva una tale postilla: « Per mezzo di questa catenella trovava forse il Galileo le elevazioni, per andare a ferire nello scopo dato » (MSS. Gal., P. V, T. IX). Poi, in una di quelle note, scritta dal medesimo al fol. 23 del Tomo IV di quella stessa Parte V della collezione, esprimeva un simile dubbio in quest' altra forma: « Vedi a carte 384 l' ultimo verso, che utilità volesse dire il Galileo, se della misura della linea parabolica, ovvero del modo di trovare le proposizioni de' moti de' proietti. »

Vennero nella mente a risolversi intorno a ciò tutti i dubbi, quando i foglietti autografi, ne' quali erano scritte le proposizioni dei momenti fatti da pesi uguali sopra la libbra sostenuta alle sue estremità, d' onde si concludevano le virtù degl' impeti e le quantità della scesa in ciascuno anello della catena; capitarono sotto gli occhi del Viviani. Allora, ordinando coteste disperse proposizioni, e risovvenendosi di ciò che aveva udito dire al Maestro nell' ospizio di Arcetri, ricompose il Viviani stesso quel trattatello dell' uso delle catenuzze, di cui non avevasi altra notizia, da quegli accenni in fuori fatti dal Salviati in sulla sera della quarta giornata. Così il congresso ultimo sarebbe venuto a compiersi, secondo le date promesse, nelle sue due parti; ond' è perciò naturale che, ritenendo il Viviani copia della prima trattante della percossa, all' intenzion ch' egli aveva di pubblicarla fra le opere postume, dopo la vita di Galileo, da dedicarsi al re di Francia, s' aggiungesse l' altra di ridurre il Dialogo intero, distendendo coi documenti già ritrovati quel che

rimaneva a dirsi dell' uso delle catenuzze nell' arte militare. Fallite poi le speranze di raccogliere in un libro le opere, che per ultimo meditava di scrivere il suo Maestro, il Viviani si contentò, in quel *Ragguaglio* che aggiunse dopo la *Scienza universale delle proporzioni,* di sodisfare al pubblico, anche in tal proposito, con queste notizie:

« Restami ora a dir quant' io so intorno all' uso delle catenuzze, promesso dal Galileo nel fine della quarta Giornata, riferendolo quale egli me l' accennò quando, presente lui, io stava studiando la sua Scienza de' proietti. Parmi dunque che egli intendesse di valersi di simili catene sottilissime pendenti dall' estremità loro sopra un piano, per cavar dalle diverse tensioni di esse la regola e la pratica di tirar coll' artiglieria ad un dato scopo. Ma di questo a sufficienza e ingegnosamente scrisse il nostro Torricelli nel fine del suo trattato de' proietti, onde tal perdita rimane risarcita. »

« Che poi la sacca naturale di simili catenuzze s' adatti sempre alla curvatura di linee paraboliche, lo deduceva egli, se mal non mi sovviene, da un simile discorso: Dovendo i gravi scender naturalmente colla proporzione del momento, che essi hanno da' luoghi dove e' son appesi, ed avendo i momenti de' gravi uguali, attaccati ai punti di una libbra sostenuta nell' estremità, la medesima proporzion de' rettangoli delle parti di essa libbra, come il Galileo stesso dimostrò nel trattato Delle resistenze, e questa proporzione essendo la medesima che quella tra le linee rette, che dai punti di tal libbra, come base d' una parabola, si tirano parallele al diametro di tal parabola, per la dottrina de' Conici; tutti gli anelli della catenuzza, che son come tanti pesi uguali pendenti da' punti di quella linea retta, che congiugne l' estremità dove essa catena è attaccata, e che serve di base della parabola, dovendo in fine scendere quant' è loro permesso dai loro momenti e quivi fermarsi, fermar si dovranno in que' punti, dove le scese loro son proporzionali a' propri momenti da' luoghi di dove pendono essi anelli nell' ultimo stante del moto, che poi son que' punti, che s' adattano ad una curva parabolica lunga quanto la catena, ed il di cui diametro, che si parte dal mezzo di detta base, sia perpendicolare all' orizonte » (Ediz. cit., pag. 105, 6).

È facile vedere in queste parole compendiato il dialogo da noi trascritto, la perdita del quale credeva il Viviani rimanesse risarcita dal Torricelli. Ma il Torricelli in verità descrive ingegnosamente, in fine al suo trattato de' proietti, un nuovo genere di Squadra, della quale potessero praticamente valersi i Bombardieri: non fa motto però dello strumento ideato da Galileo, nè dell' ordine delle proposizioni, che dovevano partecipare a lui maggior certezza di scienza meccanica, che non agli strumenti immaginati e descritti per misurare la forza della percossa. Il dialogo perciò, quale fu pubblicato dal Bonaventuri, si rimane in difetto della sua parte migliore, la quale non si sarebbe aspettato mai il popolo devoto gli dovess' essere restituita da noi, sacrileghi offensori del Nume. Ma così è, si vede, nella religione della scienza, come in tutte le cose di questo mondo, delle quali lasciando ad altri il pensiero, noi ci ridurremo sul filo del nostro primo ragionamento.

IV.

Fu lasciata addietro la nostra Storia dei progressi fatti intorno alla scienza della percossa nell'esame del Dialogo di Galileo, il quale concludeva le sue dottrine così nella seguente proposizione: « Se l'effetto che fa una percossa del medesimo peso, e cadente dalla medesima altezza, caccerà un resistente di resistenza sempre uguale per qualche spazio, e che per fare un simile effetto ci bisogni una determinata quantità di peso morto, che senza percossa prema; dico che, quando il medesimo percuziente sopra un altro resistente maggiore con tal percossa lo caccerà v. g. per la metà dello spazio, che fu cacciato l'altro, per far questa seconda cacciata non basta la pressura del detto peso morto, ma ve ne vuole altro il doppio più grave: e così in tutte le altre proporzioni, quanto una cacciata fatta dal medesimo percuziente è più breve, tanto per l'opposto, con proporzione contraria, vi si ricerca, per far l'istesso, gravità maggiore di peso morto premente » (Alb. XIII, 326, 27). Dicemmo allora come, riscontrata questa galileiana proposizione con le nuove verità dimostrate dal Borelli, si scoprisse manifestamente falsa, e ora soggiungiamo che la falsità della conclusione dipendeva dalla falsità del principio, consistente nel paragonare insieme due cose di genere diverso, quali sono il peso morto e il grave, che cadendo percuote. E perchè la più dannosa applicazione di questo falso principio si faceva a quei vari strumenti immaginati per misurare la forza della percossa, e per concluderne di lì com'ella fosse infinita; giova trattenersi a descrivere i lusi dell'ingegno, e a dire come finalmente se ne scoprisse la fallacia.

Quando il congresso tra il Salviati, il Sagredo e l'Aproino non era a nessun altro noto che al Viviani, il quale teneva di quella scrittura appresso a sè copia segreta; correva largamente attorno la fama che Galileo avesse inventato due insigni esperimenti, per dimostrare come la forza della percossa si potesse veramente dire infinita. Il Torricelli si fece, nella seconda delle sue lezioni, organo diffusivo di quella fama, descrivendo così le invenzioni del famosissimo Vecchio ai suoi colleghi accademici della Crusca:

« Egli, mentre viveva, in Padova fece far di molti archi, tutti però di diversa gagliardezza. Prendeva poi il più debole di tutti, ed al mezzo della corda di esso sospendeva una palla di piombo, di due oncie in circa, attaccata con un filo lungo per esempio un braccio: fermato l'arco in una morsa, alzava quella palla, e lasciandola ricadere osservava, per via d'un vaso sonoro sottoposto, per quanto spazio l'impeto della palla incurvasse e si tirasse dietro la corda dell'arco: noi supporremo che fosse intorno a quattro dita. Attaccava poi alla corda del medesimo arco un peso quiescente, tanto grande che incurvasse e tirasse giù la corda dell'arco per lo medesimo spazio di quattro dita, e osservava che tal peso voleva essere circa dieci libbre. Fatto

questo, prendeva un altro arco più gagliardo del primo, alla corda di esso sospendeva la medesima palla di piombo col medesimo filo, e, facendola cadere dalla medesima altezza, notava per quanto spazio ella attraesse la corda. Attaccava poi del piombo quiescente, tanto che facesse il medesimo effetto, e trovava che non bastavano più quelle dieci libbre, che bastavano prima, ma volevano essere più di venti. Pigliando poi di mano in mano archi sempre più robusti, trovava che, per agguagliar la forza di quella medesima palla di piombo e di quella medesima caduta, sempre vi voleva maggiore e maggior peso, conforme che l' esperienza si fosse fatta con archi più e più gagliardi. Adunque, diceva egli, s' io piglierò un arco gagliardissimo, quella palla di piombo, che non passa due once, farà effetto equivalente a mille libbre di piombo. Pigliandosi poi un arco mille volte più gagliardo di quel gagliardissimo, quella medesima pallina farà effetto equivalente a un milione di libbre di piombo: segno evidentissimo che la forza di quel poco peso, e di quel braccio di caduta è infinita » (Ediz. cit., pag. 100-2).

Appresso a questo soggiunge il Torricelli l' altro galileiano esperimento, di simile conseguenza del primo, consistente nell' aver due palle uguali di piombo, e messa l' una sopra l' incudine, per ammaccarla con la forza di un martello caduto dall' altezza di un braccio, far sull' altra uguale ammaccatura, posandovi sopra un peso morto, che voglia essere per esempio dieci libbre. « Ora alcuno crederebbe, prosegue a lèggere il nostro Accademico, che la forza di quella percossa fosse equivalente al momento di quelle dieci libbre di peso quiescente. Ma pensatelo voi: prendasi i due medesimi pezzi di piombo egualmente ammaccati come stanno; se sopra uno di essi io poserò dieci libbre di peso quiescente, certa cosa è che non si spianerà più di quello che sia, avendo egli già un' altra volta sostenuto il medesimo peso di dieci libbre. Ma se vi farò cadere il martello dalla medesima altezza come prima, farà ben nuova ammaccatura, e per agguagliar questa bisognerà posare sopra l' altro pezzo di piombo molto maggior peso, che quel di prima, e questo succederà sempre con progresso sino in infinito » (ivi. pag. 103).

Venivano queste notizie oralmente divulgate in Firenze nel 1642, poco dopo la morte di Galileo, e passate per le orecchie degli uditori si sarebbero rimaste dimenticate ne' manoscritti torricelliani, se non che le teneva fra noi vive la fama, e appresso agli stranieri la commemorazione, che ne faceva quattro anni dopo pubblicamente il Mersenno. Egli dice, nel terzo tomo delle sue *Nuove osservazioni,* che *quae Galileus circa vim percussionis in arcubus consideravit* gliele aveva comunicate in Roma Michelangiolo Ricci. « Vir clariss. M. A. Riccius, ad analysim natus, mecum observationem Pisis a Galileo factam comunicavit, quae sic habet » (Parisiis 1647, pag. 202): e prosegue a descrivere l' esperienza degli archi, precisamente a quel modo che l' aveva descritta il Torricelli, concludendo però la descrizione con queste parole: « Sed de illis arcus experimentis mihi dubitare liceat, donec ipse videro, cum aliae sint observationes, quae contrarium suadere videantur » (ibid.). Soggiunge poi l' altra esperienza galileiana delle palle di piombo, am-

maccate ora per via della percossa, ora per via della semplice pressione, in piena conformità con la notizia, che pochi anni prima ne avevano avuto gli Accademíci della Crusca.

Convalidavano anche i Nostri la fama con questo pubblico documento del Matematico parigino, e il Borelli, richiamando l'attenzione di coloro, che avrebbero letto il suo libro *De vi percussionis,* sopra que' due preclari esperimenti di Galileo; gli descrive in quel modo, che gli trovò riferiti *a Mersenno Reflexionum physico-mathematicarum cap. XXIII.* Tutto insomma quel che s'andava dicendo e scrivendo di ciò in Italia e fuori era portato dalle sole ali 'della fama, degl' incerti voli della quale, come suol sempre avvenire, sarebbe segno il dirsi dal Torricelli che le magnificate esperienze furono fatte in Padova, mentre il Ricci al Mersenno, e il Viviani al Ferroni, come tra poco vedremo, dicevano invece che erano state fatte in Pisa. Nè in questo caso è l'incertezza del luogo di poca importanza, perchè chi chiamava il fatto pisano doveva riferirlo alle speculazioni giovanili di Galileo, quando si sa che ancora non aveva concluso la forza della percossa dover essere infinita. E perchè è certo che non venne l'Autore a una tal conclusione, se non che verso il 1635, sembra certo altresì che nè in Pisa nè in Padova fece egli fabbricare, per il nuovo uso filosofico, quegli archi più o meno gagliardi, ma piuttosto in una delle suburbane ville di Firenze.

Noi però che, invece di ascoltare la fama, abbiamo sott' occhio da consultare i fatti, possiamo esser certi che Galileo non fa, nel suo dialogo pubblicato dal Bonaventuri, nessun motto di quegli archi, dagli ammiratori chiamati insigni nella scienza e preclari. Anche l'altra esperienza delle palle di piombo ammaccate, con la sua conclusione, non si trova nel Dialogo, se non che trasformata nell' esempio del palo e della berta, i reiterati colpi della quale si dice che non pareggiano mai il medesimo peso morto, il quale anzi deve sempre esser maggiore e maggiore, *d' onde pare ritrar si possa la forza della percossa essere infinita* (Alb. XIII, 314).

Nè in Pisa dunque, nè in Padova, nè altrove, sembra che avesse Galileo pensato di fare l'esperienza degli archi della balestra: invece della quale ne aveva immaginata e descritta un' altra, da dirsi più veramente preclara, benchè dal Viviani in fuori nessun altro o pochissimi, anche de' più familiari all' Autore, ne avessero a que' tempi notizia. L'esperienza alla quale accenniamo è quella della troscia di acqua che, dalla secchia di sopra cadendo, percuote nella secchia di sotto, ambedue equilibrate da un peso morto all' estremità di una bilancia. Da così fatta esperienza il Viviani stesso, non curando gli archi tesi delle balestre, o le palle di piombo ammaccate, incominciò a promovere l'uso di quegli strumenti da misurare con qual momento, paragonato a un peso morto, naturalmente cadendo, percotano i gravi. Ci son di queste speculazioni rimasti nei manoscritti non pochi documenti, dei quali noi riferiremo intanto i più importanti, incominciando da ciò che fu suggerito al Viviani stesso dalla lettura del Dialogo galileiano, dove l'Aproino introduce il discorso col descrivere la prima delle esperienze « che mossero

l'Amico ad internarsi nella contemplazione dell'ammirabile problema della percossa » (Alb. XIII, 308).

« Sia la libbra o stadera AB (fig. 51), sostenuta in C, e dall'estremità B pendano due vasi E, F da funicelle, de' quali quello di sopra sia pieno d'acqua, ed amendue si equilibrino coll'altro D pendente dall'altra estremità A. Si osservi poi se, aperto il foro PQ del vaso di sopra, nel tempo del cadere dell'acqua nel vaso di sotto, si alteri l'equilibrio: perchè, se non si guasta, è segno che il momento acquistato nel moto dell'acqua cadente, e che percuote nel vaso di sotto, equivale a quella parte di acqua, che è fra' due vasi. Ma, se la preponderazione seguisse dalle facce del vaso, sarebbe segno che il momento acquistato per la percossa sarà maggiore del momento, che si perde per il mancamento della porzione di acqua PMQN. »

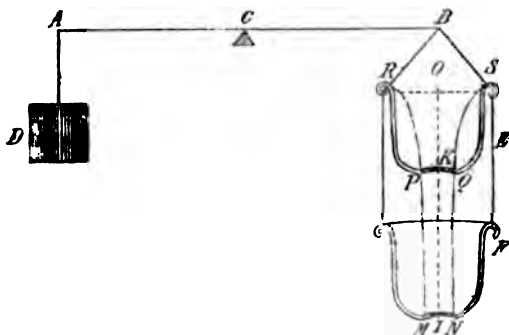



Figura 51.

« Ho fatto l'esperienza, e trovato che l'equilibrio non si varia, ma tuttavia si mantiene in pari. »

« E se la tavola EF (fig. 52), col peso B in D, s'equilibra col peso G in A intorno C, nel tagliare il filo sostenente il peso B, mentr' ei sarà per aria, prepondererà il peso G, ma la percossa di B sulla tavola EF restituirà l'equilibrio senza passare a fare inclinar più giù la stadera. Ma queste esperienze vanno replicate e ben considerate » (MSS. Gal. Disc., T. CXXXII, fol. 64).

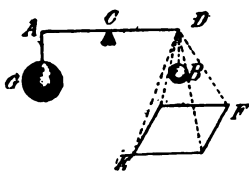



Figura 52.

Replicate però e ben considerate, non sembra che il Viviani rimanesse sodisfatto nè della invenzione di Galileo, nè del modo assai più semplice com' ei l'avrebbe ridotta, per cui si volse a immaginare un'altro strumento, premettendo queste parole alla nota, nella quale ce lo lasciava descritto: « Vedi se, per misurare la forza della percossa possa essere atto uno strumento simile a questo: »

« Siano due regoli uguali AB, CD (fig. 53), fermati saldamente sotto e sopra, e tra loro paralleli, anzi perpendicolari all'orizzonte, per i quali cammini il trasversale EI, ma però duramente, in virtù di due molle accomodate nelle incastrature E, I. Al medesimo trasversale siano affissi pur due regoli minori SV, TR, all'estre-

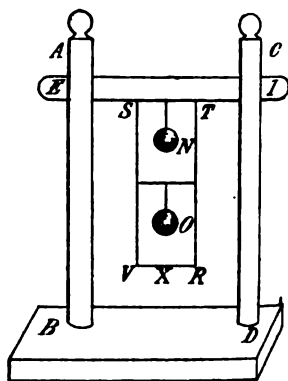



Figura 53.

mità de' quali V, R sia saldamente fermata la tavoletta X, sulla quale percuota il peso N, ovvero l' O da diverse altezze: i quali percotendo in X faranno scorrere in giù il trasversale EI più o meno, secondo che la botta verrà più o meno da alto, o secondo che il peso N sarà più o meno grave, lasciato cadere dalla medesima altezza » (ivi, fol. 63).

Non apparisce da nessuna parte del manoscritto o notizia o indizio che il Viviani mettesse in pratica così fatto strumento, invece del quale trovò forse più comodo valersi delle spire metalliche, dalla loro maggiore o minore distrazione argomentando al maggiore o minor momento di un peso, ora semplicemente posato sopra la spira, ora lasciato naturalmente cadere da un filo attaccato all' estremo inferiore anello di essa. Ne raccolse alcune conclusioni, alle quali se non altro la novità conferisce importanza, e si riducono alle seguenti:

« I. Pesi disuguali, dalla medesima altezza, distraggono spazi nella medesima spira, che hanno la proporzione di essi pesi. »

« II. Il medesimo peso cadente da diverse altezze nella medesima spira fa distrazioni disuguali, le quali hanno fra loro la medesima proporzione che i momenti acquistati nelle cadute disuguali, i quali momenti sono in proporzione suddupplicata della proporzione di dette altezze: cioè sono come le radici di dette altezze. »

« III. Pesi disuguali, compensati da momento di velocità, non fanno distrazioni uguali. »

« IV. Il medesimo peso cadente dalla medesima altezza in spire di resistenze disuguali, nella più debole fa maggior distrazione, ma non secondo la proporzione delle distrazioni, che vi fa un medesimo peso morto. »

« V. Pesi morti disuguali, nella medesima spira, fanno distrazioni, che hanno la proporzione di essi pesi. »

« VI. Il medesimo peso in spire disuguali fa distrazioni disuguali, e nelle medesime proporzioni di esse spire: cioè, se una spira è di dodici anelli, e l' altra di otto, in quella distrarrà dodici punti, in questa otto » (ivi, fol. 57).

Da così fatte conclusioni sperimentali tenta il Viviani di sollevarsi all' altezza, e alla dignità di qualche teorema: e considerando che il momento del peso lasciato liberamente cadere dal filo, che lo teneva legato all' ultimo e inferiore anello della spira, cresce il suo momento secondo le ordinate nella parabola, e che la spira stessa lo impedisce sempre più nello scendere, cioè proporzionalmente alle ordinate nel triangolo; ne conclude che dunque la resultante dell' impeto è sempre la differenza fra quelle stesse ordinate. « Se il peso B (fig. 54) distrae con la sua gravità per lo spazio AB, lasciato cadere da A, distrae AC, doppia di AB. Nel venire da A in B, rispetto

Figura 54.

all' impeto acquistato nel cadere, cresce il suo momento come le linee nella parabola, ma il ritardamento della spira glielo scema secondo le linee del trian-

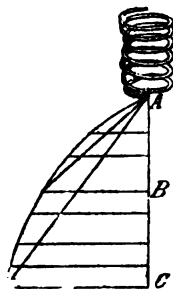
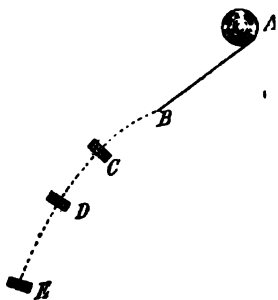
golo; onde il suo momento va secondo le linee, che sono fra la parabola e il triangolo » (ivi, fol. 58).

Dagl' impeti nelle cadute naturali, misuraii per via della parabola, passò quella feconda e instancabile mente speculativa a proporre, per misurare essi impeti ne' moti proiettizi, un modo che per la sua facilità era assai lusinghiero. « Si faccia, così lasciò scritto in un' altra sua nota, la proiezione della palla A (fig. 55) giù per il piano inclinato AB, sicchè poi si volti a far la parabola BCDE, segnata in muro o sopra una tavola verticale, e si ricevano le percosse di quella ad angoli retti sopra diversi pezzi piani, o lastre di sapone, C, D, E, e si osservi il crescere della percossa. Ma, per aggiustar meglio il tutto, si possono prima disegnare diverse parabole nel muro » (ivi, fol. 60).

Figura 55.

Tutte queste però, dal Viviani immaginate, non erano altro che assai belle proposte, le quali non si sapeva dall' altra parte se fossero per condurre all' effetto desiderato di ricavar l' equivalente della percossa dalla maggiore o minore penetrazione del percuziente in un corpo molle, o dalla equiponderanza di esso percuziente con un peso morto. Mentr' egli intanto pensava a qualche altro strumento, e a qualche altra maniera più decisiva, si trovò prevenuto da Carlo Rinaldini, suo collega nella prima istituzione dell' Accademia del Cimento, il qual Rinaldini, forse inconsapevolmente inspirato alle più antiche tradizioni della scienza, che risalivano a quel Giovanni del Giocondo commemorato dallo Scaligero; pensò anch' egli poter essere la stadera che, ricevendo da una parte il colpo, ne misurasse dall' altra l' effetto, secondo la maggiore o minor distanza del romano dal centro dell' equilibrio.

Propose dunque il Rinaldini, in una sua scrittura ai Colleghi, il modo di misurare la forza della percossa, valendosi della detta stadera, dal più piccolo lato della quale pendesse per un filo una palla di piombo, che nello stato di quiete rimanesse in pari col romano, e poi, sollevata la palla e lasciatala liberamente cadere per tutta la lunghezza del filo, per una lunghezza doppia, tripla, ecc., fare scorrere lo stesso romano, infin tanto che, come se si trattasse di pesare una merce, non equiponderasse ora all' una, ora all' altra maggiore strappata. « Questa esperienza, concludeva il proponente, quanto sia facile e puntuale, e di quanto grande importanza, per investigare la cognizione di quell' ammirabil problema, non occorre esagerare a cotesta ingegnosissima e virtuosa Accademia: però prego a fare tale esperienza con la maggiore esattezza che ricerca » (Targioni, Notizie degli aggrandimenti ecc., T. II, P. II, Firenze 1780, pag. 713).

L' esperienza fu fatta a' dì 19 Dicembre 1657, e giova credere con tutta l' esattezza richiesta, ma quel che se ne potè raccogliere si ridusse al semplice fatto che qualunque strappata della corda, benchè rispondente a una

discesa piccolissima della palla, « aveva facoltà di sollevare il romano, benchè allontanato dal punto dell'equilibrio, per molte libbre » (ivi, pag. 668).

Il Viviani, che dirigeva l'esperienza, e che aveva forse sentito in cuore il rammarico del non essergli sovvenuto un tal pensiero, di sì facile esecuzione e puntuale, come il Rinaldini diceva, e come tutti avevano creduto; ebbe a restar maravigliato del vedersi innanzi fallite così belle speranze: e mentre andava con gran sottigliezza, e pure inutilmente, investigando di ciò la misteriosa ragione, occorsegli avventurosamente a leggere una scrittura (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 57, 58) che Lodovico Serenai aveva diligentemente copiata dall'autografo del Torricelli. Era una lettera indirizzata al Mersenno, nella quale si svelavano le fallacie di un'esperienza fatta allora a Parigi, per convincere di falsità la legge galileiana dei moti accelerati. E perchè dagl'impeti di un percuziente nella bilancia determinava quel Fisico francese le relazioni fra gli spazi e i tempi, prendeva il Torricelli occasione di descriver cose ed esporre pensieri, che corrispondevano con quelli passati allora allora per la mente al Viviani, il quale fece perciò della detta lettera torricelliana, di sua propria mano, un estratto, che ci è tuttavia rimasto sotto il titolo *Excerptum ex quadam epistola Torricelli ad Mersennum.*

« . . . . . . Certissimum est globum unius librae, si in alteram lancium alicuius librae cadat a qualibet altitudine etiam minima, non solum aequalem sibi globum, sed etiam centuplo maiorem ex altera bilancis parte elevaturum esse. Libra vero, non utcumque, sed huiusmodi esse debet, ut ipsius fila nihil distrahantur, neque brachia curventur, neque materia, sive globi cadentis sive subiectae lancis, contundantur: haec enim singula effectum impediunt. Gravitas etiam lancium et brachiorum librae experimentum minus exactum reddere possunt, dum haec singula impetum seu momentum cadentis globi minuere certum est: quae omnia, si penitus vitentur, sive quoad fieri poterit minuantur, procul dubio quilibet parvi globuli casus in altera lancium ingens pondus ab alia parte elevabit, sed per spatium exiguum. »

« Esto libra AB (fig. 56) cuius fulcrum in medio C: ex una parte pondus centum librarum, ex alia unius tantum librae, cadatque pondus minus ex altitudine decem diametrorum suarum. Quaeritur an elevari possit pondus decem librarum? Hoc quidem nescio, sed facto experimento clavum ferreum D, tenaci ligno infixum, subiici lanci A, visumque est

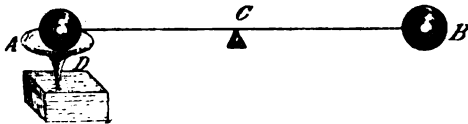



Figura 56.

pondus centum librarum non impellere ulterius clavum. Globus vero ferreus unius librae, cadens ab altitudine decem diametrorum, impellebat eumdem, nam repetitis saepius ictibus totus clavus in ligno fixus tandem est. Ergo maius momentum est ictus globi minoris, quam gravitatis maioris, propterea ictus minoris gravitatem maioris superare debet, quamquam, cum proportio gravium maxima fuerit, spatium prae exiguitate oculis percipi nequeat, sive

etiam ob inflexionem librae nullum effectum facere videatur » (MSS. Gal. Disc., T. XXVI, fol. 21).

Le osservazioni fatte dal Torricelli intorno alle qualità, che si ricercano nella bilancia, perchè non debba impedire la buona riuscita dell'esperimento, fece mirabilmente accorto il Viviani dei difetti, che si trovavano nella stadera proposta dal Rinaldini, al distrarsi della corda nella quale, per le strappate della palla, attribuiva principalmente il non essersi potuta ricavare alcuna notizia certa, per le più esatte misure della percossa. Fatta perciò costruire una libbra, come il Torricelli la prescriveva, e posata sopra la lancia A una palla di cinque once, trovò che veniva sollevata per un dito, facendo dall'altezza di un braccio cadere sull'altra lancia B una palla di legno del peso di un'oncia e mezzo. Tornando poi a far cadere la medesima palla per un'altezza quadrupla, e poi nonupla, e poi sesdecupla, in modo che gl'impeti delle percosse crescessero via via come due, tre, e quattro, trovò che i pesi morti, i quali potevano essere sollevati a quella stessa altezza di un dito, volevano essere 20, 45 e 80 once, nè più nè meno, con tal legge sperimentata sempre costante. Ne esultò come di una scoperta, e n'esultarono, chiamati testimonii del fatto, i colleghi suoi accademici del Cimento, e specialmente il principe Leopoldo, a cui sembrò che finalmente si fosse venuti a raccogliere il frutto delle lunghe e penose speculazioni di Galileo.

Si dimostrò l'esperienza dal Viviani nell'Accademia il dì 23 Dicembre 1657; poi vennero le Feste natalizie e del capo d'anno, celebratesi le quali in Firenze, andò il Principe alle cacce di Pisa, dove si tratteneva professore dell'Università il Borelli. Alla prima occasione ch'ebbe esso Principe di vederlo, fra i diporti e i negozi, disse per prima cosa di avere a dargli una bella notizia, qual era che il Viviani, valendosi di una bilancia, secondo che per quell'uso era stata fatta costruire dal Torricelli, aveva trovato che i momenti delle percosse, fatte sopr'una delle lancie, stavano come i quadrati de' pesi morti posati sull'altra. Anche il Borelli prese allora parte all'esultanza de' suoi colleghi, dai quali era dovuto stare assente in que' giorni, e il dì 7 Gennaio appresso scriveva così in una lettera indirizzata a Firenze allo stesso Viviani: « Al serenissimo principe Leopoldo non ho parlato fuor che una volta sola, perchè le cacce e le faccende finora l'han tenuto davvantaggio occupato. Mi accennò in ogni modo alcune belle invenzioni di V. S., e in particolare quell'ammirabile effetto ed inaspettato della forza della percossa nella stadera, ed io avrei gran curiosità di sapere se, nella lettera che V. S. tiene della buona memoria del Torricelli, vi è particolarmente questa osservazione, oppure è un semplice suo discorso in confermazione del concetto del signor Galileo » (MSS. Cim., T. XXIV, fol. 31).

Il Viviani, per sodisfare alla filosofica curiosità di lui, che gli era allora affezionatissimo amico, gli mandò, insieme con le relazioni delle sue esperienze, esatta copia della lettera torricelliana, della quale il Borelli non fece che una lettura superficiale. Ma poi, quando si dette a specular di proposito intorno all'energia della percossa, per penetrarne la vera e intima natura,

tornò a meditar su quell' estratto di lettera al Mersenno, e ci trovò dentro formulata una proposizione verissima, la quale poi trasfuse in quella sua XC, in cui, dietro i principii e gli sperimenti dello stesso Torricelli, intendeva di dimostrare: « Vis et energia cuiuslibet percussionis maior est quacumque potentia finita, quae, absque motu locali, solummodo virtute gravitatis premat » (De vi percuss. cit., pag. 203). Quanto poi ad applicare alla misura della percossa i dimostrati principii, e il descritto strumento, ebbe a notare il Borelli una certa esitanza, che non poteva in tant' uomo, qual era il Torricelli, non esser sentita senza un giusto motivo, e quel *nescio* che leggeva seguitare alla domanda *an, si cadat pondus minus ex altitudine decem diametrorum suarum, elevari possit pondus decem librarum,* gli parve fare un singolar contrapposto con la nuova baldanza del Viviani.

Mentre gli passavano per la mente così fatti pensieri, capitarono al Borelli fra mano le epistole del Gassendo *De proportione qua gravia decidentia accelerantur,* nella prima delle quali lesse intitolarsi un capitolo *De experimento in Bilance facto ac aliud revera probante quam velocitates esse sicut spatia.* Dalla curiosità e dall' importanza dell' argomento invitato a proseguir la lettura, trovò riferirsi, nelle sue testuali parole, da un discorso del gesuita Pietro Cazr, la seguente conclusione sperimentale: « Ut globus quilibet cuiuscumque materiae ex unius diametri altitudine cadens duplum sui ponderis; hoc est, praeter pondus quod sine impetu in aequilibrio retineret, aliud sibi aequale attollat; et ex altitudine duarum diametrorum, triplum; ex tribus diametris, quadruplum, et ita deinceps » (Parisiis 1646, pag. 42). Soggiungeva l' Autore delle dette Epistole altri passi, ne' quali, dop' avere il Gesuita magnificata la novità della stupenda legge da sè scoperta, concludeva dalle esperienze, contro i teoremi di Galileo, che gl' incrementi delle velocità hanno la proporzion medesima degli spazi passati nelle scese dei gravi.

La curiosità di veder l' esito di questo negozio frugava sempre più l' animo del Borelli, il quale, più avidamente applicatosi a succhiare il senso di quelle pagine, leggeva ciò che, per verificare col medesimo strumento della Bilancia, per quest' uso speciale fabbricata co' piatti sostenuti da robuste catene, le vantate esperienze del Casreo; diceva di essere andato apparecchiando il Gassendo, col far cadere i globi per altezze via via crescenti come i loro quadrati, e concludendo così il ragionamento, che, tutto al contrario delle opposizioni del Gesuita, confermava mirabilmente la legge di Galileo: « Praetereo autem quemadmodum ut globus extulit dumtaxat duplum, ex diametris quatuor, sic etiam deinceps extulerit solummodo triplum, ex diametris novem, et quadruplum ex sexdecim » (ibid., pag. 48).

A leggere questa conclusione, dalla quale appariva che gl' impeti della percossa stavano come i pesi morti, ebbe a maravigliarsi il Borelli come mai avesse il Viviani, con somiglianti processi sperimentali trovato che stavano invece come i quadrati dei pesi morti: ed essendo la verità una sola, e gli sperimentatori ambedue di tal qualità, da non credere che si fossero così facilmente ingannati, andava fra sè ricercando la causa delle due opposte

osservazioni. Nè gli fu difficile ritrovarla, tornando a meditare sopra la lettera del Torricelli, dalla quale si concludeva che ogni piccolo impeto, in qualunque più piccolo corpo, bastava per superare qualsivoglia energia di gravità quiescente. Vedeva inoltre essere ciò confermato dalle stesse esperienze, fatte con la stadera del Rinaldini nell'Accademia del Cimento, dalle quali esperienze resultava che la palla, da qualunque minima altezza caduta, era bastante a sollevare il romano per molte libbre di più, che non pesava in sè stessa. Di qui saviamente argomentava il Borelli che fra il grave in moto e il grave in quiete non si poteva dar proporzione, per cui non faceva maraviglia se il Gassendo e il Viviani, partitisi ambedue da un falso principio, riuscissero a conclusioni fra loro opposte. « Quoniam quilibet impetus, in quolibet corpusculo inexistens, superat energiam gravitatis quiescentis, et impetu omnino privati, propterea quod ipsum impellere et elevare potest, ut ostensum est; igitur, quantumvis augeatur multipliceturque simplex gravitas, absque motu locali, nunquam superabit, imo nec aequabit vim impetus, et ideo simplex gravitas et impetus non erunt quantitates eiusdem generis, et propterea comparatio inter eas institui non potest, nec ullam proportionem inter se habere possunt. Sed nulla quantitas potest esse mensura quantitatis alterius generis, sicut linea esse non potest mensura soni aut ponderis; igitur pondus simplex elevatum non potest esse mensura impetus percutientis » (De vi percuss. cit., pag. 252).

Veniva dunque di qui data sentenza contro tutti quegli strumenti che, per ridurre la forza della percossa alla misura della gravità, aveva immaginati il Viviani, sull'andare di quegli proposti da Galileo, fra quali quel degli archi della balestra era famoso. E anche contro questa famosa invenzione s'estendeva la sentenza dello stesso Borelli, il quale dunque era venuto a dimostrare la falsità delle dottrine di Galileo intorno alla forza della percossa, non tanto rispetto ai principii, quant'altresì rispetto alle loro applicazioni sperimentali. Nè la verità di così fatta sentenza fu potuta mettere in dubbio da quegli stessi, i quali avevano prima magnificate le invenzioni del famosissimo Vecchio, intorno alle quali Giuseppe Ferroni promoveva alcuni dubbi in una lettera indirizzata al suo maestro Viviani, facendogli osservare che, nel restituir l'equilibrio tra le forze delle trazioni degli archi, e le semplici gravità delle palle di piombo prementi, si venivano a paragonare due cose eterogenee fra loro. È notabile però che dicesse essergli entrati nella mente que' dubbi, per non esser rimasto sodisfatto di ciò, che aveva letto nel libro del Borelli, il quale anzi, nella proposizione CXXXV aveva suggerite quelle medesime osservazioni, dalle quali diceva di aver preso motivo di dubitare il discepolo del Viviani.

Nella citata proposizione infatti descrive l'Autore un'esperienza, ch'ei diceva di avere istituita, *quando, communi errore detentus, impetum percussivum ab aliquo pondere mensurari posse censebam* (De vi percuss. cit., pag. 296). Consisteva nel far cadere dalla medesima altezza un'accettina di ferro di tre once, ora sopra una focaccia di cera pura, ora sopra un'altra

simile focaccia, ma più morbida, perchè composta di cera mescolata con sego. Le ferite poi fatte sopra le due focacce, così per via della percossa, procurava di ripeterle uguali, per via della pressione di un peso morto posato sopra l'accetta: e perchè trovò che undici oncie bastavano per far l'incisione nella focaccia più molle, e 36 nella più dura: ne concludeva, aggiungendovi il peso dello strumento, che le percosse stavano come i pesi morti, ossia come 14 a 39. Poi riconobbe che queste operazioni diverse dipendevano da tutt' altre cause che dalle pressioni, e osservava inoltre « quod, quotiescumque applicantur corpora ponderosa, imponunturque corporibus mollibus atque cedentibus, esse omnino impossibile ut haec ab illis comprimantur absque motu locali, dum corpora mollia cedunt ac stringuntur, eo tempore quo urgentur ab incumbentibus ponderibus: comprimentur ergo corpora mollia et cedentia, non a ponderibus quiescentibus, sed motu locali agitatis. Verum concipi non potest motus localis absque velocitate, seu impetu, nec corpus grave, impetu affectum, subiectum corpus comprimere potest absque percussione. Igitur revera corpora mollia quodammodo percutiuntur ab incumbentibus ponderibus, non autem solummodo stringuntur, comprimunturque a vi gravitatis quiescentis » (ibid., pag. 297, 98).

Nè questa osservazione giustissima del Borelli è punto diversa da quell' altra, che condusse il Ferroni a spiegare i maravigliosi effetti degli archi di Galileo, *senza che ne segua questo disordine, che la stessa percossa possa dirsi infinita, ed equivalente a pesi sempre maggiori,* che è il paralogismo, in cui per tutto il dialogo s' avvolgono le dimostrazioni e i discorsi del Salviati. E perchè dalla proposta del discepolo è facile argomentare alla risposta del Maestro, e sono ambedue documento importantissimo di questa storia, benchè, avendo comunicato il Ferroni i suoi pensieri al Casati, questi gli pubblicasse nel cap. VI del suo VII libro *Mechanicorum,* (Lugduni 1684, pag. 677-81); trascriveremo qui dal suo originale la lettera scritta il dì 13 Aprile 1675 da Bologna, nella quale il Ferroni stesso, dopo avere annunziata al Viviani la ricevuta del libro della Scienza universale delle proporzioni, così soggiunge e prosegue in sino alla fine:

« Speravo di ritrovare nel suo libro la soluzione di quella famosa esperienza, fatta in Pisa, della palla di piombo cadente dagli archi, ne' quali par che si provi la forza della percossa essere infinita, mentre può equivalere a pesi e pesi sempre maggiori: esperienza confermata poi dal Borelli coll' accettina cadente sulla cera e sul sego, ove lo stesso piombo, posto in testa dell' accettina, non fece poi le medesime spaccature col premere, che fatte furono dalla percossa cadente. Or non avendo trovata la soluzione, le devo dire una mia semplicità, come scolare ad un mio riverito maestro. »

« Mi pare che, nella sperienza di Galileo fatta in Pisa, male si paragoni l' impeto della palla cadente dal filo attaccato alle corde degli archi, uno rigido l' altro molle, con il peso di piombo premente e sostenente le corde degli archi ai segni delle discese cagionate dalla palla cadente, poichè *etherogenea etherogeneis non comparantur, sed homogenea homogeneis.* Or

l' impeto della cadente palla, e del piombo premente col peso, sono cose eterogenee. Devesi dunque far la comparazione delle cose omogenee, come sono impeto ed impeto. Per tanto io paragono l' impeto della palla cadente dal medesimo filo in due archi un duro l' altro dolce, con l' impeto, che in sè produce il medesimo peso di piombo attaccato alle corde dei medesimi archi, in quella poca discesa, che fa con la sua pressione, per tirar gli archi ai segni delle discese primarie. Tra questi due impeti si trova questo divario: che la palla, cadente sempre dal filo di una stessa lunghezza produce sempre in sè stessa il medesimo impeto per l' uguaglianza della caduta, e giunta alla resistenza degli archi opera con tutto l' impeto anticipatamente preconcetto nella caduta dal filo per l' aria libera, il qual impeto a poco a poco dalle resistenze degli archi si va distruggendo e si annienta. Ma il piombo premente attaccato agli archi opera diversamente: poichè non opera con impeto antecipatamente preconcetto, ma incomincia nella sua piccolissima scesa a produrre impeto in sè, con cui vince la forza di molla negli archi, e questo impeto non si distrugge, anzi va sempre crescendo, sin che si giunge all' equilibrio e consistenza. »

« Posti questi preambuli, concludo così: La palla cadente, che è la medesima e sempre cade dalla medesima altezza, opera sempre con il medesimo impeto, anticipatamente preconcetto nella caduta, tanto dall' arco rigido, quanto dall' arco pieghevole. Ma le medesime, per esempio dieci once di piombo, nella lor poca discesa fatta con la pressione, non operano nell' uno e nell' altro caso, col medesimo impeto, ma con impeti molto diversi: poichè, attaccate le dieci once di piombo all' arco duro, trovando gagliarda resistenza, comincia ad operare con impeto debolissimo, il quale, crescendo sino all' equilibrio in proporzione sudduplicata del suo brevissimo spazio, poco cresce. Ma le medesime dieci once di piombo attaccate all' arco molle, trovando resistenza minore, incominciano a premere, e a scendere con grado ed impeto assai maggiore di quel primo prodotto nell' arco duro, e crescendo con la solita proporzione, sino all' equilibrio, l' impeto cresce di molto. Sicchè le medesime dieci once di piombo premente producono più impeto nell' arco dolce e soave, che nell' arco gagliardo, onde maraviglia non è se, per tener l' arco duro a quel segno ove lo trasse la percossa della palla cadente, vi vogliano forse venti e più once di peso. »

« Sicchè, paragonando impeti con impeti, mi pare di rendere la ragione di questo maraviglioso fenomeno, perchè il medesimo peso con la pressione non tenga le due corde degli archi a quei medesimi segni, ai quali furono tratti dalla percossa della palla cadente, senza che ne segua questo disordine che la stessa percossa possa dirsi infinita, ed equivalente a pesi sempre maggiori. Vi vuol più peso nell' arco duro, perchè il peso primiero, che produsse nell' arco molle impeto uguale alla percossa cadente, e perciò lo trasse e trattenne al medesimo segno; attaccato poi all' arco duro, non produce nella pressione impeto uguale a quello della cadente palla, ma assai minore, e questo per la maggior resistenza: e queste sono le mie semplicità. »

« Io averei in pensiero di far recitare da un mio scolare un poco di problema sopra questa bellissima esperienza pisana del Galileo, ma, non avendo trovato nel Borelli soluzione a mio gusto, e che mi oppaghi, ho speculata questa bassezza, che gli ho proposto. La prego a degnarsi correggermela, e dirmi dintorno a detta esperienza la sua ragione, del che io la scongiuro per tal uomo, che so che ella negare non mel potrà: dico per il nome glorioso del nostro comune maestro, e splendore della nostra Toscana, il Galileo » (MSS. Gal. Disc., T. CXLVI, fol. 36, 37).

Avrebbe, se così propriamente non rispose, potuto pure rispondere il Viviani non averci nessun documento certo, per provar che il notato disordine nell' esperienza degli archi si dovesse attribuire al Galileo, a cui, per misurare la forza della percossa, era sovvenuta una molto diversa invenzione e assai più bella, dallo stesso Viviani letta in sul cominciar del Dialogo, dov' è messa in bocca all' Aproino, il quale, dop' aver descritte le due secchie bilanciate a quel modo, che rappresentammo addietro nella figura LI, così soggiunge: « La riuscita, siccome agli altri fu inopinata, così fu maravigliosa, imperocchè, subito aperto il foro e incominciato ad uscirne l' acqua, la bilancia inclinò dall' altra parte del contrappeso, ma non tantosto arrivò l' acqua percotendo nel fondo dell' inferior secchia, che, restando di più inclinarsi il contrappeso, cominciò a sollevarsi, e con un moto placidissimo, mentre l' acqua precipitava, si ricondusse all' equilibrio, e quivi, senza passarlo pur di un capello, si librò e fermossi perpetuamente » (Alb. XIII, 309, 10).

Poteva, dicevasi, rispondere il Viviani al Ferroni che la prima esperienza e l' unica, della quale s' abbia certezza, è questa immaginata da Galileo, per misurare la forza della percossa, la quale si concludeva dover essere equivalente al momento, e al peso di quella quantità d' acqua cadente, che si trova in aria sospesa tra le due secchie. Ma il disordine nonostante rimaneva lo stesso, comparandosi *etkerogenea etherogeneis,* quali sono la troscia d' acqua in moto, da una parte della bilancia, e il contrappeso dall' altra del grave quiescente.

Forse nè il Viviani stesso, nè il Ferroni, riconobbero nella esperienza idraulica questo disordine, come non sembra lo riconoscesse un illustre Matematico recente, il quale, in alcune sue lezioni di Fisica matematica, si giovò dei progressi fatti dalla scienza, per misurare la quantità dell' acqua cadente, e per concluderne di lì, ciò che non aveva saputo fare il Salviati, la precisa misura dell' urto fatto dall' acqua sul fondo della secchia. Fu il Newton, il quale venne a togliere nello stesso Salviati quell' ambiguità, per cui dovette abbandonar come inutile il bello esperimento descrittogli dall' Aproino: il qual Newton, immaginando che la troscia sospesa in aria sia PN (fig. 57), e la sua altezza KI, concludeva, nel secondo corollario della proposizione XXXVI dimostrata nel secondo libro dei Principii di naturale Filosofia: « Vis, qua totus aquae exilientis motus generari petest, aequalis est ponderi cylindricae colummae aquae, cuius basis est foramen MN, et altitudo 2 IK. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam aequat, pondere suo, ab altitudine

KI cadendo, velocitatem suam qua exilit acquirere potest » (Genevae 1711, pag. 291), come resulta, soggiungiamo noi per l'Autore, dalla prima proposizione dei moti naturalmente accelerati, dimostrata nel terzo dialogo di Galileo.

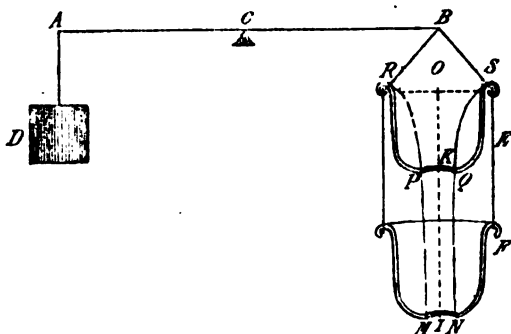



Figura 57.

Ma la nuova Filosofia neutoniana suggeriva un accorgimento di più, per la più esatta risoluzion del problema. Galileo e il Viviani limitavano alla sola scesa attuale, nella troscia PN, la quantità dell'acqua, la quale non gravita sulla bilancia, perchè, come si mostra per la bella esperienza di Leonardo da Vinci, da noi riferita a pag. 227 del Tomo precedente, *il peso grave, che libero discende, non dà di sè peso ad alcuno sostentacolo:* secondo il Newton però devesi aggiungere la quantità dell'acqua, compresa dentro la cateratta RQ, la quale, benchè non muovasi in atto, opera in potenza nello spinger l'acqua dal foro MN con tal impeto, come se fosse naturalmente caduta dall'altezza OK, per il noto teorema del Torricelli.

L'acqua dunque, che non gravita sulla bilancia, è secondo i principii neutoniani uguale ad un cilindro liquido, di cui il volume è $2\,\mathrm{OI}\,.\,\pi\,\mathrm{MI}^2$: e chiamata D la densità, e g l'intensione della gravità, $2\,\mathrm{OI}\,.\,\pi\,\mathrm{MI}^2\,.\,\mathrm{D}g$ è la misura del peso. Che se facciasi $\pi\,\mathrm{MI}^2$, area del foro MN, uguale ad A, e invece dell'altezza 2 OI, chiamata v la velocità corrispondente, si sostituisca $\frac{v^2}{2g}$, sarà il peso dell'acqua, che non gravita sulla bilancia, espresso dalla formula $\mathrm{A}\,.\,\mathrm{D}\,.\,v^2$, « la quale, scrisse Fabrizio Mossotti nella sua XVI lezione di Fisica matematica, ci dice che l'urto di una vena fluida è in generale misurato dal prodotto della densità, dell'area della sezione urtante, e del quadrato della velocità » (Firenze 1843, T. I, pag. 147). Se avesse dunque, come sembra, il valoroso professore di Pisa creduto potere equivalere una tale misura di forza viva al peso morto, che fa equilibrio alle secchie nella Bilancia gelileiana, sarebbe anch'egli incorso nel disordine del comparare insieme due cose eterogenee, contro i precetti della logica, saviamente revocati dal Ferroni, e prima di lui dal Borelli, il quale è notabile che, prendendo a scrivere il suo libro coll'intenzione di esplicare i concetti di Galileo, riuscisse invece a dimostrare la falsità delle leggi, da lui assegnate alle forze della percossa, e la fallacia degli strumenti da lui stesso proposti per misurarla.

V.

L' esame dei fatti, indipendente e libero dalla suggezione delle prevalse opinioni, può aver persuaso chiunque più ritroso che la nuova Scienza del moto, per quel che riguarda l' energia della percossa, è inutile andare a cercarla là, dove tutti si credevano d' averla infallibilmente a ritrovare: nei discorsi cioè e nel Dialogo postumo di Galileo. Rimasta la sua prima Scuola dagli errori e dalle fallacie sterilita, il Borelli poi *proprio marte* diceva di averla recuperata, e la proponeva, nel suo trattato *De vi percussionis,* al pubblico, a cui sperava che *ob novitatem et materiae praestantiam,* sarebbe per riuscire non ingioconda. È da osservare però che, nella cultura della Scienza meccanica di quei tempi, avvenne ciò che spesso avviene nella cultura degli orti, che, vedendo uno nel suo mancare qualche albero pellegrino, ve lo inserisce con la sua propria industria, mentre, per le aiuole di un altro, si vedeva già da gran tempo frondeggiare, e menar fiori e frutti, propagginatovi o scoppiato di sottoterra spontaneo dall' ubertà delle preesistenti radici.

Chi crede che uno solo fosse il campo della Scienza meccanica, e quello segnatamente piantato e coltivato, com' oasi nel deserto, in Toscana, facilmente s' inganna, avendoci oramai rivelato a tante occasioni la storia esservi qua e là altre oasi sparse, alle quali erano approdati i semi e gl' impostimi da un primo istituito paradiso terrestre. Nè a cotesto paradiso, alla custodia del quale avevano i Filosofi antichi proposto Aristotile, mancarono i cultori, il più benemerito fra i quali, sorto ne' tempi nuovi, è Giordano Nemorario. Si diffusero da lui quelle benefiche tradizioni, che passarono in Italia a fecondare gl' ingegni nei contemporanei di Leonardo da Vinci, ma più ubertosamente rimasero ad allignare nella patria Alemagna, per mezzo alla quale, essendo lungamente andate occulte e disperse, s' incominciarono a raccogliere e a pubblicare per gli studi solerti e la diligenza insigne di Giovan Marco Marci.

Che veramente le tradizioni, rimaste nella Scienza galileiana intercise, vigessero tuttavia nel campo della scienza universale, alcuni secoli prima che venisse a resuscitarle fra noi il Borelli; s' argomenta dalle Note di Leonardo da Vinci, in una delle quali osservammo già come si trovassero espresse le quantità del moto dal prodotto della velocità per la mole, cosicchè, avendosi due di quelle quantità uguali, staranno in esse le velocità in contraria ragion delle moli. Conseguiva di qui che, se le velocità sono uguali, le forze delle percosse stanno direttamente come i pesi. Confermava Leonardo questa proposizione con l' esperienze, per introdursi alle quali domandava « Se dieci colpi d' una libbra per colpo, caduti sopra uno loco, cadendo un braccio da alto, ficcheranno tanto uno chiodo d' uno braccio, quanto farebbe un

peso unito di dieci libbre. » Alla qual domanda faceva seguitare la facile risposta: « Questo mostra di no, imperocchè, se tu volessi ficcare uno chiodo col peso d' un altro simile chiodo, questo sarebbe impossibile, imperocchè, se tu vi battessi sopra esso diecimila simili colpi, tutti sarebbono niente. E se tu torrai venti tanti di peso, fia il colpo a proporzione del chiodo che voi ficcare » (Les Manuscrits etc., Manus. A, Paris 1881, fol. 23).

Soggiunge poi Leonardo un' esperienza più diretta a confermare la verità dell' annunziata proposizione, osservando quanto maggior trafitta si faccia sopra una lamina di piombo da un martello di una libbra, e da un' altro di cento, benchè scendano ugualmente veloci, perchè lasciati ambedue andare dalla medesima altezza. « Se tu lascerai cadere uno martello di una libbra cento volte l' altezza di uno braccio sopra una verga di piombo, e poi tolli uno martello o altro peso, che sia della grosseza del martello, e sia tanto lungo, che pesi cento libbre, e fallo medesimamente cadere l' altezza di uno braccio sopra una verga di piombo simile alla prima: e vederai quanto la verga del colpo unito fia più trafitta che la prima » (ivi, fol. 4).

Che le altre varie proprietà della forza della percossa fossero, per legittima conclusione immediata da queste proposizioni fondamentali, conosciute da' contemporanei seguaci di quella Scuola, alla quale apparteneva Leonardo; non sembrerà a nessuno incredibile o maraviglioso. Che se anzi si ripensa come fossero quegli sconosciuti Matematici, secondo noi vissuti in un secolo d' ignoranza e di barbarie universale, esperti in comporre e in decomporre le forze, ci potremmo aspettare di ritrovar, ne' loro libri o ne' loro manoscritti, risoluti, anche della forza della percossa, problemi, intorno ai quali si sarebbero sgomentati di mettersi a cimento Galileo, e i discepoli di lui più valorosi. Ma che ci hann' elleno luogo le espettazioni, se ne' libri di Giovan Marco abbiamo, di quello che si congetturava, l' attestato vivo e presente? Egli confessa che, siccome di ogni altra forza, così di quella della percossa la notizia è molto oscura, e perciò soggiunge: « Ut in hac obscuritate aliquam lucem consequamur, quae non nisi ex natura impulsus prius cognita clucescit, de qua in libro *De arcu coelesti* latius disseremus, notandum hic breviter.... »

Così fatte parole premetteva Giovan Marco, nella proposizione XXXVII *De proportione motus,* alla recensione ordinata di quei principii fondamentali, da' quali poi, in varii corollari o porismi, si dimostrerebbero le proprietà dei gravi, che percotono o si urtano insieme. Gli otto *Porismi* però, che seguitano alla detta proposizione, ci avverte l' Autore non essere altro che un compendio di ciò, che più diffusamente egli stesso avrebbe trattato nel libro Dell' arco celeste. Sembrerebbe a prima vista l' argomento alieno dal presente soggetto, ma ripensando poi che la luce era per gli antichi composta di tanti minimi globuli, emessi dal corpo lucente, s' intende come le riflessioni ottiche, per esempio, si facessero cadere sotto la legge meccanica universale della riflessione dei corpi duri. Meccaniche infatti son parecchie proposizioni di Vitellione, per condur le quali si compone e si decompone un raggio di luce, come si compongono e si decompongono nel parallelogrammo le linee, prese

a rappresentare le forze. La XL proposizione meccanica perciò, nella quale Giovan Marco dimostra che l'angolo dell'incidenza è uguale all'angolo della riflessione, si comprende come non dovesse differire dalla proposizione ottica, ch'egli avrà in modo simile annunziata e dimostrata nel libro dell'Arco celeste, solamente intendendo applicato il moto, invece che a un globo duro di ponderosa materia, a un sottile atomo di luce. Parimente, in quel capitolo, ch'egli intitola *De motu reflexo lapillorum ex aqua,* non è difficile indovinare l'applicazione dei moti reflessi di una sfera, dentro le cave pareti di un vaso, alle molteplici riflessioni di un raggio di luce, dentro una gocciola rorida, per venir indi a spiegare, come talvolta si osserva, la pluralità degli Archi celesti.

Ci siamo espressi così per modo di congettura, perchè, sebbene sia un fatto che Giovan Marco mantenne le sue promesse, chi ha mai veduto quel suo libro *De arcu coelesti?* Quegli stessi pochi, che l'hanno commemorato, hanno dovuto confessare di non esser riusciti a consultarlo nelle sue fonti, rimettendosene a quello che ne portava la pubblica fama, o se n'era detto dai discepoli dell'Autore, o dagli ascritti al medesimo sodalizio di lui. Anche il libro *De proportione motus* è, specialmente fra noi, così raro, da doverci chiamare veramente felici d'averlo potuto avere ad esaminare sott'occhio. Nè qui possiamo tacere la maraviglia che proviamo, nel ripensare a quei dotti Alemanni dei tempi passati e dei presenti, i quali, potendosi giustamente gloriare di avere avuto nella loro nazione il maestro, non delle sole scienze del moto e della luce insegnate nel medesimo tempo e un secolo dopo da Galileo e dal Newton, ma di parecchie altre mirabili verità ignorate da loro; lasciano liberamente scrivere alla Storia, benchè, riproducendo e diffondendo le opere di Giovan Marco, la potessero convincer di menzogna, come venisse d'Italia e d'Inghilterra la luce a illuminar le tenebre del loro settentrione.

Comunque sia, giacchè ci è stata favorevole la fortuna, proseguendo a svolgere le preziose pagine del Matematico di Praga, per le quali trovammo già dimostrate le proprietà dei moti accelerati, insieme con le leggi dei pendoli di lunghezza varia di fili, e risoluto il problema della lunghezza del pendolo che misura i secondi; soggiungeremo quest'altro insigne esempio di meccaniche dottrine recateci dallo straniero, non per supplire ai difetti, ma per emendare gli errori di Galileo, nell'istituir che fa quegli il primo, per via della detta proposizione XXXVII, la vera nuova Scienza della percossa.

Le cose, che voleva ivi brevemente notar l'Autore, perchè si potesse, in tale e tanta oscurità, conseguir qualche luce, si riducono a cinque capi, l'essenza dei quali si condensa in quell'ultima osservazione provocata dal dubbio se una palla di legno, che lentamente si muova, possa ribattere un'altra palla di ferro, che a lei venga incontro con qualunque violenza. « Ad pleniorem huius atque aliarum obiectionum solutionem, risponde Giovan Marco, notandum primo: Ut mobile moveatur non sufficere quamlibet impulsum, sed proportionatum illi mobili. Impulsus enim, quo globus ligneus ad motum con-

citatur, haudquaquam loco movebit pilam ferream eiusdem molis aut maiorem: at vero, si huius impulsu moveatur globus ligneus, motu agitabitur multo velociore. Secundo: hanc proportionem motus et impulsus non a mole sed a gravitate illorum corporum determinari » (De proport. motus, Pragae 1639, fol. 44, 45).

La palla dunque di legno, mossa dalla medesima forza, va secondo i posti principii tanto più veloce della palla di ferro, non a proporzion del volume, ma della quantità di materia o della massa: cosicchè, chiamando questa M, F la forza, V velocità che ne resulta, il fondamento posto da Giovan Marco alla nuova Scienza della percossa, si potrebbe esprimere dalla formula $V = F : M$, d'onde ne segue che, essendo le forze e le masse uguali o fra loro proporzionali, le velocità pure dovranno resultare uguali. « Itaque globus ligneus maior et glans plumbea minor, si aequiponderant, ab impulsu aequali aequali velocitate moventur. Simili modo, si eamdem rationem habeant impulsus quam habent pondera, erit velocitas motus aequalis » (ibid., fol. 45).

Un'altra osservazione, che Giovan Marco in terzo luogo soggiunge, è che la percossa non si produce per il solo contatto, « sed ex irruptione violenta, qua veluti penetrat percutiens percussum » (ibid.), cosicchè, movendosi un globo contro un altro globo uguale e omogeneo, questo ch'era in quiete, per la nuova forza in sè trapassata, si moverà, e l'altro ch'era in moto diventerà quiescente. L'effetto, di cui chi gioca alle palle fa continua esperienza, e descritto nel Porisma primo: « Si globus alium globum percutiat qiescentem et aequalem, illo expulso quiescit » (ibid., fol. 45 ad t.) è illustrato poi nel primo Problema che, proponendosi « Globum in plano quiescentem percutere alio globo quacumque violentia, neque tamen loco movere » (fol. 47); si scioglie col porre allato al globo, che ha da rimanere, un'altro globo uguale e omogeneo, in cui venga per così dire travasato l'impulso, rimanendone l'altro vuoto.

In quasi tutti i trattati di Fisica si descrive la bella esperienza dei globi di avorio, tutti uguali e disposti in serie a contatto, che percosso il primo l'ultimo solo si risente al moto, e par che si sciolga dal rimanente monile: nè ciò per altro avviene, che per secondarsi da que' globi le leggi degli urti, dimostrate da Giovan Marco ne' suoi Porismi, dopo il quarto dei quali, risoluto il detto problema, adducendo per ragione *quia enim globus, eodem*

Figura 58.

momento quo percutitur, percutit globum sibi aequalem, inducet illa percussione plagam perfectam ac proinde ex percussione quiescet (fol. 47 ad t.), immediatamente soggiunge: « Quod si plures globi aequales se contingant in linea motus centri ut F, G, H, I (fig. 58), percusso F primo ab aequali E,

ultimus I movetur, reliquis F, G, H immotis, propterea quod, per Porisma I, posterior prioris exhaurit plagam. At vero si unus aequalium post se habeat minores quotcumque, ut O, P, Q, percusso a K aequali L, omnes cum L moto moventur ut constat per Porisma II. Quod si demum percussio incipiat a minori Q v. g., omnibus immotis aut reflexis, ultimus movetur per Porisma III, aut, si minor est implsus gravitate, quiescit per Porisma IV » (ibid., fol. 48).

Questi Porismi, e gli altri quattro che si soggiungono, non son altro che conseguenze di quella prima e principal proposizione, nella quale si definiva che le velocità son tanto più grandi, quant'è maggiore l'impulso dato al grave e minore il suo peso. La qual proposizione applica Giovan Marco a ogni specie di forza, e principalmente a quella della gravità naturale, dimostrando quanto fossero in inganno Aristotile e i suoi seguaci nell'affermare che le velocità nei gravi cadenti son proporzionali alle quantità della materia. « At vero cum inferunt libras duas v. g. plumbi in dupla ferri celeritate ad libram unam, falluntur, propterea quod illa gravitas in alio fit subiecto, cuius partes omnes aequali gravitate moventur. Sicut enim pars extra totum, v. g. libra una a sua gravitate movetur cum tanta velocitate; ita partes librarum decem aut centum in toto unitae eadem velocitate moventur a sua cuique propria gravitate » (ibid., fol. 58 ad t.).

Galileo per confutar ne' suoi Dialoghi, e in tante altre scritture, l'errore dei Peripatetici, spese molte parole, che non hanno però l'efficacia dello stringente argomento di Giovan Marco, il quale, dal suo dimostrato principio espresso dalla formula $V = F : M$, e dalla sua simile $V' = F' : M'$, se le forze di gravità son proporzionali ai pesi, come le stadere lo dimostrano nelle più volgari esperienze in ogni sorta di merci, ne traeva la matematica conseguenza che le velocità V, V' di due cadenti, quanto si voglia diversi di peso, si mantengono fra loro uguali.

Passando dunque fra F ed M ed F', M', nelle dette formule, per le gravità naturali, una relazione sempre costante, « nisi gravitas, dice l'Autore, magis sit intensa, nihil proficiet ad velocitatem augendam illorum » (ibid., fol. 59). Che se si tratti d'altra qualità di forze, come son quelle per esempio che da noi s'imprimono ne' proietti, partecipandone una egual quantità a due globi di mole diversa, nemmeno in questo caso si troverà verificato il peripatetico asserto, essendo le velocità non direttamente ma reciprocamente proporzionali alle grandezze. « Atque inde fit quod globus minor, accepta a maiori plaga, praecurrat. Quod si enim globos quotcumque ea serie dispona, ut continuo maiorem minor sequatur, percusso primo, videbis quasi uno impetu omnes ad motum concitari, verum celeritate, pro ratione magnitudinis, inaequali » (ibid.).

S'immagini che, invece di tanti globi a contatto, s'abbiano tanti dischi decrescenti nel medesimo ordine, e congiunti insieme per la coesion naturale, come per esempio in un chiodo conico, che si percota nel suo cappello. La forza, secondo Giovan Marco, va diffondendosi verso la punta come un

fluido, di cui giusto ella osserva le leggi, andando con velocità reciproche delle sezioni. Tale è la famosa legge dimostrata nell' Idraulica dal Castelli, e tanto prima di lui da Leonardo da Vinci, che pure, riguardando la forza come un flusso che si propaga per le particelle della materia, determinava secondo quella medesima legge la proporzione della velocità, con la quale va ficcandosi la punta del chiodo, rispetto alla velocità, con la quale penetrerebbe la testa del martello. « Tanto quanto, egli dice, la punta del chiodo entra nella testa del martello che lo batte, tanto si ficcherà più nell' asse, che non si ficcherebbe il martello di pari movimento e forza » (Manus. A cit., fol. 53 a tergo).

Lasciando d' osservare, come si potrebbero queste dottrine applicare utilmente alla meccanica del cuneo, appresso agli Autori così oscura, diremo, per non divagar di troppo dal nostro argomento, delle loro applicazioni a un problema, rimasto irresoluto anche dai più grandi maestri della scienza. Galileo s' era proposto di rendere la ragione « Perchè le aste lunghe lanciate fanno maggior colpo » (Alb. XIV, 321), ma il proposito in lui venne meno, come venne meno nel Torricelli, il quale par che facesse, con gli Accademici della Crusca, come colui che mostra un pomo al fanciullo, e poi glielo nasconde. « Sarebbe forse, diceva, curioso problema l' investigare se quel legno della picca, essendo egualmente velocitato, facesse il medesimo effetto, mentre si adopra disteso in asta, e mentre si adoperasse raccolto in una palla: così anco se una trave, egualmente velocitata, fosse per dare il medesimo urto, percotendo una volta per lo lungo, ed un' altra per traverso » (Lez. accad. cit., pag. 107).

Presunse il Vossio di aver fatto una grande scoperta, e di avere emendato un grande errore di Galileo, il quale attribuiva a sola la velocità l' efficacia della percossa, *neglecto pondere ad ictum perpendiculari*. Era però un fatto ovvio a tutti, nelle esperienze citate dallo stesso Galileo e dal Torricelli, che la trave ABCD (fig. 59), arietando contro il muro MN, produce molto maggior colpo, che se percotesselo per traverso: cosicchè il Vossio, se voleva arrogarsi il merito di aver promossa la scienza, doveva addurre non il semplice fatto già benissimo noto, ma, ciò che nemmen egli fa, le ragioni del fatto, le quali facilmente si trovano nelle dottrine professate da Leonardo, e da Giovan Marco. La trave AD infatti, il centro di gravità della quale sia O, percuote con momento uguale al suo peso, che chiameremo P, moltiplicato per OE: mentre, nella posizione QN, percote con momento uguale al medesimo peso P moltiplicato per ST. Le differenze dunque di que' momenti stanno come P . OE a P . ST, o come OE a ST, o anche come AC a QP o come PN a CD, che vuol dire in ragion reciproca delle se-

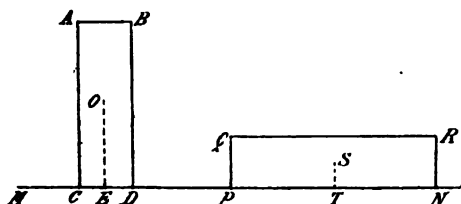



Figura 59.

zioni, o delle aree percosse dal medesimo percuziente nella varietà delle sue giaciture.

Altri problemi, anche più curiosi di questo, e pur rimasti difficili a molti Fisici e Matematici, si risolvono con facilità professando le dottrine di Giovan Marco, che cioè, propagandosi la forza come un fluido che irrompa violentemente e penetri attraverso alla materia, non opera in istante ma in tempo, come si osserva nella diffusione del suono. « Notandum tertio percussionem, et quae hanc sequitur plagam, non uno instanti, sed in aliquo tempore, quantumvis imperceptibili, perfici. Cum enim plaga proveniat non ex solo contactu, sed ex irruptione violenta, qua veluti penetrat percutiens percussum, non esse potest absque motu. Cum ergo percutiens tangit, necdum est plaga sed fit, cuius signum fragor a percussione non nisi in tempore proveniens » (De proport. motus cit., fol. 45). Di qui avviene che, nel menare talvolta un martello, il quale lasciato andare sopra una pietra la ridurrebbe in frantumi, ritirato subito in su, la faccia commovere appena, e co' grandi magli a vapore, che domano sull' incudine le più dure moli del ferro, si può, non dandovi il tempo, temperar l' impeto in modo, che valgano appena a infrangere il guscio di un pinocchio.

Valorosi Matematici del secolo passato, come il Lambert, il Prony, e Gregorio Fontana fra i nostri, vollero mettersi a supplire a un difetto, che notarono nella Meccanica animale del Borelli, rendendo la ragione del perchè, velocissimamente correndo, il corridore divenga più leggero. Crederono costoro che l' Autor *De motu animalium* avesse lasciato indietro quella curiosa conclusione, per mancargli i principii necessari, i quali parve a loro di ritrovare ne' nuovi dimostrati teoremi ugeniani, per le forze centrifughe, che si svolgono dalla punta de' piedi verso gli archi successivamente descritti dalle anche di chi muove il passo veloce. Nelle dottrine di Giovan Marco però avrebbero potuto ritrovar que' medesimi principii assai prima, e così semplici, da ricavarne una soluzione più generale al problema, essendo un fatto che una tal leggerezza si osserva, non ne' soli corridori, ma in qualunque corpo, che orizontalmente si muova.

Sembrerebbe si potesse dar sodisfazione col dire che la forza di gravità diretta verticalmente nel mobile, componendosi con la forza orizontale del corso, dà per resultante un moto, che è tanto meno obliquo, quanto la velocità è maggiore, a che insomma si ridurrebbe la soluzione, che il Benedetti dava di questo problema, come si riferirà da noi in altro proposito, ma ad alcuni Matematici del secolo XVII piacque meglio risolvere il problema, invocando il principio che dice *non in uno instanti, sed in aliquo tempore perfici,* così le percosse, come le pressioni. Stefano degli Angeli, matematico di Padova e discepolo del Cavalieri, distinguendo in un grave, che scenda lungo un piano inclinato, il moto attuale da quello di energia, scriveva così in una sua nota, che ci occorrerà di trascrivere integralmente in altra occasione di maggiore importanza. « Può accadere che il moto attuale sia cagione che l' energia sia men sentita dal piano. Poichè, essendo vero che

omnis actio fit in tempore, il moto attuale è cagione che l'energia non sia esercitata sopra un luogo determinato del piano, che per un momento, ed in scorrere. Così è successo che, passando la ruota d'una carrozza velocemente mossa sopra un uomo, gli ha fatto poco male, ed una volta ho veduto passar con gran prestezza una carrozza sopra un ponte debolissimo, che, se questa si fosse fermata sopra l'uno o sopra l'altro, con la energia sua avrebbe fatto gran male e fracassato ogni cosa » (MSS. Gal. Disc. T. CXIX, fol. 17).

Le dottrine di Giovan Marco, così riguardanti la forza della percossa e i varii problemi dipendenti da lei, come le tante altre questioni di Meccanica e di Ottica, che si trovano risolute ne' suoi varii libri; rimasero stagnanti come in ampio lago profondo, a piè di una chiusa valle, sotto un'alpe solitaria. Il fiume della Scienza, che pure derivava da una medesima sorgente, aveva preso altro corso attraverso a campi ubertosi e a popolose città, che acclamavano dalle sponde e auguravano felici i progressi ai naviganti. Quelle acque, scese per conveniente declivio, e battute da tanti validi remi, andavano velocemente correnti, ma in alcuni seni men late e meno profonde di quell' altre, rimaste morte e in disparte, così che sulla loro tranquilla superficie, da quella del Sole in fuori, non era entrata a specchiarsi mai pupilla viva.

Riducendo alla realtà le immagini, la Scienza galileiana, come in altre parti principalissime, così rimase in difetto, comparata con ciò che Giovan Marco aveva dimostrato nella sua XXXVII proposizione *De proportione motus:* del qual difetto, se voglia eccettuarsi l'Aggiunti, non par che si accorgessero i primi e più immediati discepoli dello stesso Galileo. Quanto al Torricelli, ne fanno pubblica testimonianza le sue *Lezioni,* e quanto al Viviani le note sparse per i suoi Manoscritti, fra le quali basti a noi citar le seguenti, a provar com' anch' egli secondasse l'errore del Maestro in ammettere che i momenti del percuziente e del percosso siano reciprocamente proporzionali alle velocità, e in commettere il disordine del chiamare la percossa infinita, piuttosto che incommensurabile col peso morto, benchè avvertisse che il resistente non può moversi con lui che per uguale spazio. « Il peso morto non può muover la resistenza, se non per tanto spazio, quanto è il suo: ma nella percossa il moto del percuziente è maggiore del moto del percosso, e forse tanto, quanto il momento del percuziente è minore del momento del resistente » (MSS. Gal., T. CXXXII, fol. 61). — « La campana non risuona, se non quando trema: non trema, nè può tremare, senza piegarsi, e risuona ad ogni minima percossa. Adunque ogni minima percossa riflette il grossissimo metallo, e perciò la sua azione è come infinita » (ivi, fol. 54).

La nuova Scienza della percossa era dunque rilasciata intatta nella Scuola galileiana al Borelli, il quale la ridusse alle sue ultime e più vere conclusioni, movendo dal principio, altre volte accennato, e ritrovato già in Giovan Marco espresso dalla formula, che in due corpi le velocità sono uguali alle forze d'impulso divise per la quantità della materia, e per la massa. Dal-

l'essere perciò $V = F : M$, $V' = F' : M'$, se ne conclude $F : F' = V . M : V' . M'$, che corrisponde con la XXXVII proposizione *De vi percussionis,* dal Borelli così formulata: « Si duo corpora inaequalia velocitatibus inaequalibus incidant perpendiculariter super eiusdem corporis omnino quiescentis superficiem, sintque praedicta corpora dura et inflexibilia; vires eorum percussionum proportionem compositam habebunt ex rationibus magnitudinum et velocitatum » (pag. 66).

Si conclude altresì dalle formule stabilite, essendo le velocità uguali, $F : F' = M : M'$, ed essendo le masse uguali, $F : F' = V : V'$, che riscontrano con le XXV e XXVI del citato libro, dall'Autore stesso ivi proposte in questa forma: « Si duo corpora, aequali velocitate traslata, perpendiculariter incidant in superficiem eiusdem corporis omnino immobilis, duri et inflexibilis; eorum percussiones eamdem proportionem habebunt, quam moles corporeae eorumdem incidentium corporum habent. — Si duo corpora inter se aequalia perpendiculariter incidant super alterius corporis omnino stabilis superficiem, fuerintque omnia corpora dura et inflexibilia; vires percussionum proportionales erunt velocitatibus eorumdem incidentium corporum » (pag. 64, 65).

Il Borelli istituisce la sua Scienza nuova sul fondamento di queste proposizioni, nè tratta l'argomento solamente in sè, ma digredisce spesso qua e là, cogliendo l'occasione di dimostrare le principali proprietà dei moti, che in qualche modo dipendono, o che si riferiscono a quello della percossa. Non sempre però procedono le sue proposizioni con rigor matematico: vi s'immischia talvolta una fisica, la quale è piuttosto il parto della fantasia dell'Autore, che un effetto della Natura, e fu questo forse il principale motivo, per cui, non avendo avuto applauso fra gli studiosi, parve che non fossero approvate le verità delle nuove dottrine.

L'Accademia di Londra propose a' suoi soci di speculare intorno al medesimo soggetto, e vi concorsero il Wren e l'Huyghens, che nel 1663 lessero in quelle dotte adunanze le loro dissertazioni, e vi concorse altresì il Wallis che, pubblicando nel 1671 la terza parte del suo trattato *De motu,* v' aggiunse il capitolo *De percussione.* Bene esaminando le cose però, non possono i giusti estimatori non concludere il loro giudizio con dire che i tre illustri Matematici stranieri non hanno fatto altro, che confermare, e in qualche parte promovere i teoremi, da tre anni conosciuti in Italia, e di lì largamente divulgati nel libro *De vi percussionis.*

La dissertazione accademica dell'Huyghens fu raccolta fra gli Opuscoli postumi dell'Autore col titolo *De motu corporum ex percussione,* e risulta di sole XIII proposizioni, le prime delle quali non differiscono forse dalle borelliane che nella forma: vi se ne aggiunge però due insigni, e perciò meritevoli che siano notate dalla Storia. La prima è la XI che dice: « Duobus corporibus, sibi mutuo occurrentibus, id quod efficitur ducendo singulorum magnitudines in velocitatum suarum quadrata, simul additum, ante et post occursum corporum aequale invenitur » (Opusc. posth., Lugd. Batav. 1703,

pag. 389). Si diceva questa ugeniana proposizione insigne, non tanto per la novità, quanto per aver dato occasione alle questioni famose intorno al doversi le quantità di moto misurare dal prodotto della massa per la semplice velocità, o per il quadrato della velocità: queste chiamandosi forze vive e quelle morte.

L' altra proposizione, alla quale la sola inaspettata novità conferisce importanza, è la XII, dall' Autore stesso così formulata: « Si quod corpus maiori vel minori quiescenti obviam pergat, maiorem ei celeritatem dabit per interpositum corpus mediae magnitudinis, itidem quiescens, quam si nullo intermedio ipsi impingatur » (ibid., pag. 393). Alcuni Autori si studiarono di render più facile e più breve la dimostrazione della bellissima novità così annunziata, premettendo per lemma il teorema che *percotendo un corpo un altro quiescente, la velocità di quello, alla velocità impressa in questo, sta come la somma d' ambedue i corpi insieme a quel primo, cioè al percuziente.* Che ciò sia il vero, non è difficile riconoscerlo, ammettendo che la forza d' impulso sia uguale a quella della resistenza, e, d' ambedue insieme resultandone il colpo, concludere che questo equivale al doppio del momento del percuziente, come, dietro un così semplice discorso, ebbe a concluderne il Wallis nella sua VI proposizione. Ora, muovasi contro B fermo il globo A, con momento espresso da V . A: il colpo dato a B, chiamata V' la velocità che ne consegue, avrà per misura la quantità di moto, della quale è l' effetto; misura espressa da V' (A + B), che è uguale a 2 V . A, per la VI[a] del Wallis, e perciò V : V' = A + B : 2 A.

Premesso il qual lemma, facciansi i globi A . B (fig. 60) proporzionali alle linee AC, CB, e presa AD a rappresentare la velocità, con la quale A si muove contro B in quiete, si prolunghi l' AC in E talmente, che sia CE uguale ad AC. Da E poi condotta la EL parallela ad AD, si descriva fra EA, EL, come fra asintoti, l' iperbola SDV: è facile dimostrare che, essendo AD la velocità, come s' è detto, del globo A percuziente, sarà BS la velocità, che riceve il globo B dopo la percossa.

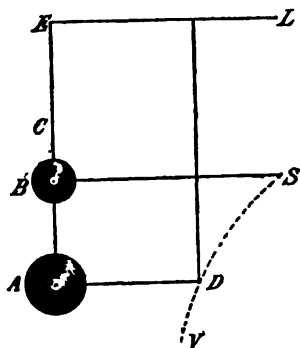



Figura 60.

Abbiamo infatti, per le note proprietà della curva, AD : BS = BE : AE = AC + CB : 2 AC, sostituita invece delle linee intere BE, AE, la somma delle loro parti. Ma per supposizione è A : B = AC : CB, ossia, componendo e duplicando i conseguenti, A + B : 2 A = AC + CB : 2 AC; dunque AD : BS = A + B : 2 A, ossia, per il premesso lemma, AD : BS = V : V', e ciò vuol dire appunto che, essendo dalla AD rappresentata la velocità del percuziente, sarà dalla BS rappresentata la velocità, che imprimesi nel percosso.

Ciò premesso, la laboriosa conclusione dell' Huyghens non dipende che

da una semplice avvertenza sopra le cose già dette. Siano i tre globi A, N, B (fig. 61) crescenti in grandezza, secondo l'ordine che gli abbiamo nominati: è facile vedere che il globo A, percotendo immediatamente B, gl'imprime una velocità minore di quella che gl'imprimerebbe percotendolo per l'intermedio del globo N. Imperocchè, essendo nel primo caso rappresentata la velocità del percuziente dalla linea AD, costruita l'iperbola DVS fra gli asintoti EL, EN, sarà da BS rappresentata la velocità del percosso: mentre nell'altro caso, che cioè il percuziente sia il globo intermedio N, presa CH uguale a CN, sarà il nuovo asintoto HG; fra il quale e HN descritta l'altra iperbola IVF, la velocità impressa nel globo B verrà rappresentata da BF, maggiore di BS, pienamente confermando il discorso la verità della proposizione ugeniana.

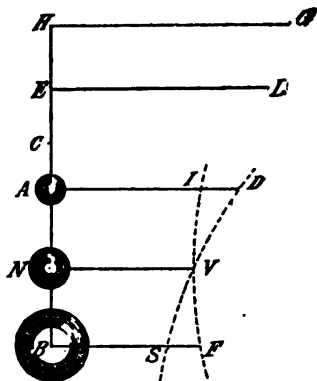



Figura 61.

Seguono da una tal proposizione due corollarii, il primo de' quali è che la massima velocità verrà allora impressa, quando N globo interposto sia esattamente medio proporzionale fra i due estremi A, B; e l'altro, che l'Huyghens stesso si proponeva in ultimo luogo a dimostrar sotto questa forma: « Quo plura corpora interponentur inter duo inaequalia, quorum alterum quiescat, alterum moveatur; eo maior motus quiescenti conciliari poterit. Maximus autem per unamquamque interpositorum multitudinem ita conferetur, si interposita cum extremis continuam proportionalium seriem constituant » (Opusc. cit., pag. 397). Se per esempio siano cento corpi, soggiunge l'Autore, le moli de' quali crescano successivamente come i quadrati della serie dei numeri naturali, e il moto incominci dal massimo, *subducto calculo ad praeceptum regulae,* si troverà la velocità del minimo stare a quella del massimo prossimamente come 14,760 milioni ad uno. Chi poi volesse applicare a qualche effetto della natura la mirabile conclusione, ripensi che le rocce son tanto più frantumate, quanto dal nucleo terrestre s'ascende verso la superficie, ond'è perciò dato in qualche modo ad intendere com'anche un leggero urto, che muova dall'interno, possa propagandosi all'esterno del nostro globo moltiplicarsi in quelle posse immense, che ci si manifestano per esempio nelle eruzioni sotterranee, e nei terremoti.

Giovanni Wallis, altro celebre accademico londinese, si tenne anche più strettamente dell'Huyghens a compendiar le dottrine del Borelli. Le XV proposizioni infatti, ch'egli stende nel suo capitolo *De percussione,* si svolgono essenzialmente tutte dalla seconda, che l'Autore annunzia in questa maniera: « Si grave motum gravi quiescenti directe impingat, sed ita constituto, ut aliunde ne moveatur non impediatur, utrumque iunctim movebitur quam calculus, ponderum ratione et pristina celeritate rite computatis, indicabit » (De

motu, cap. XI, Londini 1671, pag. 662). L'indicazione però direttamente sovviene dalla XIX borelliana, la verità della quale, chiamato A il grave in moto con la velocità V, da cui s' imprime la forza F nell' altro grave B in quiete, e vien con la velocità X trasportato nella medesima direzione; è, come altrove dicemmo, espressa dalla formula $F = A \cdot V = X (A + B)$ d' onde calcola il Wallis $X = \frac{A \cdot V}{A + B}$, « nempe si momentum, ex moti gravis pondere et celeritate compositum, per utriusque simul pondus dividatur, habebitur futura celeritas » (ibid.).

Gli Accademici parigini non volendo, nel partecipare al merito di aver coltivata la nuova Scienza, rimanere indietro a quelli di Londra, deputarono il Mariotte, il quale scrisse il suo *Traité de la percussion, ou choc des corps*, di cui nel 1679 era già stata fatta in Parigi la terza edizione. Il nuovo Matematico si dilungò anche meno degli altri dai primi instituti borelliani, derivando dalle fisiche esperienze le dimostrazioni dei principali teoremi. Ma imitando il nostro Italiano non sembra ne sapesse cansar que' difetti, che gli furono spesso ingiustamente imputati, specialmente dagli stranieri, imperocchè, descritta esso Mariotte quella macchina di precisione, la quale era stata proposta già dal Borelli nel capitolo XXIX del suo libro, come altrove osservammo, suppone che siano esattamente isocrone le maggiori e le minori discese dei globi penduli, nel computar ch' egli fa i momenti delle loro percosse, ora per dimostrarne direttamente, ora per verificarne le leggi. « Les petits battemens d' un pendule se font en des tems sensiblement égaux, quoi que son plomb décrive des arcs inégaux; mais pour la facilité des demonstrations, on suppose ici que ces tems sont precisement égaux » (Oeuvres, T. I cit., pag. 5).

Benchè il trattato del Mariotte, che si divide in due parti, sia molto più esteso della dissertazione dell' Huyghens, e del capitolo del Wallis, lascia nulladimeno intatte alcune delle principali proposizioni, che strettamente si riferiscono all' argomento, come son quelle delle relazioni che passano fra l' angolo dell' incidenza e l' angolo della riflessione, e fra i varii momenti della percossa, secondo che la direzione del moto è perpendicolare o è obliqua. L' Huyghens pure non sembra che sapesse trovar luogo a queste fra le altre sue minori, benchè elaboratissime, proposizioni, e il Borelli stesso, di queste verità conosciute al mondo, checchè se ne pensassero gli stranieri, primo maestro; se ne passa con tal leggerezza per vero dire non conveniente alla dignità e all' importanza del soggetto. Si direbbe che avessero dovuto trovarci qualche difficoltà quei Matematici, i quali, benchè valorosissimi, sappiamo nulladimeno che furono o ritrosi in ammettere i moti misti, o in maneggiarli inesperti; ciò che doveva render difficilissimo, per non dire impossibile, il condurre a buon termine le accennate dimostrazioni. Si comprende perciò come alla presente intrapresa storia della percossa manchi una parte, che in quest' altro articolo del nostro discorso, con la maggior possibile brevità, si soggiunge.

VI.

Che l' angolo dell' incidenza sia uguale o quello della riflessione è una proprietà dai più antichi Filosofi conosciuta, e sperimentata nella luce. Il Kepler fu il primo a darne dimostrazione, applicandovi i moti misti, e il Cartesio ne seguì l' esempio, appropriando agli atomi luminosi in moto i dimostrati effetti di una palla elastica, che rimbalza dalla resistenza di una dura superficie. Chi vuol rammemorarsi di queste cose si compiaccia di tornare indietro a pag. 14, 15 del secondo Tomo della nostra Storia, rileggendo le quali pagine, gli parrà di vedere in qualche modo supplito a quel difetto, che si notava nella prima istituzione della scienza della percossa dei corpi ponderosi.

Non si può senza maraviglia ripensare come rimanessero le tradizioni dell' Ottica inefficaci ai progressi della Meccanica, ma chi si risovviene di quel *nescio quid subtile* pronunziato dal Keplero, e di quel procedere incerto e dubitoso del Cartesio, s' avvedrà che tutto dipendeva dal non avere avuto fede il Borelli e il Mariotte, nè dimestichezza con quelle sottigliezze dei moti misti. Il Wallis, che fu il primo a riappiccare il filo alle prime tradizioni, vedremo com' avesse a patir contese con i matematici de' suoi tempi, ignari di ciò che s' era luminosamente rivelato a Giovan Marco nella pace solitaria de' suoi pensieri. Ma per apprezzar meglio le gioie passate, e sentir più vivo il desiderio di un giorno sereno, descriveremo prima il nuvolo affannoso del giorno dopo.

Una via aperta, proseguendo per la quale si poteva riuscir felicemente a dimostrare che, nei corpi elastici, il moto obliquo dopo la percossa si fa con angolo uguale a quello prima della percossa; sembrava dovere apparire innanzi al Borelli nella proposizione LXIII, nella quale egli dimostra che « si duo corpora, contrariis motibus per eamdem rectam lineam translata, reciproce proportionalia fuerint suis velocitatibus, ac se mutuo perpendiculari et media incidentia percutiant, sintque ambo corpora dura et inflexibilia; reflectentur ad partes oppositas iisdem velocitatibus, quibus ante occursum ferebantur » (De vi percuss. cit., pag. 120). Questa medesima proposizione fu poi dimostrata dall' Huyghens nella sua VIII, che dice: « Si corpora duo sibi ex adverso occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contraria ratione respondeant; utrumque eadem, qua accessit, celeritate resiliet » (Opusc. cit., pag. 381), e fu altresì soggiunta dal Mariotte nella XV della prima parte del suo Trattato, in cui, dop' aver provato coi supposti principii, poi con l' esperienza conferma che « Si deux corps à ressort se choquent directement, avec des vitesses reciproques à leur poids: chacun de ces corps retournera en arriere avec sa premiere vitesse » (Oeuvres cit., pag. 29).

Restava così per conseguenza dimostrato, dal consenso dei tre insigni Matematici, che un corpo elastico, il quale percuota in una dura superficie,

ritorna indietro con la medesima velocità, con la quale era venuto, e ciò non solo nella perpendicolare e media, ma in qualunque incidenza. Così essendo, tornava facile dimostrare che, così l'incidenza, come la riflessione del moto dovevano farsi con angoli uguali, ma questa facilità non fu ritrovata da nessuno, fuor che dal Wallis, applicando a condurre la sua dimostrazione, come or ora vedremo, i moti misti.

L'Huyghens e il Mariotte tralasciarono l'impresa, cedendo agli scrupoli, ma il Borelli sembrava che si fosse, con argomento diverso dalla composizion delle forze, aperta innanzi la porta gelosa. Incomincia il cap. XV del suo libro con una considerazione, la quale si direbbe forse inspirata da ciò che scrisse il Cartesio del non poter farsi nel punto di riflessione dal percuziente alcuna dimora, perchè altrimenti *nulla extaret causa, qua incitante, vires resumere possent* (Dioptr., Francof. 1692, pag. 47); se non si sapesse esser questa l'espression del principio galileiano, dimostrato contro Aristotile, *in puncto reflexionis non dari quietem* (Op. Ediz. naz., Firenze 1890, pag. 323). Comunque sia, l'occasione immediata a quella considerazione venne al Borelli da coloro, fra' quali Giovan Marco, i quali ammettevano che il moto si estinguesse, e resuscitasse di nuovo nella resilizione. « Ut obiectioni et experientiae satisfiat, dicendum a quolibet contactu impulsum deficere et expirare, novum vero a percussione determinari, qui motu, eidem plagae aequali, retroagit illud mobile » (De prop. motus cit., fol. 44 ad t.). Ma qual è la causa, domandava il Borelli, di questa estinzione e di questa resurrezione? E non trovandone alcuna vide la necessità di confessare « quod idem impetus motus incidentiae perseverat, et tantummodo, impedito transitu et progressu ab obice, itineris directionem aliorsum dirigit » (De vi percuss. cit., pag. 114).

Ecco dunque per quali altre vie, diverse da quelle indicate nella LXIII proposizione, riusciva il Borelli a concludere che nella riflessione persevera la medesima quantità di moto che nell'incidenza. Si crederebbe che avesse preparata una tal conclusione, per servirsene a dimostrare l'uguaglianza degli angoli ne' moti che risultano uguali, tanto più che nella LIX, benchè con lo scrupoloso riserbo della regola galileiana, s'induce a decomporre nelle due dei cateti l'unica potenza dell'ipotenusa. Con tali principii infatti, e con tali mezzi, la desiderata dimostrazione sarebbe stata paratissima. Imperocchè, sia rappresentato da AB (fig. 62) il moto incidente, decomposto nel perpendicolare AC, e nell'orizontale CB, e sia da BE rappresentato il moto riflesso: se è vero che questo risulti uguale all'incidente nel tutto, gli resulterà uguale altresì nelle parti componenti, cosicchè, se BD è uguale a CD, anche DE dovrà essere uguale ad AC, e i triangoli ACB, BDE uguali, ed uguali ABC, EBD, angoli dell'incidenza e della riflessione.

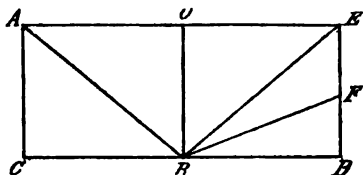



Figura 62.

È però notabile che il Borelli divaga per tutt' altri sentieri, e quel che diceva del perseverare il moto riflesso, con la medesima intensità dell' incidente, è termine, e non mezzo di alcuna dimostrazione. Ne' due capitoli appresso insiste nel medesimo argomento, dimostrando con molte e belle ragioni non esser possibile che il moto si distrugga in natura, e si generi di nuovo, essendo la quiete stessa l' effetto di due moti tuttavia vigenti e operanti, con direzioni però uguali e contrarie, come per esempio nel sasso, che non cade, perchè l' ostacolo lo trattiene. « Idemque dicendum, così termina l'Autore il suo ragionamento, de omnibus aliis motionibus, quae in natura fiunt, ut subinde concludere liceat motum, neque gigni de novo, neque destrui in natura. Hoc autem nec asseveranter nec ut certe creditum me protulisse quis sibi persuadeat, sed tantummodo suspicando » (ibid., pag. 136). L' opinione fu anzi benissimo accolta in quello, che poi si disse *principio della conservazion delle forze,* il qual principio era la nostra intenzione di dimostrare come fosse dal Borelli applicato ai moti riflessi. Già dicemmo come quello, che si credeva mezzo, era invece termine di una dimostrazione, e ora è da soggiungere come si facesse in questa dimostrazione principalmente consistere, dallo stesso Borelli, il trattato *De reflessione, quae ad corporum percussionem consequitur,* lasciando indietro o dando le seconde parti a ciò, che avrebbe dovuto avere le principali.

Dop' aver professato che nel moto riflesso persevera il medesimo impeto, che nell' incidente, soggiunge così il Nostro: « Quod autem haec sit naturae familiaris consuetudo constat ex penduli illa proprietate, quam nuper detexi » (ibid., pag. 114). Questa nuova proprietà del pendolo è descritta e dimostrata nel cap. XI del primo libro delle *Theoricae Mediceorum,* a proposito del risolvere la seguente questione: Se circolando un mobile intorno a un centro fisso, come i pianeti intorno al Sole o i satelliti intorno a Giove, perseverando col medesimo vigore a rivolgersi in un cerchio più angusto faccia, come dicevano alcuni, il suo moto più concitato. La questione pareva per verità risoluta nel quarto dialogo dei Massimi Sistemi da Galileo, dove, a proposito delle ineguaglianze della Luna, dice che nella congiunzione deve passar archi maggiori dell' orbe magno. « Ora se è vero, dice ivi il Salviati, che la virtù, che muove la Terra e la Luna intorno al Sole, si mantenga del medesimo vigore, e se è vero che il medesimo mobile, mosso dalla medesima virtù, ma in cerchi disuguali, in tempi più brevi passi archi simili dei cerchi minori; bisogna necessariamente dire che la Luna, quando è in minor distanza dal Sole, cioè nel tempo della congiunzione, archi maggiori passi dell' orbe magno, che quando è in maggior lontananza, cioè nell' opposizione e plenilunio » (Alb. I, 490). Galileo però tien per vero che la Luna, anche deviata dal suo primo corso, prosegua con la medesima velocità nel giro più angusto, ma non lo dimostra, ond' il Borelli annunzia una tal proposizione, per supplire al difetto: « Aio verum non esse idem mobile, semper ab eadem virtute motiva intrinseca translatum, ac modo percurrens maiorem circuli peripheriam, modo vero minorem; per minorem circulum concitatiori motu cieri, quam per ma-

iorem: progreditur enim eadem velocitate per ambos circulos inaequales, hoc est, temporibus aequalibus, aequalia spatia pertransit » (Theoricae Medic., Florentiae 1665, pag. 52).

La proposizione si dimostra per mezzo di uno sperimento, ***aptissimum***, dice il Borelli, ***ad hanc veritatem comprobandam***, ed è tale: Sia AB un pendolo (fig. 63) sospeso in A: rimosso in AC dal perpendicolo, e lasciato poi andare, incontri in D un ostacolo, come per esempio un chiodo, cosicchè, con l'impeto conceputo in B, prosegua il suo moto per l'arco GB, che verrà descritto col raggio DB raccorciato. Dice il Borelli stesso di avere in questo fatto scoperto una proprietà singolare, che cioè sempre, e in qualunque caso, l'angolo GDB sta all'angolo BAC, o al suo uguale FDB, reciprocamente come la radice della maggior lunghezza del pendolo sta alla radice della minore: e di qui ne conclude che, per essere il mobile deviato, non per questo varia la prima impressagli velocità del suo moto. La conclusione è verissima, come resulta dai principii matematici del seguente discorso. Essendo gli angoli GDB, FDB proporzionali agli archi intercetti, abbiamo per esperienza GB : FB $=$ $\sqrt{AB}$: $\sqrt{BD}$, e per Geometria FB : BC $=$ DB : AB, essendo gli archi simili proporzionali alle lunghezze dei raggi. Moltiplicando ora insieme termine per termine queste proporzioni, ne resulta GB : BC $=$ $\sqrt{DB}$: $\sqrt{AB}$. Ma per le note proprietà de' pendoli di varia lunghezza anche il tempo per GB sta al tempo per BC come la radice di DB sta alla radice di AB; dunque i tempi son proporzionali agli spazi. « Sed, cum tempora sunt proportionalia spatiis transactis, celeritates aequales sunt inter se; ergo celeritas penduli AB aequalis est celeritati penduli BD » (ibid., pag. 54).

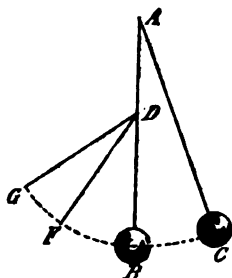



Figura 63.

Questa proprietà dei pendoli però non era applicabile alla Meccanica celeste, se non che nell'ipotesi di Galileo, ma nel sistema delle forze centrali, come lo professava il Borelli, era fuor di luogo, non potendo il pianeta deviar dal suo corso, senza variar quell'impeto, che tutto dipende dalla maggior o minor distanza ch'egli ha dal centro attrattivo; ond'è che, per intrinseca necessità, va nel perielio più veloce che nell'afelio. Con miglior senno perciò si direbbe applicata dall'Autore la sua scoperta, nelle controversie ch'egli ebbe coll'Angeli, rispetto al definir la linea, che nel tendere al centro della terra descrive il proietto. Di lui si può dir benissimo che persevera con la sua prima velocità, deviando e variamente incurvando il suo moto, come vi persevera il pendolo conico ABE (fig. 64), ritirando in G per esempio il filo, scorrevole nella campanella B. Se BG è un quarto di AB « allora vedremo

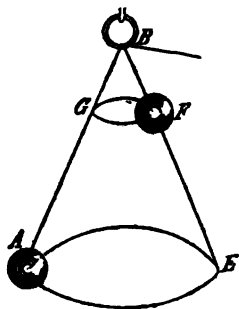



Figura 64.

dalla palla F descriversi il cerchio FG, in tempo minore, cioè la metà di quello, che vi voleva a compiere il cerchio ADE; e però la velocità in FG sarà la medesima, che aveva la palla A » (Lettera a M. A. Ricci, Messina 1667, pag. 4).

Appropriata pure è la descritta esperienza a dimostrar che, nella riflessione, persevera la medesima quantità di moto, che nell' incidenza, ond' è che opportunamente citavasi dallo stesso Borelli, nel cap. XV *De vi percussionis,* dopo di che egli ivi così soggiunge: « Sed licet resistentia corporis duri et quiescentis omnino non destruat impetum corporis in eum incidentis,... dubitari saltem potest an impetum eiusdem incidentis corporis debilitet, et aliquo pacto imminuat » (pag. 115), ciò che non possa essere attende a dimostrarlo nella proposizione LIX, così annunziata: « Vis motiva incidentis corporis non debilitatur, neque imminuitur a resistentia corporis firmi et duri » (ibid.).

La proposizione però, dopo le cose dette, sembra per lo meno oziosa, perchè o i corpi si suppongono perfettamente fermi e duri, e la verità dell' assunto dipende dalla fatta supposizione: o i corpi si considerano secondo la loro fisica realtà, e la proposizione è falsa, perchè, non essendo in nessuno di così fatti corpi la richiesta inflessibilità e durezza assoluta, è impossibile che nel risaltare non perdano alquanto del primo impeto conceputo. Apparirà poi la detta borelliana proposizione anche più oziosa, se si ripensa che, sopra la verità di lei, era stato posto il fondamento a tutta la Meccanica di Galileo, il quale, nello scolio alla proposizione XXIII del terzo dialogo delle Scienze nuove, aveva dimostrato che il moto riflesso, dopo essere sceso lungo un piano, non è punto diminuito dal moto incidente, avendo facoltà di ricondurre il mobile alla medesima altezza, *e ciò levato ogni intoppo, che pregiudica all' esperienza* (Alb. XIII, 166).

La galileiana dimostrazione equivale alla proposizione LXIII del Borelli, e alle corrispondenti dell' Huyghens e del Mariotte, che pur sppongono esser rimossi gli impedimenti, ammessi i quali non possono non esser false quelle stesse loro proposizioni, com' ebbero a riscontrare i nostri Accademici fiorentini ne' rimbalzi delle palle di corno di bufalo e di avorio, che non videro mai raggiungere a quella precisa altezza, da cui erano scese. Del resto aveva anche Galileo pensato di dimostrare che, per cangiar direzione il mobile, il moto di lui non si diminuisce, osservando che una debolissima forza, impossibile a muovere una gran mole, è pur capace, mossa che sia, di deviarla dal suo sentiero. « Una palla molto grave, lasciò scritto in una nota, che fu poi raccolta fra i *Problemi varii;* posata sopra un piano, e che percossa dal vento gagliardo non gli ceda nè si muova, se la medesima sarà mossa sopra quel piano, sicchè riceva il vento ad angolo retto, gli cederà deflettendo verso la parte, che il vento la caccia » (Alb. XIV, 321). Ma vediamo come si dimostri dallo stesso Borelli la sopra accennata LIX proposizione.

Tornando indietro sopra la figura 62, nella quale si rappresentava con AB il moto incidente, decomposto nel perpendicolare AC e nel trasversale CB,

quibus ille aequalis est potestate; rappresenti BE il moto riflesso, che si vuol dimostrare non esser punto diminuito. Perchè, se così fosse, presa del trasversale una quantità BD, uguale alla CB, il perpendicolare dovrebbe restar minore di ED. Sia per esempio DF: il moto riflesso diminuito sarebbe dunque rappresentato da BF, per cui l'angolo della riflessione FBD tornerebbe evidentemente minore dell'angolo dell'incidenza ABC. « Hoc autem, dice il Borelli, est falsum, et contra sensus evidentiam, quandoquidem perpetuo huiusmodi anguli sunt aequales inter se » (De vi percuss. cit., pag. 117).

Il teorema dunque nobilissimo, che ci si aspettava di veder dimostrato, è rimesso all'evidenza del fatto, e parandosi innanzi all'Autore due vie, una delle quali, dal suppor che il moto riflesso perseveri nel medesimo vigore dell'incidente, conduceva a concluder l'uguaglianza degli angoli dell'obliquità ne' due moti, e l'altra che, dal supporre questa uguaglianza, menava a dimostrar come nel riflettersi quello stesso moto non diminuisce; egli prosegue a dirittura per questa, lasciando indietro quell'altra. In ciò consiste quel che si diceva avere il Borelli posposta nell'argomento la dignità e l'importanza delle parti. Che le forze, per solo cangiar direzione, non illanguidiscano il loro primo vigore, era cosa ammessa da tutti i matematici seguaci delle dottrine meccaniche di Galileo, e perciò superflua si diceva tornare l'opera del Borelli in voler mettersi a dimostrarla, mentre poteva per quel mezzo così facilmente riuscire alla tanto desiderata dimostrazione dell'uguaglianza degli angoli fatti nel venir e nel tornare del percuziente dalla superficie percossa. Egli invece invoca l'evidenza del senso: ma quale evidenza, se il senso stesso mostra al contrario che tutti i corpi ponderosi risalgono con minore obliquità di quella, con la quale erano scesi, come disse nelle sue Lezioni di avere sperimentato il Torricelli, e se quella perpetuità di legge, affermata dal nostro Autore, potendosi osservare in un raggio, che mettesse un tempo sensibile a venire allo specchio, non si verificherebbe forse puntualissimamente nemmen nella luce?

Sembra nonostante che il Borelli, oltre a rimettersi al fatto, accennasse a qualche dimostrazione del fatto, osservando che i corpi duri eleggono per necessità nel riflettersi la via più breve di tutte. « Constat ergo ab eadem virtute motiva impelli corpus incidens super aliquod corpus durum, a qua postea fertur necessitate naturae *brevissima via reflectendo* » (ibid. pag. 115). Dalla qual necessità naturale, supposta vera, consegue senza dubbio che debba il mobile ritornar con angolo uguale a quel che venne, com'è facile dimostrare. Sia per esempio AB (fig. 65) il piano, che si vuol percotere, e si supponga un corpo C che, nell'andare e nel tornare dalla percossa, seguiti per istinto di natura la via più breve. Dovendogliela noi

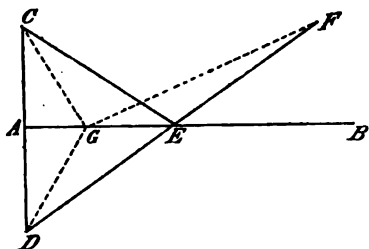



Figura 65.

geometricamente presignare, diremo: Dal punto C si abbassino sul piano la perpendicolare CA, prolungata in D per ugual tratto, e la obliqua CE: congiunta poi la DE, e prolungata in F, sarà CEF quella brevissima via, che si voleva descritta. Qualunque altra infatti se ne eleggesse, come per esempio CGF, è facile vedere che sarebbe più lunga, perchè, congiunta la GD, DGF, ossia CG + GF è evidentemente maggior linea di FD, ossia di FE + EC. E perchè CEA, FEB sono uguali, si conclude che non può dunque il mobile eleggere per necessità di natura la via brevissima, senza che sia dalla medesima necessità costretto a riflettersi con angolo uguale a quello dell'incidenza.

Ma il Borelli, contento a porre il principio, lasciò al Leibniz il merito della bellissima conclusione, intanto che, fra i primi promotori della scienza della percossa, fu il Wallis il solo, che si proponesse di dimostrare: « Si grave motum in firmum obicem oblique impingat, sitque vel alterum vel utrumque elasticum; resilitio eadem celeritate, et in eodem plano, ita fiet ut angulus reflexionis sit angulo incidentiae aequalis » (De motu cit., cap. XIII, pag. 692). È questa la seconda proposizione, che ricorre nel trattato *De elatere et reflexione,* dop' essersi dimostrato dall' Autore, come aveva fatto prima il Borelli nella sua LXIII, e poi l' Huyghens nella VIII, e nella XV della seconde parte il Mariotte; che se un grave percote un resistente, e sia l' uno e l' altro elastico, *eadem velocitate resiliet, qua advenerat* (ibid., pag. 687).

Ciò premesso, ecco come succede per il Wallis la seconda detta proposizione. Sia AB (fig. 66) la obliquità, e la misura della forza, con la quale il grave mosso percuote l' obice fermo CD, e sia quella forza decomposta nella orizontale AO, e nella perpendicolare OB, la quale sola offende in B, d'onde ritornerebbe, per la precedente proposizione, in O, alla medesima altezza: cosicchè, mentre il mobile fosse passato orizontalmente da B in D, nel medesimo tempo e per spazio uguale a CB, sarebbe anche insieme risalito verticalmente in E, ad un'altezza DE uguale ad OB, ovvero a CA, con due moti, che si ricompongono nell' unico obliquo e riflesso BE, e i triangoli rettangoli ACB, BED, coi cateti uguali, daranno ABC, angolo dell' incidenza uguale a DBE, angolo della riflessione. *Quae,* conclude il Wallis, *erant demonstranda.* Ma fa subito alla conclusione seguitare uno Scolio, atto benissimo a testimoniare di quelle contradizioni, dalle quali si diceva essere stati l' Huyghens e il Mariotte, fra gli altri, ritenuti dal professar liberamente la dottrina dei moti composti.

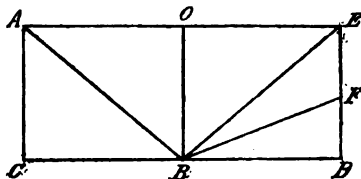



Figura 66.

Gli studenti, così scrive l' Autore nel detto Scolio, e anche alcuni, che dovrebbero essere da qualche cosa più degli studenti, mi domandano con qual diritto io abbia decomposto un moto retto e semplicissimo in due: o pur concedendomi il licenzioso arbitrio vorrebbero sapere come mai, fra gli infiniti modi di decomporre un moto, io abbia per l' appunto scelto quello,

e non un altro. « Respondeo nullum ita simplicem esse motum posse, quin in plures componentes resolvi possit. Dum autem hunc prae caeteris modum seligo, utor ego meo iure, qui, cum quamlibet possim, eam adhibeo compositionem, quae praesenti negotio sit accomoda. Neque probandum erit compositionem hanc unicam esse possibilem, sed ex multis unam. Liberum utique est, pro suo cuiusque constructoris arbitrio, ex veris innumeris ea seligere, quae ad rem praesentem conducant » (ibid., pag. 693). E soggiunge a illustrare il fatto meccanico altri simili esempi di composizioni algebriche e geometriche, concludendo così l'apologetico suo discorso: « Estque res haec tam clara, ut nulla illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum serio obiectum viderim a Viro cum tyronibus non camparando » (ibid., pag. 695).

S' intendeva compresa in quell'Uomo, da non mettersi coi principianti, la maggior parte dei Matematici di Europa, i quali, a navigare per il periglioso oceano della Meccanica, avevano ripudiato il più valido remo. Ma con questo in mano vedremo ora Giovan Marco entrare per i riposti seni, ad approdare ai quali peneranno ancora un secolo i novelli esploratori, conducendo snellamente la sua navicella per quelle acque solitarie, non agitate dai venti, sotto quella remota zona di cielo, non offuscato dalle caligini: da quelle caligini vogliam dire, a dissipar le quali, per tornare a vedere l'alma luce del sole, ebbe ad affannarsi più di una volta il Wallis.

La proposizione XXXIX *De proportione motus* è dall'Autore stesso così pronunziata: « Motus reflexus fit per lineam parallelam illi lineae, quae cum linea perpendiculari ad contactum angulum constituit in centro, cuius sinus est aequalis intervallo inter centrum gravitatis, et lineam hypomochlii » (fol. 50). Cada il globo CDG (fig. 67) sul piano obliquo ADB, e lo percota in D: dal qual punto sollevata la verticale DC, che è la linea dell'ipomoclio, si trovi questa lontana, per la distanza EF, dal centro di gravità E dello stesso globo. Dentro l'angolo retto KEH si costruisca un angolo minore HEG, di cui il seno sia HG uguale ad EF. Descritto il parallelogrammo HK, e condotta la diagonale EG, vuol dimostrar Giovan Marco che, nel riflettersi il globo dopo la percossa, si move, col centro, nella direzione EG, e, col punto del contatto, nella direzione DI, alla stessa EG parallela.

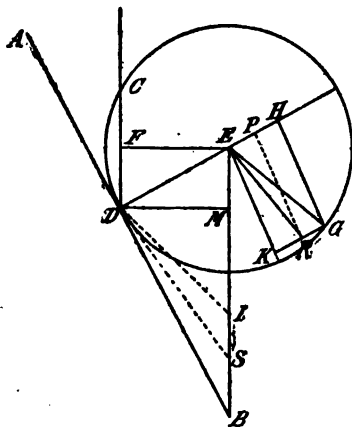



Figura 67.

Rappresentato con EB il momento totale, che vien decomposto nel DB sulla superficie del piano, e nel DE a lei stessa perpendicolare; la dimostrazione procede così, in modo che si rassomiglia nelle mosse a quella del Wallis, se non che, mentre questi fa precedere la proposizione che dice risalire da D in E il centro di gravità del percuziente, con la medesima velocità, colla quale era da E in D dianzi

sceso; Giovan Marco suppone la stessa cosa come una verità conseguente dall' ipotesi, ch' egli tiene intorno alla natura della elasticità, la quale essendo perfetta restituisce al mobile tutto intero l' impeto perduto nell' urto. Così essendo, verrà dunque il centro E del globo dopo l' urto sollecitato da forze rappresentate per linee uguali o proporzionali alle DB, DE, ma dirette in parte, che non trovino impedimento. E perchè EK, EH son quelle loro proporzionali, e hanno libero il loro esercizio, perchè son dirette alla parte avversa, e fuori dell' ipomoclio del centro; trasporteranno dunque il globo, com' era il proposito di dimostrare, dal centro stesso nella direzione della diagonale EG, e nella direzione DI, ad essa EG parallela, dal punto di contatto. Ma è bene, a far conoscere la precisione e la chiarezza del dimostrare, in mezzo alle verbosità di quei tempi, trascriver le parole proprie dell' Autore:

« Quia enim centrum gravitatis, dum sua mole ferit planum in puncto D, per lineam ED seipsum veluti partitur: illa quidem pars quae hypomochlio insistit, atque illam plagam inducit, eadem via qua impulit, et impulsu aequali, retro agitur; reliqua vero, quae cum centro extra hypomochlium cadit, per lineam fertur EK parallelam lineae DB, propterea quod haec sit proxima motui gravitatis ab hypomochlio impeditae. Quia ergo motus EH, EK, quibus centrum gravitatis agitur, secundum quid sunt contrarii, propterea quod angulus HEK sit minor duobus rectis; erit motus mixtus per lineam mediam inter EH, et EK, cuius intervallum determinat sinus complementi inclinationis, in ratione quam habent impulsus. Est autem intervallum FE, hoc est sinus DM anguli DEM, mensura gravitatis extra hypomochlion: linea vero FD, sinus anguli reliqui, mensura illius, quae hypomochlio insistit, gravitatis. Si fiat ut FD ad EF, ita KG, sinus complementi anguli HEG, ad HG, sinum complementi anguli KEG; erit linea EG linea motus mixti ex EH, et EK.... Quia ergo mobile movetur ad motum sui centri, erit motus ex D reflexus per lineam parallelam illi lineae, quae cum linea perpendiculari ad contactum angulum constituit in centro, cuius sinus est aequalis intervallo inter centrum gravitatis, et lineam hypomochlii » (ibid., fol. 50, 51).

Si diceva che questa dimostrazione si rassomiglia nelle mosse a quella, che trentadue anni dopo, fra le contradizioni dei contemporanei, conquistava faticosamente alla Scienza il Wallis, ma è più generale e vien condotta da Giovan Marco con tale analitico artificio, da poter da lei, come corollari, derivar facilmente le verità più importanti, di che è a notar che il Casati in Italia, dove il Matematico di Praga era affatto sconosciuto, dette i primi esempi (Mechanic., libri cit., pag. 739-32). Essendo infatti, nella precedente figura, l' angolo ADC uguale all' angolo FED, che pure è uguale all' angolo EGH, ed essendo l' angolo EGH uguale all' angolo IDB; apparisce manifesta l' uguaglianza immediata e diretta fra ADC angolo dell' incidenza, e IDB angolo della riflessione: corollario, che l' Autore mette in forma della proposizione XL: *Anguli incidentiae et reflexionis sunt inter se aequales* (ibid., fol. 51).

Un altro corollario matematico scende dalla proposizione XXXIX di Giovan Marco, ad illustrare alcuni effetti fisici, che si osservano nelle percosse dei varii corpi: uno de' quali effetti è quello, che lo stesso Giovan Marco così descrive: « Impulsus ergo pilae, cum motus centri est perpendicularis ad planum ubi percussit, in hypomochlio a motu conquiescit: at vero planum ex illa plaga in percutiente novum determinat impulsum, iuxta directionem plagae quam infert, a quo, eadem qua venit via, retroagitur, et si quidem duritie praestat, erit plaga, et qui hanc sequitur impulsus, in utroque aequalis, ac proinde motus reflexus aequalis motui recto » (ibid., fol. 44 ad t.). A quèsta affermazione, nella quale Giovan Marco riconosceva la nota della evidenza, corrispondono la proposizione prima del trattato *De elatere* del Wallis, e la LXIII del Borelli, insieme con le altre simili dell' Huyghens e del Mariotte, ma dalle matematiche astrazioni trapassando alle fisiche realtà lo stesso Giovan Marco, con scienza più comprensiva de' suoi celeberrimi successori, soggiunge: « Deficit autem motus reflexus a motu recto, si, defectu duritiei, minorem recipit quam dedit plagam » (ibid.).

Applicando l' osservazione ai moti obliqui, e riferendoci sempre alla figura ultimamente rappresentata, EH non avrà dunque esatta proporzione con DE, se non che nel supposto della elasticità perfetta. Ma se questa è in difetto, *deficiet motus reflexus,* per cui la proporzionale a DE sarà in questo caso minore di EH. Sia per esempio EP, rimanendo EK tuttavia del medesimo vigore, perchè da nulla viene impedita: il nuovo parallelogrammo, descritto sopra le due forze, sarà PK, e il moto riflesso piglierà la sua direzione secondo la diagonale ER, o secondo la sua parallela DS, intantochè l' angolo della riflessione BDI sarà minore dell' angolo ADC dell' incidenza, e tanto minore, quanto sarà maggiore il difetto del percuziente dalla supposta elasticità perfetta.

Ecco come da questo corollario di Giovan Marco venga illustrato un fatto fisico, che il Torricelli dovette contentarsi di descriver nella sua seconda Lezione della percossa, senza saper ridurlo ai principii di quella scienza, che nella Scuola di Galileo tuttavia s' ignorava. Citeremo del passo torricelliano, invece della stampa, il manoscritto, dove son rimaste le Lezioni, in quella parte che richiaman qualche figura illustrativa, nella forma ch' ebbero originalmente, prima che l' Autore stesso le correggesse, per accomodarle all' udienza, alla quale non si poteva dalla bugnola accademica comunicare le idee per via di segni visibili. « Questo sia detto, leggesi dunque così nell' autografo, per le proiezioni, che si faranno sul piano ad angoli retti verso la detta parete opposta. Ma quando si scagliasse ad angolo obliquo, per la linea AB (fig. 68), vederemmo far la riflessione, non per la linea BC che fa l' angolo uguale a quello dell' incidenza, ma per la BED,

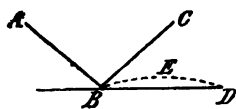



Figura 68.

che o tocca o pochissimo va sopra il piano, come ho sperimentato con palle di piombo e di creta. Non è però vero che la percossa estingua quell' im-

peto, che è nel mobile, di direzione equidistante dalla parete, ma solo smorza quello, che vi è di perpendicolare alla parete, perchè questo nell' urtare trova la contrarietà sua, cioè che gl' impedisce il suo viaggio, ma quell' atro no » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIX a tergo del fol. 16).

Si direbbe aver questa cosa conclusa il Torricelli direttamente da una proposizione simile a quella di Giovan Marco, piuttosto che dall' esperienza. Ma che, mentre il Discepolo di Galileo affermava con tanta sicurezza smorzarsi nell' urto obliquo quel tanto solo, che v' è in lui di perpendicolare, non s' attentasse d' assegnarne per scienza la proporzione; s' argomenta dall' incertezza, con la quale procede in risolvere altri simili problemi. In fine al suo trattato *De' proietti* proponesi di trovar la misura del colpo fatto dalla palla del cannone contro il piano resistente, variato solo dalla diversità degli angoli dell' incidenza, premettendo al discorso un tale avvertimento: « Il problema, per quanto io sappia, è intatto; però, se si produrrà qualche cosa meno sussistente, e non pura geometrica, o si compatisca, sin che altri tratti meglio la dottrina, o si rifiuti affatto, che poco importa » (Op. geom., P. I cit., pag. 239).

Ciò premesso, suppone che gli impeti nel medesimo proietto siano proporzionali alle velocità, le quali, ne' medesimi tempi, stanno come gli spazi. « Ciò supposto, egli dice, mentre una palla di cannone si avvicina al muro opposto, la linea e dirittura del tiro o è perpendicolare al muro, o no. Se è perpendicolare, la percossa opera con una tal forza, che proveremo esser la massima, che possa aver quel tiro: se sarà ad angoli obliqui, come la linea AB (fig. 69) alla parete BC, io noto che, rispetto alla parete BC, sono nella linea AB del proietto due moti insieme composti: uno cioè di avvicinamento perpendicolare alla parete, l' altro di passaggio laterale o parallelo alla stessa. Il perpendicolare ci viene e mostrato e misurato dalla linea AC, il parallelo dalla linea CB » (ivi, pag. 240). Or perchè tanto il moto per AB, quanto i moti per AC, CB son passati nel medesimo tempo, staranno dunque, per le fatte supposizioni, come gli spazi; ond' è che, considerati gli effetti secondo le direzioni perpendicolari, ed essendo l' effetto di BC nullo, staranno i detti moti come AB ad AC. Per un' altra incidenza DB del medesimo tiro staranno i moti come DB a DE: da che dunque inferiremo « che le attività o momenti dei tiri diversamente inclinati sono come i seni retti degli angoli delle incidenze » (ivi, pag. 242). Che se, diretta secondo la linea AB, « la palla s' internasse tutta per l' appunto nel muro, adunque, per tutte le linee più elevate, non solo s' immergerà tutta nella solidità, ma farà sempre maggiore passata, perchè ha maggior forza. Ma delle meno elevate, perchè ciascuna averà minor forza, niuna entrerà totalmente nella parete, ma alcune anco risalteranno, e sfuggiranno dall' altra parte. *Sia però detto tutto questo astraendo da un certo effetto di piegamento o refrazione, che fanno i*

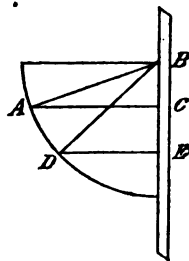



Figura 69.

proietti nel passar con inclinazione dal mezzo raro al mezzo più denso, incurvandosi la linea al contrario della refrazione della luce e spezie visibili » (ivi, pag. 243).

Trae da quel suo teorema fondamentale il Torricelli alcuni altri corollari, come i due seguenti, che soli basterà commemorare. Il primo è che « l'incidenza ad angolo di 30 gradi ha la metà della forza totale, essendo il seno suo la metà del semidiametro » (ivi, pag. 242): l'altro, che resulta da alcune considerazioni, le quali noi riferiremo, per brevità, col linguaggio e co' segni dei matematici odierni. Siano AC, BD (fig. 70) le misure delle forze di proiezione contro i piani resistenti BC, ED: avremo $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\cos. BAC} = \sec. BAC$; $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{\cos. EBD} = \sec. EBD$. Cosicchè, se sia $AC : BD = \sec. BAC : \sec. BED$, dovrà essere $AB = BE$. Ma da queste linee son misurati gl'impeti fatti perpendicolarmente contro i piani resistenti nelle due proiezioni, dunque « allora i proietti averanno la stessa forza nel percuotere, quando gl'impeti saranno come le secanti degli angoli del complemento delle incidenze » (ivi, pag. 242).

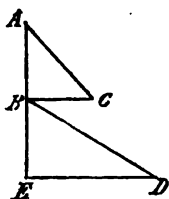



Figura 70.

Il problema principale, da cui derivano questi e altri corollari non meno importanti, aveva ragione il Torricelli a dire che era intatto, non avendo Galileo, nel dialogismo che succede alla quarta proposizione del quarto Dialogo delle Scienze nuove, saputo far dire al suo Salviati in proposito altro che questo: « La qual positura, se sarà tale che il moto del percuziente la vada a investire ad angoli retti, l'impeto del colpo sarà il massimo: ma se il moto verrà obliquamente, o come diciam noi a scancio, il colpo sarà più debole, e più e più secondo la maggiore obliquità » (Alb. XIII, 246). Il Maestro dunque della Scuola nuova aveva veramente lasciato irresoluto il problema, professando l'errore che l'impeto del colpo obliquo sia tanto più debole, quanto è minore l'angolo dell'obliquità, ma nella Scuola antica, dal Torricelli ignorata, non era così: e noi trascrivemmo a pag. 58 del precedente Tomo la nota, nella quale dimostrava Leonardo da Vinci che i colpi stanno, non come gli angoli, ma come i seni degli angoli delle inclinazioni. A quella medesima scuola di Leonardo apparteneva anche Giovan Marco, dalla riferita proposizione del quale, e sopra la disegnata figura 67, si conclude che l'impeto diretto sta all'obliquo, come la linea EB alla ED, ossia come il seno totale al seno dell'angolo dell'incidenza. Ed è pur notabile che, mentre i discepoli di Aristotile e del Nemorario procedevano così sicuri alla conquista del vero, il discepolo di Galileo chiedesse compatimento alle sue nuove intatte dottrine, confessando che poco gl'importava di vederle anche affatto rifiutare.

Pensava in dir così il Torricelli ai suoi propri colleghi nella Scuola galileiana, contro i quali professava quelle dottrine, che lo condussero a riscontrarsi col Roberval nel metodo di condurre alle curve le tangenti. Anzi esso

Roberval, benchè in pubblico conosciuto più tardi, appartiene al numero di coloro, che tranquillamente facevano uso dei moti composti, non essendo in Francia come in Italia sorta nessuna autorità a metter dubbio intorno alle antiche tradizioni. Qualche anno prima del 1640 aveva il Matematico francese fatto già quelle *Observations sur la composition des mouvemens,* che il Bourdalois ridusse nel 1668 in forma di trattato, dove si legge la dimostrazione dell' uguaglianza tra l' angolo dell' incidenza e della riflessione, decomponendo in due il moto incidente, e ragionando in modo simile al Wallis (*Ouvrage de M. De Roberval,* a la Haye 1731, pag. 11, 12). È un fatto dunque che il Roberval e il Torricelli si trovarono, intorno al principio della composizion delle forze, concordi: l' Italiano però procedeva incerto nell' applicazione di quel principio alla misura della percossa obliqua e della diretta, rassegnandosi a veder, come abbiamo ora udito, dai seguaci delle dottrine di Galileo rifiutate, per esser credute false, le sue conclusioni.

Ma vennero anzi confermate, come meritavano, e fu primo a far ciò il Borelli nella XLV, e nella L *De vi percussionis,* nella quale ultima si proponeva l' Autore di dimostrare che « si superficies corporis ictum excipientis perpendicularis fuerit ad lineam motus obliqui ipsius percutientis, erit vis percussionis, ad eam quae efficitur in plano subiecto, ut sinus anguli incidentiae ad sinum totum » (pag. 97). La dimostrazione, per condur la quale s' invoca il principio dei moti composti, procede alquanto impacciata, nè ciò fa gran maraviglia, persistendosi nella fallacia di riguardare il moto per l' ipotenusa uguale ai due per i cateti in potenza: ma fa più gran maraviglia il sentir dallo stesso Borelli dire, nella citata lettera a M. A. Ricci, che di queste cose « per quanto io sappia, non è stato per ancora scritto da altri » (pag. 11).

Eppure era da ventitre anni stato già stampato il libro *De motu proiectorum,* in fronte al quale si leggeva scritto, non il nome di un autore oscuro e straniero, ma di quel celeberrimo Torricelli, in cui tutto il mondo riconosceva specchiata la mente di Galileo, come nel suo più vivo e più prossimo parelio. Forse lo scansar che facevasi nel teorema torricelliano, rispetto ai moti composti, i fallaci insegnamenti di Galileo, dette a intendere che non fosse ben dimostrato, e lusingò chi ci aveva interesse a tener che facesse quel teorema nel libro *De vi percussionis* la sua prima comparsa, benchè insomma nessuno de' due Nostri dicesse novità, la notizia della quale non s' attingesse da ciò, che alquanti anni prima era stato stampato in Praga. Anzi la proposizione XXXIX *De proportione motus* non solo era feconda dei corollari, de' quali si compiacevano il Torricelli e il Borelli di essere stati gli Autori, ma della soluzione di alcuni problemi assai più nuovi e più curiosi, come quello di determinare, in un globo pendulo, il punto della riflessione, venendo da un altro simile globo pendulo percosso nel centro o fuori del centro; come quell' altro del determinar la resultante del moto riflesso nelle piastrelle scagliate sulla superficie di un' acqua tranquilla, in quel giochetto conosciuto fra noi sotto il nome di *rimbalzello;* e finalmente il problema, in cui, date tre

palle sul piano di un biliardo, non in linea retta, si proponeva l' Autore di trovar nella seconda delle dette palle il punto, da cui riflessa la prima vada a diritto a percotere nella terza: problemi risoluti tutti con tal sottile e destra arte di decomporre e di ricomporre le forze, che, se fossero stampati in carattere più moderno e soppresso nel frontespizio del libro il nome dell'Autore, si direbbero opera di un Matematico, venuto a coltivar la scienza dopo il Newton e l' Eulero.

CAPITOLO IV.

Del settimo dialogo da aggiungersi alle due Scienze nuove ossia Dei problemi fisici e matematici

SOMMARIO

I. Dei problemi, che si dovevano aggiungere dopo la *Scienza meccanica*, e come Galileo pensasse di ridurli in Dialogo. — II. Di altri problemi e speculazioni intorno a varii soggetti di Fisica. — III. Delle questioni matematiche, e dei varii teoremi e problemi di Geometria raccolti dal Viviani. — IV. Dei quesiti algebrici, e del misurar con la vista. — V. Dei teoremi di Geometria avanzati alle dimostrazioni dei moti locali.

I.

Per sodisfare alla curiosità, che deve naturalmente nascere nell' animo di chi s' abbattesse a leggere l' intitolazione di questo capitolo, vogliam subito rammemorare come il Viviani, raccogliendo le notizie delle opere, che per ultimo meditava di scrivere Galileo, estraesse da una lettera di lui, del dì 7 Novembre 1637, a Pietro Carcavy di Parigi, le parole seguenti: « Porgami per sua pietà la sua mano adiutrice acciocchè, sgravato da cure che mi tengono oppresso, io possa tornare a distendere i miei *Problemi spezzati fisici matematici,* che sono in buon numero e tutti nuovi » (Scienza univ. delle proporz., Firenze 1674, pag. 83). In un' altra lettera poi del Gennaio appresso accennava al medesimo Carcavy il suo concetto *di portare quelle cose in dialogo:* il qual dialogo, raccogliendo le reliquie sparse degli argomenti trattati nelle prime quattro Giornate del Mondo, e specialmente nelle altre quattro del Moto; si sarebbe a queste aggiunto dall' Autore stesso, in settimo luogo, dopo i trattati della percossa e delle proporzioni.

Avendo noi dunque detto di que' trattati nei capitoli precedenti, resta, a render compiuta la nostra Storia, l' argomento di quel settimo dialogo, in cui

si porterebbero, com' abbiamo inteso, i Problemi fisici e matematici. Non ebbe l' opera meditata dal Vecchio di 74 anni, e già cieco da circa due mesi prima, la sua finale intenzione quanto alla forma, ma la materia doveva esser già preparata, ond' è che l' ufficio nostro si riduce tutto in ricercarla, e in proporla alla notizia dei nostri lettori. Non sarebbe quella ricerca per verità nè difficile nè laboriosa, quando fossero complete le raccolte di quei Problemi fisici e matematici procuratesi, poco dopo la morte del Maestro, dal Viviani; ma in ogni modo è nelle compilate pagine manoscritte del Discepolo amoroso il principal fondamento alla nostra costruzione.

Nel tomo III della VI parte dei manoscritti di Galileo, dal folio 28 al 35, son di mano dello stesso Viviani, per la maggior parte, raccolti que' Problemi fisici che si diceva, in fronte ai quali è dal compilatore scritta in lapis questa Nota: « Problemi di mano del signor Vincenzio (di Galileo) distesi da lui in più fogli cuciti, in numero undici; che tre scritti, otto bianchi, e nella coperta intitolati *Problemi di mano del Galileo, e problemi distesi dal signor Vincenzio per mano dell'Ambrogetti* », d' onde viene a rendersi manifesta l' origine e l' autenticità della detta raccolta.

Consegnatosene il manoscritto tanti anni dopo da Jacopo Panzanini, a cui era pervenuto in eredità, a Tommaso Bonaventuri, questi pubblicò nella nuova edizione delle opere di Galileo alcuni di que' Problemi, de' quali veniva dunque allora il pubblico ad avere la prima notizia, ma in privato il Viviani stesso l' aveva diffusa ne' suoi discepoli, fra' quali Giuseppe Ferroni, che la comunicò al confratello suo gesuita Paolo Casati, a cui piacque rifiorire, come vedremo, di quelle galileiane curiosità sconosciute i suoi libri delle Meccaniche. L' Albèri dopo il Bonaventuri, essendo già le carte possedute dal Panzanini andate a riunirsi fra i codici della Biblioteca palatina di Firenze, fece per la sua edizione raccolta più diligente, ch' egli inserì da pag. 317-28 del suo tomo XIV. All' uno e all' altro editore però mancarono i criteri necessari, per dar ordine e conveniente scelta a quella specie di zibaldone, messo insieme dal Viviani non per altro, che per servirsene come di un memoriale a' suoi studi. Supplendo dunque noi, come sapremo meglio, a que' mancati criteri, sia, per ritrovar l' ordine desiderato, il nostro primo studio rivolto a investigar l'occasione ch' ebbe l'Autore, e il tempo delle speculate ragioni e de' risoluti problemi.

Si termina il trattato della *Scienza meccanica* con queste parole: « So che qui nasceranno ad alcuni delle difficoltà e delle istanze, le quali però con poca fatica si torranno di mezzo, e noi le rimetteremo volontariamente tra i *Problemi meccanici,* che in fine di questo discorso si aggiungeranno » (Alb. XI, 125). Quel trattato si sa essere opera giovanile di Galileo, e come il primo frutto raccolto dallo studio de' libri del Benedetti e di Guibubaldo. Andata la scrittura attorno originalmente infino al 1649 manoscritta, si pubblicò senza la promessa aggiunta dei Problemi meccanici, i quali dunque, se vi fossero stati compresi, sarebbero de' più antichi fra quelli che si raccolsero dal Viviani. Il criterio poi, da riconoscerli in mezzo a quella confusione,

è l'esser di argomento meccanico, e il sentirli inspirati ai libri delle *Speculazioni* del Maestro.

Ha giusto in que' libri il Benedetti una bella speculazione, per risolvere il problema: onde avvenga che la trottola, girando velocissimamente, si mantenga ritta sulla sua punta, e l'attribuisce alle forze centrifughe, dirette orizontalmente, prevalenti così sopra la gravità naturale, che il corpo grave girante ubbidisce piuttosto a quelle, che a questa. « Ab huiusmodi inclinatione rectitudinis motus partium alicuius corporis rotundi fit, ut per aliquod temporis spacium trochus, cum magna celeritate seipsum circumagens, omnino rectus quiescat super illam cuspidem ferri quam habet, non inclinans se versus mundi centrum magis ad unam partem, quam ad aliam, cum quaelibet suarum partium in huiusmodi motu non inclinet omnino versus mundi cèntrum, sed multo magis per transversum, ad angulos rectos cum linea directionis, aut verticalis, aut horizontis axe, ita ut necessario huiusmodi corpus rectum stare debeat » (Speculat. liber, Venetiis 1599, pag. 286).

Galileo derivò manifestamente di qui le ragioni, per rispondere a quel principale quesito, di cui l'Albèri non stampò che la proposta: « Qual sia la ragione che le trottole o le ruzzole, girate, si mantengano ritte, e ferme no, ma trabocchino » (XIV, 321), lasciando nel manoscritto la risposta, che è tale: « Un mobile non può avere impeto verso diverse bande, e però la ruzzola andando velocemente si sostien ritta, ed infine, mancando la velocità per l'innanzi, comincia a piegare alla banda: e però il peso nella trottola lavora pochissimo, quando quella si muove velocemente, ma ben lavora assai verso il fine del moto, dove egli è lento » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 64).

Da questa soluzione, che non è forse quella distesa da Galileo, ma è una nota preparata per distenderla, nacque la curiosità di simili altre soluzioni di Problemi meccanici, fra' quali son da notare i seguenti:

« Quelli che giocano alla ruzzola, mediante il filo col quale la cingono tre o quattro volte, fanno tiri assai più lunghi, che non farebbero senza quel filo: si domanda la causa di questo, ed appresso si cerca perchè con assai minor velocità vadia la ruzzola, quando è in aria, che quando tocca terra, dove velocissimamente si muove. »

« Così risolverassi il problema: Io ho una girella forata nel centro, e infilzata in un pernio: gli do su con una mano, e la fo girare su quel pernio velocissimamente. Or, mentre che ella gira, la fo uscir dal pernio e cadere in terra per taglio. Che farà questa girella? Certo che, in virtù del moto che io gli diedi quand'ella era imperniata, subito che ella arriverà in terra comincerà a camminare, sicchè quel moto, che gli diedi di girare in sè stessa, è cagione che in terra ella giri e cammini. Ora quelli che giocano alla ruzzola la circondano tre o quattro volte con un filo, e poi la tirano, e in quell'istante ella si svolge dal filo con somma prestezza, e per conseguenza viene ad acquistare un moto velocissimo in sè stessa, onde, quand'ella arriva in terra, va velocissimamente, non tanto per la forza datagli dal braccio del tiratore, quanto in virtù della veloce circumvoluzione, che ella ha acquistato

nello svilupparsi dal filo. Ma quelli che tirano senza filo non danno alla ruzzola il vantaggio del girarsi in sè medesima, ma la mandano solamente con la forza del loro braccio; e però tirano manco che se tirassero col filo. »

« La causa poi perchè la ruzzola vadia con minor velocità, mentre cammina per aria, che in terra, è perchè in aria ella va solamente con la velocità datagli dalla forza del tiratore, e in terra cammina per la medesima forza, e in virtù della vertigine veloce in sè stessa, che ella aveva innanzi che arrivasse in terra, la qual vertigine in aria non opera nulla, perchè, essendo l' aria tenue e sottile, cede facilmente al girar della ruzzola, la quale, non trovando alla sua revoluzione intoppo alcuno, non ha occasione di scorrere avanti con più velocità di quella, che gli dà il braccio di chi la tira. Ma com' ella arriva in terra, che è ruvida e scabrosa, trova moltissimi intoppi, ne' quali, nel girare ella urta, e si risospigne addietro; onde gli è forza di scorrere avanti velocemente, non solo per la forza di chi la tira, ma ancora in virtù del suo volgersi in sè medesima. »

« Due altri Problemi hanno dependenza dal precedente, in uno de' quali si cerca perchè quelli che giocano alla palla tanto difficilmente rimettino le palle, che gli sono mandate *trinciate:* e nell' altro si domanda perchè, giocando alcuni alle pallottole in una strada disuguale e sassosa, piglino la palla per di sopra con la mano, dove, giocando in un pallottolaio piano e pulito, la piglierebbero per di sotto. »

« Il primo Problema si risolve così: Colui, che vuol trinciare la palla al compagno che gioca seco, gli dà con la mestola o con la racchetta per di sotto in tal modo che, mandandola innanzi verso il compagno, gli dà facoltà di girare all' indietro in sè medesima, sicchè, quand' ella arriva in terra, viene a fare, mercè di quel girare all' indietro, il balzo verso colui che l' ha mandata, o almeno balza pochissimo verso quello, che aspetta di rimetterla, il quale, giudicando il balzo dover esser verso di lui assai più lungo, attende la palla troppo di lontano, e resta ingannato e deluso. Similmente non la rimetterà di posta perchè, non essendo la palla affatto liscia e pulita, ma avendo qualche risalto e scabrosità, viene, nel girare all' indietro per aria, a pigliar vento, onde la sua velocità alquanto si ritarda, sicchè colui che la vuol rimetter di posta l' aspetta prima che ella non arriva, e pensando di coglierla gli tira, e fa il colpo vano. »

« La resoluzione del secondo problema è tale: Quelli, che giocano alle pallottole per una strada sassosa, non possono, tirando la palla per terra, aggiustar bene il colpo, per li molti intoppi che troverebbe la palla, ma son necessitati, a guisa di quelli che fanno alle piastrelle, di procurare di avvicinarsi al *lecco,* tirando di posta. Ma perchè la palla non fa l' effetto della piastrella, che subito che ella arriva in terra si ferma, è necessario che quelli che giocano trovin modo di fare che la palla si mova manco che sia possibile dal luogo dove la tirano. Ma questo gli succede col tirare, presa la palla per di sopra, perchè così, mentre che è in aria, viene a girare in sè medesima all' indietro, cioè verso chi la tira: e quando ella arriva, perchè la forza

di chi l'ha tirata la farebbe trascorrere innanzi troppo, e allontanarsi dal lecco, il moto che ella aveva in sè stessa vien quasi a contrappesare la detta forza, onde la palla o si ferma, o pochissimo trascorre innanzi. Ma quando poi si gioca ne' pallottolai ben netti e puliti, si può benissimo aggiustare il colpo, tirando la palla per terra, onde non è necessario il pigliarla per di sopra » (ivi, fol. 31, 32).

Il problema della ruzzola tirata con lo spago ebbe solenne pubblicità dialogizzato nella seconda giornata dei Massimi Sistemi, ma gli altri due, che ne dipendono, è notabile che si rimangano tuttavia nel manoscritto, nel quale gli lasciarono il Bonaventuri e l'Albèri. Ben più notabile è però che, senza saperlo, il pubblico ne avesse già da lungo tempo notizia per opera del Casati, a cui fu la cosa comunicata privatamente dal Viviani, come avvertimmo, per mezzo del Ferroni. Nel cap. XI infatti del libro VII *Mechanicorum,* facendo esso Casati alcune osservazioni intorno al variarsi accidentalmente gl'impulsi nei moti riflessi. « Deinde, egli dice, quando reticulis luditur, non raro reticulum movetur in plano aliquo horizontali, aut valde inclinato (nos Itali dicimus *tagliare o trinciare una palla*) ita ut, dum pilam recta expellit, illi etiam motum quemdam imprimat, quo ipsa circa suum centrum movetur: unde fit ut, nisi pilam excipias repellasque ante quam pavimentum attingat, frustra deinde saltum illius expectes iuxta regulas reflexionis, quia nimirum pila terram tangens, dum pergit moveri circa suum centrum motu orbiculari, nequit a plano impediente recipere directionem illam, cuius esset capax, si solum simplici motu centri mota fuisset: motus enim peripheriae globi contrarius est motui centri. Idem accidit, quando pila leviore astrictu funem perstringit, tunc scilicet concipit motum circularem adeoque saltus fallit. »

« Quantum autem in motu valeat directiones commiscere, alteram centri rectam, alteram peripheriae circularem sed oppositam, satis norunt qui, minoribus orbiculis ludentes, globum quasi pendentem in manu tenent, dumque illum proiiciunt manu ei motum circularem communicant, unde oritur quod, ubi terram globus attigerit, vel sistit se, si directio peripheriae ad motum circularem est aequalis directioni centri ad motum rectum, vel tardius promovetur quam si solam centri directionem haberet, prout directio centri maior est directione peripheriae, quae, cum primum terram attingit, apta est sua conversione retrahere centrum versus proiicientem » (Lugduni 1684, pag. 734, 35).

L'esempio del Casati, che così di nascosto raccoglieva le miche cadute dalla lauta mensa di Galileo, ci fanno ripensare al gusto, che dovevano sentir di così fatti Problemi que' primi discepoli, per le mani dei quali correva manoscritto il trattato della Scienza meccanica. La forma stessa invitava i curiosi a comparare le nuove scritture con le antiche Questioni aristoteliche, le quali si volevano fare apparire tanto più insulse, quanto più si credeva di dar quelle stesse novità risolute da' più veri dimostrati principii. Questa anzi, di contradire alle dottrine meccaniche di Aristotile, era la principale inten-

zione di Galileo, a cui perciò l' argomento del discorso era spesso suggerito dagli argomenti medesimi del Filosofo, come quello per esempio che versa intorno alle navi mosse dalle vele o dai remi.

Se sempre i principii, dai quali si facevano dipendere le risposte a così fatti quesiti, fossero, come Galileo stesso presumeva, ben dimostrati, si potrebbe per verità dubitarne, particolarmente per quel che riguarda l' uso del timone, e la proporzion degl' impulsi, che riceve il naviglio o dalla ciurma che voga, o dal vento ch' enfia la vela; perchè, trattandosi di moti misti, era meglio parato nelle mani del Filosofo antico che del novello il sottile argomento, da risolvere così difficili questioni. Comunque sia avrebbe dovuto Galileo attutire quella sua giovanile baldanza, e temperare il disprezzo con la riverenza, ripensando che non avrebbe esultato dello splendor di quella nuova fiamma viva, se sotto le avvilite ceneri non avesse Aristotile gelosamente custoditavi la scintilla.

L' esempio cade bene a proposito rispetto alle resistenze dei solidi, la Scienza nuova delle quali dipendeva dall' antica, che si compendiava nei mirabili effetti della leva. Così veniva ovvia a rappresentarsi alla mente di Galileo la distinzione fra le resistenze assolute e le respettive, della qual distinzione furono quasi primaticci frutti due problemi, ambedue, benchè per contrarie ragioni, nella storia della Scienza memorabili. Una verga di metallo, tirata fortemente per lo lungo, resiste molto più che piegata per traverso, perchè là opera con tutta la resistenza assoluta, e qua con quella che è relativa al modo di operar con la leva. Eppure, anco la resistenza assoluta può da proporzionato peso esser vinta: che se, invece di un peso posticcio, si prolunghi essa stessa nella sua propria materia, si dovrà giungere a un termine, ripensava Galileo, che quel solo aver di tanto allungata la verga basti per strapparla. Dunque concludeva essere alla lunghezza di qualunque solido prefinito dalla Natura un limite, oltre il quale, nemmen con tutta la sua forza assoluta, mai reggerebbe. Dai solidi credè di poter fare libero passaggio ai liquidi, ed ebbero da ciò occasione la proposta e la risposta al seguente Problema, leggendo il quale coloro, a cui è oramai da tanto tempo nota la scoperta del Torricelli, intenderanno perchè si dicesse memorabile nella Storia:

« Si domanda la cagione perchè le trombe, che si adoprano per cavar acqua dai pozzi, non alzino l' acqua, se non insino ad una certa e determinata altezza. »

« La cagione di tal effetto dipende da questo: Io piglio un pezzo di catena di ferro, un capo della quale fermo gagliardamente a una trave, ed all' altro incomincio ad attaccare del peso. Chiara cosa è che quella catena, non essendo possente di reggere un peso infinito, finalmente, se io seguiterò a caricarla, si strapperà. Diciamo dunque che un peso v. g. di mille libbre appunto la facci strappare. Ora, se, in cambio di attaccare alla catena un peso di mille libbre, io la farò tanto più lunga, che quel pezzo che io ci aggiungo pesi le mille libbre; certo è che quella catena si strapperà, nè più

nè meno che si strappasse prima con le cento libbre di peso: sicchè il proprio peso della catena è abile a farla strappare. »

« Ora l'acqua che si tira su per le trombe si regge in sè stessa sino ad una tale altezza, siccome si reggerebbe la catena, alla quale io aggiungessi un pezzo, che pesasse novecento novantanove libbre. Ma se io vorrò far passare all'acqua quell'altezza, cioè s'io vorrò allungar più la sua mole, a guisa della catena, alla quale io aggiugnessi un pezzo di mille libbre; si strapperà per il suo proprio peso, e non potrà passare altrimenti la detta altezza » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 33).

Galileo si compiacque molto di questa speculazione, occorsagli dal considerare le resistenze assolute, e non era punto temeraria una tal compiacenza a que' tempi, nei quali, non sapendosi far altro che invocare l'orrore al vacuo, si trovavano costretti i Filosofi a dire che non sentisse questo orror la Natura, che infino a un certo punto. Più ragionevolmente però potevà compiacersi di quell'altro, che gli occorse al pensiero dal considerar le resistenze respettive, le quali debbon esser tanto maggiori, quanto più lungo è il braccio della contralleva. Non è dunque il principale efficiente della resistenza di un solido la quantità della sua propria materia, ma sì piuttosto il venir questa in maggior ampiezza distribuita: ciò che facilmente ottenendosi col rarefarla, e col lasciar qualche vacuo nel mezzo, veniva a rivelar la nuova verità di un fatto, non ovvio ancora per la sola esperienza, che cioè, avendosi due lance del medesimo peso, la vuota è tanto più resistente della piena, quanto maggiore è il diametro di quella che di questa. Fu anche il nuovo pensiero disteso in forma di Problema, e possono i Lettori vederlo nel IV fra i raccolti dall'Albèri (XIV, 326).

Al medesimo ordine di quei Problemi, che dovevano aggiungersi dopo il trattato della Scienza meccanica, appartengono alcuni altri, de' quali trovasi fatto un cenno nel citato manoscritto del Viviani in questo modo: « Rompesi una corda attaccata ad una gran pietra pendente da una simile corda » (MSS. cit., fol. 63): problema di cui il Viviani stesso dava, secondo la mente di Galileo, la soluzione in quella nota, da noi trascritta a pag. 445 del Tomo precedente. Altro Problema, da mettersi in questa collezione, era quello del maggior tiro, che si credeva ottenere dagli archibusi, quanto fossero più lunghi di canna: se non che alle ragioni antiche del Cardano e del Benedetti s'aggiungeva da Galileo valore, introducendo il principio delle velocià proporzionali ai tempi. « Perchè la velocità cresce secondo il tempo, gli archi grandi e le cerbottane e le canne di archibuso tirano con più forza, avendo tempo di accompagnare il proietto per più spazio » (ivi, fol. 62).

Di tal qualità, secondo i riferiti esempi, erano quei Problemi, i quali, mostrando come si potessero applicare le leggi del moto delle macchine a certi fatti naturali più ovvii e più curiosi, dovevano aggiungersi alla *Scienza meccanica*, per dilettevole utilità dei lettori. Ma Galileo accennava nel passo da noi sopra trascritto particolarmente ad alcuni di quegli stessi Problemi, nei quali si toglierebbero di mezzo le difficoltà, e si risponderebbe

alle istanze, che potrebbero nascere intorno alla forza della percossa; ond'è che, fatti certi per questa testimonianza dell'avere atteso l'Autore a risolvere quest'altro nuovo genere di questioni, siamo stati solleciti di ricercarle nei manoscritti. Forse l'essere stato distratto Galileo dal proseguire in quella speculazione, per le ragioni accennate da noi nel capitolo precedente, fu la causa per cui le cose scritte da giovane a spiegar meglio la forza della percossa si siano in mezzo alle altre ritrovate così scarse: nonostante riferiscesi all'argomento la seguente nota, che è l'espression di un concetto, da cui doveva svolgersi più largamente il discorso: « Il colpo in materia cedente opera meno tanto, quant'è la ritirata del cedente » (ivi, fol. 62).

Quest'altra nota, che ivi pure il Viviani ha raccolta, è di bene assai maggiore importanza per la storia delle galileiane speculazioni intorno alla forza della percossa, e intorno alle ragioni ch'ebbe lo speculatore per dichiararla immensa: « Se a un peso massimo, pendente da una corda, si aggiungerà per fianco qualsivoglia altro minimo peso, questo alzerà il massimo, essendochè il piccolo scende per un arco verso il contatto, ed il massimo ascende per la circonferenza: dal che ne seguirà che la sua salita sia, secondo qualsivoglia proporzione, minore della scesa del piccolo peso » (ivi, a t. del fol. 63).

La bellissima proposizione, quale uscì dalla mente di Galileo che fu primo a pensarla, rimase ignota al pubblico infino al 1718, anno in cui il Bonaventuri veniva ad aggiunger nelle Opere galileiane il sesto Dialogo agli altri cinque delle Scienze nuove. Come, tanto tempo prima della sua pubblicazione, potesse avere avuto il Viviani notizia di quel meccanico teorema, ch'egli illustrò, concorrendovi nell'opera il Borelli; è facile intendere, essendo ne' due Discepoli quell'annunzio di scienza nuova venuto per la via ordinaria delle tradizioni orali e manoscritte del loro grande Maestro: ma fa maraviglia che il Wallis s'incontrasse in quel medesimo concetto, e, rappresentandosi nel globo di Galileo pendolo da una fune il grande Globo terrestre librato in mezzo allo spazio, ne concludeva, per le medesime meccaniche ragioni, che anche il salto di una pulce lo avrebbe commosso. « Dato enim quod tota Telluris moles, fluido aethere suspensa, cum saltu pulicis percussa sit; dicenda esset loco suo tantillum dimoveri » (De motu cit., pag. 663).

Le questioni spezzate, che furono risolute da Galileo nel lungo corso della sua vita scientifica, non tutte, com'è da credere, erano di argomento meccanico: perciò è facile intendere come rivolgendo, quasi Maestro nell'officina, lo sguardo sui materiali rimasti indietro nella costruzione dei due grandi edifizi dei Massimi Sistemi e delle Scienze nuove, ve ne dovesse rtrovar degli appartenenti a ogni ordine di Scienze fisiche e matematiche. E tali sono appunto le questioni spezzate e le note sparse, che nei citati manoscritti, e in altre carte galileiane, si vedono confusamente raccolte insiem con quelle, che di puro argomento meccanico sono state da noi fin qui recensite. Richiederebbe forse il filo del ragionamento che si proseguisse a dar notizia ai Lettori di questa varietà di pensieri, come materiali sparsi e mezzo sepolti nel

terreno, che circonda i due detti grandi edifizi, ma perchè il primo e principale nostro proposito fu quello di rappresentarci l'Artefice, che medita di dare anche a quelle sparse reliquie qualche decoro di forma; studiamoci, prima di aumentar la congerie, di veder com' ei lo facesse nei materiali già radunati.

Già si sa come fosse, nel citato capitolo di lettera, significata al Carcavy una tale intenzione, qual' era di mettere in dialogo quei pensieri, come fiori in ghirlanda. Ma perchè non ne seguì il meditato effetto, per gl' impedimenti della cecità e della vecchiezza, se non s' è avuto dunque l'opera compiuta, si può domandare almeno se fu cominciata. La risposta si restringe intanto per noi ai Problemi meccanici, alcuni de' quali avevano già trovato stabile assetto nei primi e nei secondi Dialoghi già stampati. Così, per esempio il problema della ruzzola tirata col filo, e della palla tirata soprammano, avevano trovato da accomodarsi nella seconda giornata dei Massimi Sistemi (Alb. I, 175-79) e nella prima e nella seconda delle Scienze nuove i problemi dell' acqua nelle trombe, e nelle lance vuote più resistenti delle piene (XIII, 21, 145). Tutte le altre questioni di meccanico argomento erano rimaste indietro, e s' aspettava a queste di venire a intessersi ne' Dialoghi novissimi: intorno a che, stando ai soli manoscritti esistenti nella Biblioteca fiorentina, non avremmo da sodisfare ai Lettori, se non col dar dell' opera incominciata da Galileo un segno, piuttosto che un saggio.

S' introduce nella Scienza meccanica il discorso dimostrando l' utilità, che si può ricavar dalle macchine: e disingannati quegli artefici, che credevano di potere con poca forza movere e alzare pesi grandissimi, conclude l' Autore col dire che la principale delle dette utilità consiste nel poter sollevare tutta insieme, per via dello strumento, una gran mole, che pure si solleverebbe, col medesimo impiego di forza, dalle semplici braccia di un uomo, purchè si potesse ridurre quella tal mole trattabile col dividerla in pezzi. Si voleva da Galileo porgere questa stessa meccanica dottrina quasi sotto le graziose forme di un apologo, nel dialogismo seguente:

« SALVIATI. — In proposito di quello, che è tanto semplice, che vuole per via di trombe alzar tant' acqua, che nel cadere poi faccia andare un mulino, il quale non poteva andare in virtù della forza, che egli applica nell' alzare l' acqua: è egli possibile che si creda di poter riavere dall' acqua più forza di quella, che tu gli hai prestata? È possibile che tu non intenda che quella forza, che bastò a alzar l' acqua, basterà per mover la macina? »

« SIMPLICIO. — Signor no: perch' io ho bisogno di avere per mantenimento della mia casa uno staio di farina la settimana, ed un mio ragazzino, in sei giorni, con una secchiolina mi conduce in una conserva tant' acqua all' altezza di quattro braccia, che lasciandola poi cader sul ritrecine mi macina in un' ora uno staio di grano » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 15).

Dicemmo ch' era questo l' unico esempio della forma del dialogo data da Galileo alle sue Questioni meccaniche, stando ai Manoscritti palatini di Firenze. Ma noi, più attentamente rivolgendo le carte, nelle quali ritrovammo

il trattato dell' uso delle catenuzze, ci abbattemmo a leggere un colloquio, dove il Salviati e il Sagredo dimostravano a Simplicio quant' avesse errato il suo Aristotile, dicendo che la vela tanto più velocemente spinge la nave, quanto è sollevata più in alto; e ciò per gli effetti meccanici della leva. Ci risovvenne allora ch' era questo uno degli argomenti propostisi dallo stesso Galileo a trattare nella *Selva di problemi vari,* dove la proposizione, rimasta come tutte le altre irresoluta, si legge così scritta: « Se sia vero quello che dice Aristotile, cioè che più gagliardamente spinga la vela, quanto è più alta; e se ciò avviene per la ragione addotta da esso, presa dalla leva » (Alb. XIV, 320).

Ci sembrava venisse confermato da questo nuovo esempio che anche gli altri frammenti di dialogo, ritrovati nel detto manoscritto, erano stati distesi dal Viviani, a cui Galileo aveva significato i suoi propri concetti, di che rimase la testimonianza ne' libri delle Meccaniche del Casati. Il confratello e collega di Giuseppe Ferroni, discepolo di esso Viviani, ha, nel IV di quei libri, intitolato il capitolo XVI *An malus in motu navis habeat rationem vectis* (ediz. cit., pag. 470), e confuta Aristotile con quelle medesime ragioni, che il Salviati e il Sagredo confutano Simplicio, nel Dialogo che qui trascriviamo:

« Salviati. — È il nostro Accademico, e non il vostro Aristotile, signor Simplicio, che ha istituita la nuova Scienza meccanica. »

« Simplicio. — Ma pure ha anch' egli imparato dal Filosofo che tutti quanti gli effetti delle macchine si riducono finalmente a quello della leva, e secondo ciò vedete nelle *Questioni* come si risolva una varietà di problemi bellissimi e curiosi. In quei giorni che mi trattenni ospite vostro nella vostra amenissima villa delle Selve, scesi tutto solo una sera sulla riva dell' Arno, e mentre sedevo all' ombra, guardando le acque che, per le pioggie recenti, scendevano giù per il fiume più del solito copiose; ecco vedo risalire i navicelli di Signa a vele spiegate. Erano così carichi, da rimanerne quasi tutti inghiottiti, eppure con tanta facilità, e direi quasi snellezza, solcavano le acque così fonde e con moto contrario, che io non potei non ripensare allora quanto veramente mirabile dev' essere la potenza della leva. »

« Salviati. — Ma, ditemi, come c' entra la leva nel moto della nave a vela? »

« Simplicio. — C' entra benissimo, come potete vedere in Aristotile, nella sua sesta Questione, dove dice che l' albero è un vette, che il luogo dov' egli è fisso è l' ipomoclio, che il peso da movere è la stessa nave, e che il vento è la forza movente. »

« Sagredo. — Anch' io resto maravigliato di ciò, non meno del signor Salviati, e non par credibile che un tanto filosofo abbia pronunziato così francamente sentenza, della quale nessun' altra mi sembra che sia più aliena dal vero. Come si potrebbe infatti riconoscer l' operà della leva, dove il peso e l' ipomoclio hanno il moto medesimo della virtù motrice? Non è ella, signor Simplicio, dottrina di Aristotile verissima, e confermata dall' esperienza, che

la leva opera tanto più validamente, quanto la virtà che muove ha maggior velocità, rispetto al peso che deve esser mosso? Che se fossero uguali le velocità del mosso e del movente, a nulla si ridurrebbe l'efficacia dello strumento. Voi vedete dunque che, movendosi la vela e la nave con pari moto, secondo le medesime dottrine del vostro Maestro, la leva, quando pure ci fosse, non farebbe sulla nave nessuno effetto. »

« Salviati. — Soggiungete, signor Sagredo, che, quando ci fosse opera di leva, non solo questa riuscirebbe inutile al moto della nave, ma gli sarebbe anzi contraria. Supponete infatti che il piè dell'albero sia fermato vicino alla prora: ivi sarà l'ipomoclio, e intorno ad esso tenderà la vela a far girare il vascello, affondando di più essa prora, che verrà perciò a ricevere maggiore impedimento dall'acqua, e facendo capolievare la poppa. I pericoli, che correrebbe la navigazione per questa mobilità di equilibrio, si comprendono assai facilmente, ed è perciò che i nocchieri non a caso dispongono l'albero, che ha da portare in alto la vela, ma sì che sempre la carena si mantenga orizontale. »

« Sagredo. — Io mi sono trattenuto più volte nei nostri porti di Venezia a osservare le grandi navi approdatevi d'Inghilterra e d'Olanda, le quali hanno, specialmente il maggior albero della vela maestra, disposto in modo, che riman sempre il suo piede sulla carena, fuori del comun centro di gravità, e ciò col consiglio, mi credo io, che non faccia esso albero l'ufficio di vette, e non metta la poppa con la prora in gioco pericoloso di altalena. »

« Salviati. — Vedete dunque, signor Simplicio, come sia ben confermato da questo esempio che, tutt'altrimenti dal ricercarsi l'utilità del vette in sospingere più gagliardamente la nave, se n'evita con ogni studio, da chi sa l'arte, l'ingerenza nociva. »

« Simplicio. — Io non so che rispondere alle vostre ragioni, ma pur mi sembra che potesse rispondere per me, in favor di Aristotile, un modo, che io ho veduto praticar da coloro, i quali, mancando il vento, tirano contro il corso del fiume le navi a forza d'uomini o di cavalli. Ho sentito questo chiamarsi da' navicellai di Signa *tirar l'alzaio,* il quale alzaio intesi essere quella fune, che da un capo è legata all'albero della nave, e dall'altra vi sono aggiunte certe brachette, che o s'avvolgono intorno alle spalle degli uomini, o ricingono il petto dei cavalli. Ora, abbattutomi più volte a vedere questa fatica, ho sempre osservato che l'alzaio si lega più su che sia possibile all'albero, di che interrogata quella buona gente, che lo tirava, mi sentivo rispondere che, quanto si tien più alta la fune, tanto si muove la nave con maggiore facilità, e con minore fatica. »

« Salviati. — Nè foste punto ingannato, signor Simplicio, nella risposta: l'inganno però è tutto vostro in credere che la maggior distanza della fune dal piè dell'albero, come da suo ipomoclio, sia giusto procurata da quella gente, per ottenere maggior favore di leva. »

« Simplicio. — O per qual altro fine dunque lo fanno, o qual ne possono sperare vantaggio diverso? »

« Salviati. — Prima che io risponda a voi, rispondete voi a me, mentre vi domando se più facilmente si tira una fune libera che una impedita. »

« Simplicio. — Voi volete il gioco del fatto mio. »

« Salviati. — Se dunque si tira più facilmente una fune libera, che una impedita, e se tanto meglio si scansano gl' impedimenti dell' acqua corrente, dei sassi, dell' alveo, dei bronchi e degli sterpi delle rive, quanto la fune è più in aria, intenderete che si pratica a quel modo dai tiratori d' alzaio, per ragioni molto più semplici di quelle, che voi credete essere state suggerite a loro dalla Filosofia. »

« Simplicio. — Sia pur così, come voi volete, ma io per me non intendo in che modo si possano coteste vostre ragioni applicare alla vela, che fu il primo e principale proposito del nostro discorso: la qual vela non si vede come venga a ricevere minor impedimento dallo stare spiegata sull' antenna più in alto. »

« Salviati. — L' impedimento, signor Simplicio, non è da riguardar nella vela propriamente, ma nello spirito che la muove. Non vedete voi che il vento spira più gagliardo sulle alte torri, dove ha libero il moto, che in piana terra, dove, dai tanti oggetti ch' egli v' incontra, ad ogni passo viene impedito? Non vedete voi le banderuole moversi sui campanili, anche quando voi in piazza non sentite alito che vi rinfreschi?

« Simplicio. — Volete dire insomma che la vela spinge tanto più gagliardamente la nave, quanto è più alta, perchè in alto il vento spira sempre più gagliardo? Ma questa è ragion troppo semplice, e non meritevole che v' esercitasse attorno Aristotile il suo grande ingegno. »

« Salviati. — Voi credete dunque, signor Simplicio, che la Natura disponga le sue operazioni, per dar faccenda ai Filosofi? »

II.

Insieme coi problemi di meccanico soggetto, dei quali abbiamo discorso fin qui, Galileo se n'era proposti a risolvere altri di vario argomento, i quali pure, facendo parte del materiale da portarsi in dialogo, vogliono esser secondo il proposito nostro raccolti, perchè possan meglio riconoscersi dai nostri Lettori. Non a tutto era data la forma problematica, ma molti dei pensieri, che si volevano dialogizzare, erano espressi in note frettolose, e in sentenze disperse, delle quali anche daremo un saggio, come delle ultime foglie e de' fiori più minuti, a cui il giardiniere sa trovar qualche luogo nella già imposta ghirlanda.

Incominciando da quelle scritture di fisico argomento, le quali avevano avuta già la forma determinata di problemi, per contrapporli ai *Problemi* di Aristotile, studiati allora da tutti e da tutti creduti veri; trascriveremo i due seguenti, rimasti tuttavia manoscritti, nella raccolta fattane dal Viviani. Nel

primo « si domanda onde avvenga che un uovo rinchiuso tra le mani per punta, e stretto con grandissima forza, non si possa schiacciare » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 34). Alla proposta si direbbe che anche questo problema appartiene ai meccanici, ma troppo ardua cosa essendo alla scienza di allora la teoria dell' equilibrio delle vôlte e degli archi gravati da pesi, Galileo si studiò di ridurre alla fisica la questione, si potrebbe dire ingegnosamente, benchè costretto a invocar con Aristotile il falso principio che la Natura aborrisce il vuoto.

« Il presente problema facilmente si risolverà, premettendo come principii alcune vere proposizioni: La prima è che, siccome delle figure piane, e che abbiano il medesimo ambito, la maggiore è il cerchio; così anco delle figure solide isoperimetre la sfera è la maggiore, e la più capace delle altre. La seconda proposizione è che la Natura grandemente aborrisce il vacuo, onde in essa ei non si dà, se non con somma violenza. La terza è che l' aria si distrae e rarefà, cosa che non può far l' acqua, nè altri umori. La quarta è che prima s' arrende un poco il guscio di un uovo, e poi si rompe. »

« Ora da questi principii caveremo la resoluzion del problema, imperocchè, mentre che si preme l' uovo per lo lungo, e si stringono le sue punte o estremità l' una contro l' altra, il suo guscio cede alquanto, e si arrende, sicchè l' uovo, che è di figura oblonga, viene ad acquistar dello sferico, e per conseguenza si fa più capace, perchè, come aviamo detto delle figure solide isoperimetre, la sfera è la più capace. Ma perchè la roba, che è dentro dell' uovo, non è cosa che si rarefaccia e distenda, per poter mantener pieno l' uovo, sarebbe necessario che il luogo, che acquista l' uovo nel ridursi alla figura sferica, rimanessi vuoto. Ma la Natura, che grandemente aborrisce il vacuo, repugna gagliardamente e resiste, per far che l' uovo non si avvicini alla figura sferica, acciò col diventar egli più capace, e per non aver dentro cosa che lo possa riempiere, e per esser necessario che il suo guscio s' arrenda alquanto, prima ch' e' si rompa; non si venga a dare il vacuo: quindi è che l' uovo non si può schiacciare. »

« Per confermazione e chiarezza di questo pensiero, piglisi un uovo assai scemo, sicchè dentro vi sia di molt' aria, e stringasi per lo lungo: che al sicuro si schiaccerà, perchè l' aria che è dentro seguiterà tanto a rarefarsi, e a distendersi per mantener pieno l' uovo, mentre con l' avvicinarsi allo sferico divien più capace, che il guscio, per non potere arrendersi più, si verrà a rompere, ed il medesimo seguirà, se faremo nel guscio ogni piccolo foro, sicchè l' aria per quello possa entrare nell' uovo » (ivi, fol. 34 a tergo).

All' altro problema d' argomento fisico, che noi qui aggiungiamo, il Viviani apponeva la nota *stampato,* come quello che veramente era stato raccolto dal Rinaldini fra le Opere galileiane, nel 1655, in Bologna, col titolo ***Risposta ad un problema, proposto dall' illustrissimo signor Piero Bardi dei conti di Vernio, intorno all' apparente diversità della temperie dell' acqua.*** Nonostante è bene conoscerlo nella sua prima forma originale, non per sola curiosità erudita, ma perchè serva di documento a dimostrar come

Galileo, nè prima nè poi si valse del Termometro, per risolvere una questione relativa ai gradi della temperatura assoluta dell' aria, e dell' acqua.

« Uno va per bagnarsi in Arno: si spoglia, e si mette a sedere all' ombra. Stando così, sente un fresco comportabile e temperato. Entra poi nell' acqua, e gli par di sentirla assai fredda. Statovi un pezzo ne esce, torna all' ombra, e sente un freddo estremo. Di nuovo si tuffa nell' acqua e, dove la prima volta gli parve molto fredda, la seconda gli apparisce piuttosto temperata e calda. Si domanda adesso la cagione di tal diversità. »

« Il Problema si risolve così: Noi abbiamo in una stanza una tinozza piena di acqua, e ci è stato v. g. quindici di freddura. Viene uno, si spoglia e entra nella tinozza. Chiara cosa è ch' ei sentirà assai più freddo in quell' acqua, ch' ei non sentiva, innanzi ch' ei v' entrasse, dal che si può concludere che, stando l' aria e l' acqua in un medesimo luogo, cioè ad un istesso caldo o ad un istesso freddo, sempre l' acqua apparirà assai più fredda dell' aria. »

« Diciamo dunque che dei gradi di freddezza, dei quali l' aria ne ha per esempio due, l' acqua ne abbia dieci. Dunque un' altr' acqua, che ne abbia sei, apparirà fredda, in comparazione dell' aria, che ne ha due, ma ben calda in relazione all' acqua, che ne ha dieci. »

« Ora, stante questo, colui che si va a bagnare in Arno, mentre sta ignudo all' ombra, gode il fresco temperato dell' aria, che ha due soli gradi di freddezza, ma, quando entra nell' acqua d' Arno, sente la freddezza sua, che è di sei gradi (di sei dico e non di dieci, perchè il sole ardente, che l' ha percossa per lo spazio di molte miglia, glie ne viene ad aver levati quattro), e però, in rispetto dell'aria, che ne ha due soli, gli pare assai fredda. »

« Esce poi costui d' Arno, e torna all' ombra bagnato e coperto da un sottilissimo velo d' acqua, la quale, per esser pochissima, non sì tosto è condotta sotto l' albero all' ombra, che viene ad acquistare i quattro gradi di freddezza toltigli dal Sole, onde di sei, ch' ella ne aveva innanzi, si riduce ad un tratto ad averne dieci, sicchè colui che si bagna non sente più sei gradi di freddezza, ma dieci. E però, mentre sta sotto l' albero bagnato, sente freddo estremo, ma se ritorna poi a tuffarsi entro nell' acqua, che ha sei gradi soli di freddezza, onde, perdendo quattro gradi di freddo, gli pare di essere entrato in un bagno temperato » (ivi, fol. 29).

Anche questi due Problemi dovevano esser materia del Dialogo, e materia del Dialogo doveva essere altresì un argomento d' assai maggiore importanza, intorno al quale le poche risolute questioni avevano ingerito nell' animo di Galileo la speranza di averne a comporre un intero trattato. Di questo trattato faceva Galileo stesso menzione in una lettera a Giuliano de' Medici, a cui, dicendo di avere diversi opuscoli di soggetti naturali, ne annovera in ultimo uno *De animalium motu* (Alb. VI, 98). Sembra che allora, mentre era in Padova, emulasse l' altro celebre collega suo Girolamo Fabricio d' Acquapendente, a cui si debbono in realtà quei trattati *De sono et voce,* e *De visu et coloribus,* nella sopra citata lettera a don Giuliano commemo-

rati. Di quella emulazione si vedrà, nelle cose che saremo per dire, qualche prova rispetto ai moti animali, intorno a che non rimase a Galileo, come s' accennava dianzi, se non che alcune questioni relative particolarmente al passo dell' uomo e del cavallo: questioni, il proposito di raccoglier le quali e di portarle in dialogo, era stato espresso a Raffaello Magiotti, com' apparisce dalle congratulazioni di lui scritte in una lettera da Roma il dì 21 Marzo 1637 (MSS. Gal., P. VI, T. XIII, fol. 14).

Del passo del cavallo è già da qualche tempo pubblicamente nota una scrittura galileiana, nella quale l' Autore confuta le dottrine di Aristotile, e in che modo lo faccia lo dicemmo nel cap. X del terzo tomo della nostra Storia, e particolarmente a pag. 397, 98. Son forse meno note alcune altre osservazioni, che Galileo stesso faceva intorno al passo dell' uomo, contro ciò che Platone e Aristotile avevano insegnato nei loro libri. Dicevano que' due grandi Filosofi che, passeggiando l' uomo, la sua altezza verticale ora cresce ora diminuisce, secondo che ora la persona si solleva sull' un piede, per poi scendere a riposarsi sull' altro, sicchè la linea del moto non è retta, ma ondeggiante. Così fatto ondeggiamento, dicevano, si può facilmente osservare, riferendo la visuale sopr' una parete, parallelamente alla quale si guardi da una certa distanza la testa di un che passeggia.

La ragione, che prescriveva alla Natura questo modo indecente di operare, consisteva nel credere ch' ella non avesse saputo, con tutto il suo sapiente magistero, far sì che le gambe si potessero allungar secondo il bisogno, ma che sempre si dovessero mantenere uguali. Rappresenti AB (fig. 71) la colonna ossea, sopra la quale si sostien l' uomo, nella sua stazion verticale, sul suolo CD. Per muoversi innanzi fa rotare l' AB intorno al centro A, nella posizione AB′, ond' è che, per andare a ritrovare e appoggiarsi sul pavimento in G, il punto A convien che si abbassi, e che poi nuovamente si rialzi, per tornar nella posizion verticale parallela all' AB, e così la persona non va mai di pari passo ma ondeggia.

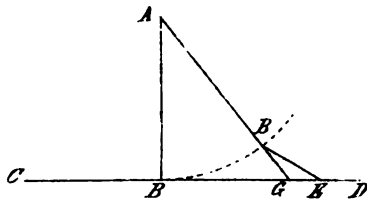



Figura 71.

Galileo diceva che la Natura aveva suggerita instintivamente una bellissima industria, sfuggita alle considerazioni di quei Filosofi, aggiungendo la parte B′ G, che manca alla gamba, per andare a toccare e fermarsi nell' appoggio, col sollevare in B′ il calcagno, e col distendere e appuntare in E il piede, cosicchè il punto A riman sempre alla medesima altezza, e il passo dell' uomo, come si conveniva alla sua dignità, si serba sempre uniforme. Ritrovasi notato infatti fra i pensieri di Galileo « come il camminar di noi bipedi non sia a onde, ancorchè le gambe siano uguali, e che si trovino diversamente inclinate sopra l' orizonte, dove par che Aristotile e Platone abbiano equivocato » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 62): pensiero che vien confermato dalla testimonianza, e illustrato dalle seguenti parole del Viviani:

« Sovviemmi aver sentito dire dal Galileo che Platone e Aristotile er-

rarono in dire che il moto dell' uomo veniva fatto a onde, cioè che, nel moversi e passeggiar parallelo ad una parete, osservando la testa del moventesi, con riferirla con l' occhio sulla muraglia, appariva che essa testa descrivesse un' onda ora alta ora bassa: perchè essi si credettero che le gambe fossero talmente uguali, che elle non potessero mai essere disuguali. Ma sono, perchè, nel posare il calcagno del piede precedente, si allunga l' altra gamba, alzando il suo calcagno, e levandosi in punta di piedi » (MSS. Gal. Disc., T. CXXXV, a tergo del fol. 29).

Il Borelli, esaminando, nella proposizione CLVI della prima parte *De motu animalium,* in che modo si muova l' uomo, sembra che volesse anche egli indirettamente confermare le osservazioni di Galileo, contro le inconsideratezze dei Filosofi antichi, dicendo che, sebbene possa a prima vista parer che le nostre gambe si rassomiglino nel moversi a quelle di un compasso, è nonostante da confessar che un tale incesso ondeggiante *deformis et incommodus esset* (Romae 1680, pag. 252), ond' ei ne conclude che la Natura *faciliori et elegantiori motu machinam humani corporis promovet,* e in descrivere questa promozione principalmente nota, come Galileo, che ogni incomodità di ondeggiamento si toglie, *quia longitudo totius cruris et coxae elongatur, additione longitudinis pedis* (ibid., pag. 253).

Nella seguente proposizione però il Borelli stesso osserva che l' ondeggiamento, inevitabile al passo dell' uomo, si fa propriamente a quel modo che dicevano Platone e Aristotile, ma nel piano orizontale, descrittovi sopra dal centro di gravità, e no nel verticale descrittovi dalla testa. Che sia propriamente così, che cioè le nostre gambe non conducano l' umbilico precisamente nella linea retta della direzione del passo, ma che lo facciano ondeggiare ora a destra ora a sinistra, il Borelli suggerisce un modo di sperimentarlo, che potrebbe a chi l' eseguisse riuscire, oltre che di ammaestramento di questa verità, di spettacolo curioso e giocondo. Sia per esempio AG (fig. 72) la linea lungo la quale, movendo da A, uno si proponga di camminare, e in G sia eretta la verga GH di color bianco, e in FI un' altra simile verga, ma di color nero, cosicchè all' occhio dell' uomo, che sta fermo in A, la bianca resti totalmente coperta dalla nera. Movasi, e vedrà ad ogni passo la verga bianca ora uscir fuori dalla sinistra mano ora dalla destra, con continua spettacolosa vicenda, e per evidentissimo segno che, riferito il centro di gravità sul pavimento, vi descriverebbe la linea ondeggiante ABEM, le onde o i seni della quale si vedrebbero, come BC, DE, farsi molto più ampi negli uomini obesi, e nelle donne pregnanti. « Quod est argumentum evidentissimum, così propriamente conclude il Borelli la sua proposizione, dop' aver descritta la curiosa esperienza; incessus hominum non fieri per lineam rectam: ergo linea propensionis tortuoso et serpentino itinere transfertur hinc inde, ab una ad alteram parallelarum, et proinde per unicam

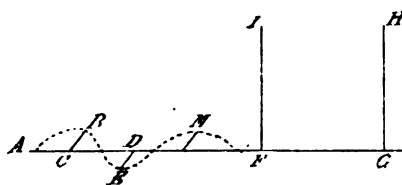



Figura 72.

simplicem rectam lineam machina humani corporis motum progressuum incessus efficere non potest » (ibid., pag. 255).

In proposito di così fatte questioni di Meccanica animale cade opportuno quel confronto, dal quale si voleva far apparire come Galileo emulasse l'Acquapendente. Nel trattato *De musculi utilitatibus* è premessa dall'Anatomico nello Studio padovano la questione « Cur musculi longiores, non solum longiores, sed robustiores dant motus » (Opera omnia, Lugd. Batav. 1738, pag. 420); e il Matematico nel medesimo Studio si proponeva pure di dimostrare « che i tendini dei muscoli fanno maggior forza i lunghi che i brevi » (MSS. Gal., P. VI, T. III, a tergo del fol. 61). Ora, essendo questa proposizione principalissima fra quelle, che dovevano comporre il trattato *De animalium motu,* di cui nella storia della letteratura galileiana non è rimasto che il titolo; è il tempo di dire a coloro, che ne hanno lamentata la perdita, come Galileo non progredì forse oltre in quest' ordine di speculazioni, perchè si trovò vinto dall'emulo suo, l' anatomia del quale, destramente accoppiata con la matematica, superava i vantaggi della matematica sola, ch' era pur mancante dei necessari argomenti.

Come nell' Acquapendente s' accoppiassero quelle due scienze, e come la matematica che aveva lo fornisse dell' argomento opportuno, consistente nel modo di decomporre le forze, secondo gl' insegnamenti di Aristotile, s' accennava in principio dell' ultimo capitolo della prima parte di questa Storia della Meccanica, ma vogliamo ora meglio, nella presente occasione, dichiarare le cose già dette intorno al modo di risolver, nel trattato *De musculi utilitatibus,* la proposta questione, per concluder poi che mancavano a Galileo veramente, come si diceva, gli argomenti necessari, per riuscire a quella medesima soluzione.

La soluzione dell' Acquapendente si fa dipendere, come da lemma, da una proposizione meccanica così formulata: « Quo corda super vecte elatior fuerit, idest maiorem angulum continebit, eo facilius pondus attolletur » (Opera cit., pag. 420). Sia il vette AB (fig. 73), col peso in A e col sostegno in B, e per sostenerlo o sollevarlo intendasi applicata in D una corda di qualunque lunghezza. Se inclinasi in DE, in modo che l'angolo EDB sia minore di FDB, dice l'Acquapendente che anche sarà minore la forza fatta

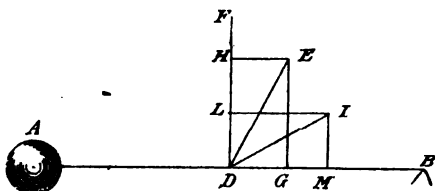



Figura 73.

dalla medesima corda, perchè allora *pars virium absumitur contra fulcimentum.* Costruito infatti sulla DE il rettangolo HG, la forza totale si decompone nelle due HD, DG, ed è evidente che questa *absumitur contra fulcimentum,* non restando attiva che l' HD, minore della DF o della DE. Che se anche s' inclini di più la corda, come in DI, è manifesto che, crescendosi da una parte la forza DM, inutilmente diretta contro il fulcro, la forza utile LD, che dall' altra parte ne resta, è anche più che dianzi diminuita. È chiaro

dunque che, mentre nella direzion perpendicolare non è parte alcuna della forza, che non si eserciti in sollevare il peso; inclinandosi la corda sempre più, anche sempre più diminuisce quella sua forza, intanto che, venendo finalmente a costituirsi nella stessa linea del vette, si riduce a nulla. « Absumitur ergo vis magna ex parte in fulcimento B expellendo: quod, si attrahatur chorda perpendicula in FD, nulla pars virium suam non exercet facultatem in pondere elevando. Patet etiam quod, si vectis et chorda in eadem essent linea constituta, nullo pacto motus fieret » (ibid.).

Dimostrato ciò, per avvicinarsi più d' appresso ad applicar le teorie meccaniche al caso dei muscoli che, quanto son più lunghi, tanto più facilmente muovon le membra, a cui son legati; soggiunge l' Acquapendente l' altra proposizione, che dice come, dovendosi un peso attaccato all' estremità di un vette semplicemente sostener da una corda, tanto fa l' esser questa o più lunga o più corta: ma se debba il peso stesso poi venir sollevato, « dico minori vi opus esse, adhibita corda longiori, quam breviori » (ibid.).

Per dichiarar meglio il concetto dell' Autore, poniamolo sotto quest' altra forma: Se il peso A (fig. 74) debba semplicemente sostenersi, tant' opera la corda AC, che la AD; ma se debba inoltre sollevarsi, infino a toccar per esempio la orizontale SX, più facilmente vi si porterà, e vi si manterrà dalla corda più lunga, che dalla più corta. La corda CA infatti, girando intorno al punto C come a suo centro, porterà il peso in R, e DA, girando intorno a D, lo porterà in S. Ora, per concluder dietro il lemma precedente che in S il peso vien sollevato più facilmente che in R, basta dimostrar che l' angolo DSX, fatto dalla corda colla direzione del vette, è maggiore di CRX, ciò che è facile a farsi conducendo le AR, AS, dai triangoli isosceli ACR, ADS descritti dalle quali resulta essere ADS minore di ACR, d' onde per necessità DSX maggiore di CRX. Dietro ciò, se per AC, AD intendansi due muscoli, e per A il peso dell' arto, a cui per moverlo son legati; il proposito è per sè manifesto.

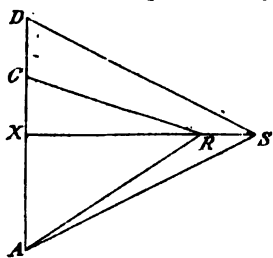



Figura 74.

Così risolvevasi dall' Acquapendente una delle principali questioni di Meccanica animale, ritrovando nella regola di decomporre le forze, insegnatagli da Aristotile, l' argomento necessario per una tal soluzione. Dicemmo che a Galileo venne a mancare così fatto argomento, per cui dovette necessariamente rimanere inferiore all' emulo suo, ma è ora il tempo di confermare quel nostro detto. La somma delle cose è chiaro che si riduce alla meccanica dei pesi sostenuti da funi, la più propizia occasione di trattar de' quali sarebbesi porta a Galileo, in proposito dei pendoli, ricercando in essi, quando sian rimossi più o meno dal perpendicolo, la proporzion del variare i loro momenti.

Sia per esempio il pendolo BC (fig. 75) rimosso in BA: quanto varia la forza del peso in tirare il filo nelle due posizioni? Che ci dovesse essere

una tal varietà Galileo incominciò, come Leonardo da Vinci, ad apprenderlo per esperienza, se non che, mentre all' uno si rivelava il fatto dai globi ventilati all' estremità di una bilancia, serviva all'altro di criterio il tatto delle proprie dita, alle quali, ventilando il grave, teneva avvolto o legato il filo. Quel criterio poi era con l' esercizio divenuto sì giusto che, volendo per via delle numerate vibrazioni misurare il tempo, diceva di saperlo far senza errore a mente, anche senza veder l' andare e il ritornare dello strumento. « Col misuratore del tempo, troviamo scritto in una sua nota, si possono numerare le vibrazioni, tenendo il filo in mano, come se fosse legato a un luogo stabile, e preso il tempo con la mente si numereranno senza errrore, benchè non si vegghino, le vibrazioni » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 63 a t.).

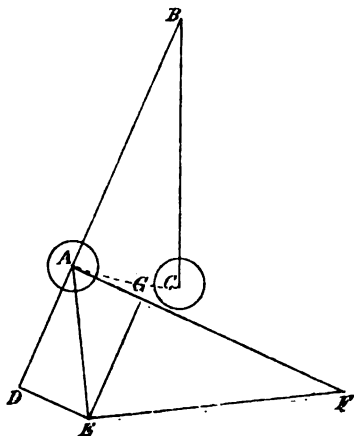



Figura 75.

Il fatto però era per sè solo cognizione di poco acquisto, senza che la matematica venisse a definire le proporzioni, secondo le quali via via succede: proporzioni che noi crediamo non essere state da Galileo mai dimostrate. L' opinione si fonda sulla certezza che abbiamo non essere stato l' argomento in proposito toccato, nè nei libri nè a viva voce, dal Maestro, al più studioso Discepolo del quale, promotore di questa nuova scienza, domandandosi quanta sia la violenza che patisce il filo AB, nella precedente figura, rispetto a quella che patisce il filo BC, rispondeva: « La violenza che patisce il filo AB, essendo stirato dal grave A, credo che sia tale, quale è il momento del medesimo grave, movendosi per il piano BA: cioè che la forza fatta dal grave al filo, nel luogo AB, alla forza fatta al filo nel luogo BC, che è la forza totale, sia come il momento del medesimo grave sopra un piano inclinato quanto BA, al momento totale per la perpendicolare BC » (MSS. Gal. Disc., T. CXIII, fol. 30).

Ma il Viviani, credendo così, credeva manifestamente il falso, com' avrebbe saputo dimostrare a lui e al suo proprio Maestro l' Acquapendente, applicandovi, a quel modo che dianzi il rettangolo aristotelico, così in questo caso, e per le medesime ragioni, il parallelogrammo. Facendo infatti rappresentare alla AE la forza totale, che aveva il peso in C, questa in A decomposta nelle due AD, AG, non si ridurrebbe che alla sola AG, essendo che l' altra AD *absumitur contra fulcimentum.* Dunque il momento totale del peso in C, al parziale in A, sta come AE ad AG, o, prolungata l' AG infino a incontrare in F l' orizzontale EF, per i triangoli simili AEG, AEF; come AF ad AE, per cui la forza fatta dal peso in C, alla forza fatta in A, non sta come il momento dello stesso grave nel perpendicolo, al momento lungo un piano inclinato quanto AD, secondo che falsamente credeva il Viviani, ma al mo-

mento lungo un piano inclinato quanto AF, no nella direzione stessa del filo, ma in quella a lui perpendicolare.

L'incertezza e il fallo, in cui incorse lo stesso Viviani, avevano la radice nella falsità del secondo teorema scritto nel IV dialogo delle Scienze nuove, da cui resultava come, tutt'altro che consumarsi la forza AD in tirare inutilmente il sostegno, si faceva anzi così attiva, da rimaner per regola della resultante del moto. Ond'essendo propriamente tali le fallacie del Discepolo e del Maestro, abbiamo tutte le ragioni di credere che mancassero all'uno e all'altro i principii diretti, per riuscire a dimostrar come più validamente operino, in movere le membra, i tendini più lunghi. Dicemmo che mancavano i principii diretti, perchè non è impossibile che si risolvesse la questione in altri modi, secondo i quali Galileo forse intendeva di portarla in dialogo, per salvar dall'oblio questa reliquia delle sue speculazioni intorno ai moti animali.

Altre speculazioni intorno ai più varii soggetti della Fisica aveva da raccogliere lo stesso Galileo, per inserirle nel suo Dialogo e salvarle anch'esse dall'oblio, fra le quali ci sembra sia da notar fra le prime quella, che ora diremo, relativa alle galleggianti. Nel celebre discorso pubblicato nel 1612 intorno a questo argomento, confutava quel suo avversario Francesco Buonamico, il quale voleva confermare le sue false dottrine dal fatto, che un legno inzuppato d'acqua finalmente va al fondo, contrapponendo Galileo le seguenti osservazioni alle fallacie del peripatetico discorso: « Ciò accade d'alcuni legni porosi, li quali, mentre hanno le porosità ripiene di aria, o d'altra materia men grave dell'acqua, sono moli in specie manco gravi di essa acqua, ma quando, partendosi tal materia leggera, succede nelle dette porosità o cavernosità l'acqua, può benissimo essere che allora tal composto resti più grave dell'acqua.... Così quel che resta del legno, partendosi l'aria dalle sue concavità, se sarà più grave in specie dell'acqua, ripiene che saranno le sue porosità d'acqua, si avrà un composto d'acqua e di legno, più grave dell'acqua, e andrà, conforme alla dottrina d'Archimede, al fondo » (Alb. XII, 32).

In questo discorso Galileo concedeva al suo avversario la possibilità che i legni inzuppati d'acqua si sommergano: ciò che sarebbe senza dubbio avvenuto, quando la materia di loro che resta, partitasi l'aria, fosse più grave in specie dell'acqua stessa. Nulla però decide in proposito, non avendone fatte esperienze, nè curandosi per allora di farle. Ma negli ultimi anni della sua vita, ritornando col pensiero sopra le cose passate, sentì nascersi una viva curiosità di saper come il fatto passava, e ragionando un giorno di ciò col Viviani gli soggiungeva che, se la materia legnosa fra poro e poro è specificamente più grave dell'acqua, dell'andare al fondo il legno inzuppato sarebbe argomento certo il vedervene andare la segatura.

Il desiderio di sodisfare a una tale curiosità s'accendeva alla fiamma di un desiderio più vivo, qual era quello di confermar che i liquidi non resistono colla loro viscosità all'esser penetrati dai corpi immersivi: perniciosa dottrina, che il Salviati ripeteva nel primo Dialogo delle Scienze nuove (Alb.

XIII, 72), con la medesima persuasione da vecchio, che l'aveva da giovane professata nel sopra citato discorso idrostatico, le prolisse parole scritte nel quale si possono leggere compendiate in questa nota: « Mentre un metallo è freddo, ed in conseguenza le sue parti continuate ed aderenti insieme, è necessario, per dividerlo, usare strumenti gagliardi e gran forza. Dopo che il fuoco l'ha liquefatto, restano le sue parti divise, ed un solido che si ponga dentro non l'ha più a dividere, ma solamente a movere. Perchè irragionevol cosa sarebbe a dire che una verga di ferro o altro corpo solido dividesse quello, che non ha diviso il fuoco. Nel penetrar dunque i liquidi e fluidi, non solamente non vi è resistenza alla divisione, ma non si ha a divider cosa alcuna, ma solamente a muovere » (MSS. Gal., P. III, T. X, fol. 72).

Nel primo dialogo delle Scienze nuove, al luogo sopra citato, credeva il Salviati di poter confermare queste dottrine, per via degl'idrostammi, ai quali è sufficiente una leggerissima variazione di temperatura nel liquido, perchè vi scendano o salgano prontamente: e ora nel dialogo novissimo intendeva di confermare quella sua antica opinione con l'esempio di ciò, che sarebbesi osservato nei legni massicci e nella loro limatura. L'esperienza non sembra si facesse in tempo, e il Viviani indugiò ad eseguirla nell'Accademia del Cimento, contentandosi intanto di scriver per suo memoriale in questa nota il pensiero comunicatogli da Galileo: « Credo che delle cose che scendono nell'acqua, quanto più piccole sono, più stieno a scendere, ma che di quelle, che mal volentieri vi scendono, siano più facili a scender le piccolissime che le grandi, come per esempio il legno, che non vi scende, sminuzzato in sottil polvere vi scenda » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 37).

Dicemmo che questa opinion del Maestro aspettò il Viviani di verificarla nell'Accademia del Cimento, e ciò fu a proposito delle controversie insorte fra lui e il Borelli, il quale, contro il suo collega e contro lo stesso Galileo, adduceva esperienze dimostrative di un glutine, che, come quello degli altri corpi, tenga insieme le particelle dell'acqua. Avremo intorno a questa controversia occasion di discorso altrove: per ora qui basti dir che il Viviani, propugnatore delle dottrine insegnate nel discorso delle Galleggianti, proponeva nell'Accademia di « fare una piastra tonda di cera, che salga lentamente per taglio: posta poi per piano, si vede che la figura non è impotente a fendere l'acqua, e che in essa non ci è minima coesione e viscosità » (MSS. Cim., T. X, fol. 27).

Che aggiungesse a questa il Viviani l'esperienze suggeritegli da Galileo resulta dal trovarsi, fra le altre rivendicazioni, scritta anche questa: *Mia l'osservazione che tutti i legni vanno al fondo nell'acqua* (ivi, fol. 259): e che non in loro stesse terminassero così fatte proposte, ma che avessero il fine di dimostrare come sian continue, e non aderenti le particelle dell'acqua, apparisce da un *Registro di osservazioni ed esperienze varie, da farsi nell'Accademia in considerando l'acqua come mezzo de' corpi mobili per essa* (ivi, fol. 26). Fra quelle osservazioni è messa anche questa: « Se le materie, stimate più leggere dell'acqua dal vederle galleggiare, ri-

dotte poi in sottilissima polvere, vi discendano: esaminar per mezzo dei corpi discendenti se nel continuo dell' acqua sia necessario introdurre alcun glutine » (ivi). Il Viviani aveva scritto a pulito questo registro da una bozza pure autografa, nella quale alla medesima proposta era data quest' altra forma: « Se la sottilissima limatura delle materie, stimate più leggere dell' acqua dal galleggiare, vi discenda, come fa il sughero e la canna, per mezzo di materie discendenti: esaminare se nella continuità dell' acqua sia alcun glutine o viscosità, come alcuni hanno creduto » (ivi, fol. 28).

La materia, che avrebbero fornito al Dialogo queste esperienze, si comprende quanto fosse per riuscire importante, dall' importanza stessa che poi ebbe nell' Accademia, la quale, sulla proposta del Viviani esaminò altresì la questione dell' origine delle fonti, che Galileo aveva promossa nell' occasione di confutar le false dottrine idrostatiche del Bonamici. Diceva il Peripatetico che le acque ascendono infino alle più alte cime dei monti, spintevi dalla gran pressione del mare comunicante con esse per sotterranei canali. Galileo rispondeva che nei vasi comunicanti, sia l' un grandissimo e l' altro piccolissimo, il liquido si fa equilibrio, giunto che sia qua e là al medesimo livello, e si richiamava, per confermare una tal verità, alle cose, ch' egli aveva già dimostrate nel suo Discorso intorno alle galleggianti. Della questione, così tra i Fisici controversa anche ai tempi del Guglielmini, e che doveva pure porger materia al dialogo, come Galileo ne aveva data al Viviani intenzione, ci è rimasta per documento questa nota che dice: « Aqua DF (fig. 76) non plus premit quam BE, quod facile demonstrari potest quod consonat cum eo, quod a me scriptum est in tractatu *De insidentibus aqua,* quod scilicet magnum pondus ab exigua aqua sustinetur. Attamen Bonamicus, pag. 476, contrarium opinatur: credit nam aquam maris comprimendo attollere ad montium cacumina aquas, per angustas venas subterraneas, ad fontes et flumina producenda » (MSS. Gal., P. III, T. X, fol. 71).

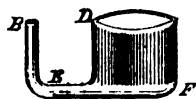



Figura 76.

Le questioni di fisica, delle quali abbiamo dato fin qui gli esempi, o erano rimaste indietro, o sovvennero poi a Galileo, nel ripensare al suo discorso *Delle cose che stanno in sull' acqua,* ma il *Saggiatore,* che si può riguardar come un trattato della Fisica generale di que' tempi, offeriva più largo campo a così fatte fisiche questioni, molte delle quali si trovano accennate nei manoscritti, o rimaste pur esse in dietro, o sovvenute all' Autore dop' avere scritto e pubblicato il suo libro. Tale sarebbe la seguente relativa all' origine delle piogge e delle rugiade:

« Essendo che dalla terra si sollevano continuamente esalazioni sottili, tenui, ascendenti, e intanto portano seco vapori più grossi ed acquei; arrivati a una certa altezza, ch' è il termine dell' etere nostro ambiente, e l' aria purissima, si dilatano e si distendono, e si trattengono o calano abbasso, doppo essersi fatta una costipazione e spissitudine di questi vapori, e così si fanno le piogge. Ma non so in che maniera, quand' è un tempo serenissimo,

chiaro, e' si abbia subitamente a rannuvolare ogni cosa, farsi grande oscurità, e venir milioni di botti d'acqua a basso. »

« Che continuamente si sollevino vapori si fa manifesto in più maniere, poichè, gettando in terra un po' d'acqua e guardando con l'Occhiale, si vede salir con prestezza un fumo, un vapore, e si fa manifesto nella fiamma, che continuamente e con gran velocità si vede salire ad alto: e così nei carboni accesi quel calore va ad alto. »

« Le rugiade non sono altro che vapori, della medesima sorte, e cascano la notte come abbandonati dal Sole » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 28 a t.).

Altra questione, relativa a quella trattata nel *Saggiatore*, è la seguente intorno al rendere la ragione dell'apparire gli astri di grandezza varia sull'orizonte. Narrammo, nel Cap. X del secondo nostro Tomo (pag. 397), le controversie insorte sopra ciò tra i Filosofi, e come il Castelli si riducesse ad attribuire il fenomeno alla nostra stimativa, che è varia, secondo che la vista è libera, o s' interpongono tra lei e l'astro corpi, de' quali ci sia nota la grandezza e la distanza. Ora è da osservar che così insomma risolvevasi da Galileo la questione, come apparisce dalla nota così manoscritta: « Non si può dir che il Sole o la Luna mi appariscon grandi quanto una frittata, o quanto una torta, o quella cometa mi si rappresenta alla grandezza di un uomo, poichè queste cose possono rappresentarsi anco alla grandezza del fondo di un tino o di un quattrino, secondo come si terranno questi lontani dall'occhio, tra esso e altri oggetti » (ivi, fol. 29).

L'incontro fra il pensiero di Galileo e del Castelli gioverebbe ricercar se fu inconsapevole e fortuito o, essendoselo insieme comunicato, a chi primo di loro fosse sovvenuto, non sempre verificandosi il detto che il maestro sta sopra al discepolo, come, per non rammemorare altri esempi, si vede essere avvenuto rispetto al « problema, perchè l'acqua, nel zampillare all'in su, si separa nelle parti alte, dove il moto è più lento » (MSS. Gal., P. VI, T. II, fol. 13). La soluzione è data nel primo libro *Della misura delle acque correnti* (Bologna 1660, pag. 29), come corollario della proposizione ivi dimostrata, che cioè le sezioni stanno in ragion reciproca delle velocità. E benchè, nel citato luogo autografo, Galileo non risponda a parole, sembra a noi che rispondano i numeri, lungo la linea sottosignati, i quali numeri sono scritti a mostrare i decrementi della velocità dello zampillo quanto giunge più alto, e il reciproco accrescimento delle sezioni, per cui si separano dalla parte di sopra le particelle dell'acqua, che di sotto andavano unite. Sarebbe questa nota, scritta così frettolosamente, documento importantissimo per coloro, i quali pretendono che il principio, a cui s'informa il trattato del Castelli, fosse dovuto a Galileo: ma perchè di ciò avremo nella nostra Storia dell'Idraulica occasione a più lungo discorso, ritorniamo a quei materiali sparsi, che si riferiscono alle cose trattate nel *Saggiatore*, fra le quali alcune riguardan la luce in sè stessa, e ne' suoi effetti.

Meritevole di esser meditata, come quella che specchia lucidamente il pensiero di Galileo intorno all'essenza della luce, è la nota seguente, nella

quale s' applicano al proposito i concetti metafisici, espressi intorno agl' indivisibili infiniti nel primo dialogo delle Scienze nuove. « Che la luce sia incorporea ed istantanea si potrebbe dire, poichè, avendo un pugnello di polvere e dandogli fuoco, ella si spande in immenso, e si può vedere com' è ch' ella sia ridotta a' suoi infiniti indivisibili componenti, e fatta senza introduzione di corpi o di posizione di vacui quanti, ma bene d' infiniti indivisibili vacui, e così non occupa luogo, e non ricerca tempo d' andare da un luogo a un altro » (ivi, P. V, T. IV, fol. 28).

Gli effetti della luce o son considerati nello strumento naturale che è l' occhio, o nell' artificiale che è il Telescopio, e sovvengono opportune le note sparse, relative a questo soggetto, per confermare ora gli errori, ora il buon senso, piuttosto che la scienza di Galileo. Errava, quando, nelle postille alla *Libra astronomica,* si proponeva di dimostrar contro il Sarsi « che altrimenti vede l' occhio di quel che i vetri portano le specie » (MSS. Gal., P. III, T. XIII, fol. 14). Il buon senso poi, piuttosto che la scienza delle rifrazioni, gli facevan cogliere il vero, quando al Peripatetico, che diceva mostrare il Canocchiale gli oggetti più grandi, col renderli più luminosi, contrapponeva che « se il medesimo oggetto ha da esser veduto sotto maggior angolo, bisogna che il suo lume e raggi si disperghino » (ivi). Che, se nel discorso del Sarsi fosse stato verità, soggiungeva Galileo, « gli oggetti, veduti con traguardi di mano in mano più acuti, siccome appariscon maggiori, così doveriano apparir più lucidi, ma accade tutto l' opposito » (ivi).

Si riferisce a questo argomento un' altra nota autografa, nella quale Galileo proponevasi di dimostrar contro il medesimo Sarsi « che i raggi visivi camminano sempre per linee rette, e non mai per curve, dal qual principio immediatamente si conclude gli oggetti visivi, in tutte le distanze quanto si voglia diseguali, essere dal medesimo Telescopio sempre, secondo la medesima proporzione, moltiplicati. « Imperocchè intendansi due raggi visivi procedenti dall' occhio libero, secondo le rette linee AG, BH (fig. 77), tra le quali in diverse distanze siano gli oggetti visivi AB, CD, EF, GH, li quali all' occhio appariranno in grandezza uguali, essendo veduti sotto il medesimo angolo. Intendasi poi per mezzo di un Telescopio aggrandito l' oggetto AB sino alla grandezza IK, e i raggi, che vengono dal Telescopio ai termini JK, s' intendino prolungati secondo le linee rette IP, KQ, sino alle quali si prolunghino le CD, EF, GH, terminandole ne' punti LM, NO, PQ, ne' quali punti veramente verrebbero a terminare, quando dal Telescopio fossero ingrandite tutte secondo la medesima proporzione. Ma, quando gli oggetti più remoti fossero di mano in mano ingranditi meno, i termini delle medesime linee ingranditi caderebbero dentro alle linee IP, KQ, conforme ai punti R, S; T, U; X, Y » (MSS. Gal., P. III, T. XI, fol. 21).

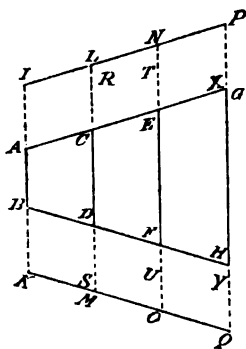



Figura 77.

Si conferma da questa proposizione, condotta sui principii della Geometria elementare, piuttosto che su quelli propri alle rifrazioni; come Galileo, nemmen negli ultimi anni della sua vita, conobbe le teorie diottriche del Canocchiale, cosicchè non rimane a lui altro merito, in ordine allo strumento, che di averlo applicato a veder distintamente gli oggetti grandi lontani, e i piccoli sotto gli occhi. Quest' uso fatto del Microscopio, ma più specialmente del Telescopio, è tanto noto, che il volgo stesso ne sa la storia, ma non sanno forse, nemmeno i più informati declamatori del grand' Uomo, quel che noi altrove accennammo, e che verrebbe ad accrescergli non poco questa parte del merito, che cioè egli applicò il Canocchiale anche agli usi della fotometria. Nella Lettera sul candore lunare apparisce una tale applicazion manifesta, ma in quegli ultimi anni della sua vita descriveva Galileo stesso al Viviani la composizione del Fotometro più squisito, il primo concetto del quale può vedersi espresso in questa nota: « Drizzando due cannoni, uno verso la Luna quasi piena, e l' altro verso l' occidente, subito dopo il tramontar del Sole, e ricevendo sopra due carte il lume della Luna, e quello dell' aria prossima al corpo solare, si potrà vedere quanto il lume dell' aria si mostri più chiaro di quel della Luna, e, secondo che il Sole si andrà abbassando, s' incontreranno due lumi, della Luna e del crepuscolo, egualmente chiari » (MSS. Gal., P. III, T. X, fol. 75).

Non sempre però le questioni, che si agitavano per la mente di Galileo, erano intorno alle cose discorse ne' suoi propri libri, ma talvolta entravano nel campo altrui, come per esempio in quello del Gilberto, il pensier del quale, fecondo della scienza del secolo XIX, e secondo il quale le attrazioni elettriche e le magnetiche si riducevano al medesimo principio, sembrava una stoltezza al giudizio dello stesso Galileo. « Dicere quod attractio magnetis et electri sint principio simili, est idem ac dicere pinnam, dum a vento agitur, ab eodem moveri principio ac avis, dum proprio nisu volat » (ivi, P. V, T. IV, fol. 15).

Altre volte le proposte questioni non son risolute, cosicchè si rimangono allo stato di una semplice descrizione sperimentale, e Galileo perciò si contenta di osservare il semplice fatto, senza dirne le cause, perch' egli ancora non le comprende. Tali sarebbero per esempio quelle relative alla pressione ammosferica, e al vacuo lasciato dietro a sè nel muoversi i corpi velocissimamente in mezzo all' aria, nella notizia delle quali cause era riposta la scienza dei fatti seguenti: « Accostando un dito o mano alla fiamma o lume di candela o lucerna lateralmente, e distaccandola con velocità, la fiamma ancora con gran velocità ti vien dietro lambendo la mano » (ivi, fol. 28). Sia AB (fig. 78) sifone, e dalla bocca A mettasi tanta acqua, che empia la parte AC: poi, turando con un dito la bocca A, l' acqua AC non scorrerà mai nell' altra parte CB, in qualsivoglia modo io tenga il sifone, finchè io non levo il dito » (ivi, fol. 29).

A B C

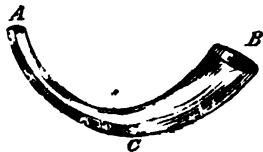



Figura 78.

Tali essendo, nella loro più variata varietà le materie da inserirsi nei Dialoghi nuovissimi, potrebbe sembrar difficile il comporle insieme in unità, ma era stata giusto da Galileo scelta una tale forma di colloquio, non solo per una imitazion platonica come si dice, ma principalmente perchè, come egli stesso scriveva in una lettera al Carcavy (Viviani, Scienza delle proporzioni cit., pag. 80), quella maniera dello scrivere in dialogo gli porgeva assai conveniente attacco, per inserirvi i pensieri, che via via gli cascavano in mente. L'artificio usato in tessere quella ghirlanda così varia, che è il primo dialogo delle Scienze nuove, de' fiori rinascenti via via, era quello stesso che doveva usarsi, in tessere questi ultimi dialoghi de' fiori rimasti sparsi per terra, cadutivi dal troppo colmo canestro. È anzi da osservar che son nate a questo modo quasi tutte le scritture di Galileo, le quali possono perciò dirsi una rapsodia de' pensieri, scritti sul primo foglio che capitavagli a mano, prima che altro occorresse ad attutarne quel subitaneo fervore. Di que' fogli sparsi si compongono infatti, per la massima parte, i manoscritti, che ci son rimasti di lui, da' quali ricopiava e puliva, e metteva in ordine i libri da stamparsi.

Che poi fosse questo modo di fare un abito contratto apparisce dal vederlo praticato a qualunque occasione, si trattasse di scienza o di rettorica; delle speculazioni della mente o delle deliberazioni dell'animo; della pellegrinità del concetto o della eleganza della forma. Occorrendogli, nelle continue controversie, di dover descrivere l'indole dei Peripatetici, aveva lavorato a parte, e teneva in serbo questa specie di apologo: « Sembrano i Peripatetici, verso Aristotile, quel vetturale, il quale, vedendo pendere la soma delle mercanzie mal compartite da una banda, corre a librarla con una grave pietra aggiunta dall'altra, quindi di poco, cominciando a declinare dal lato dove aggiunse il sasso, il qual di nuovo eccedendo in gravità, fa por nuove pietre all'incontro: nè trovando il poco giudizio del mulattiere il giusto equilibrio, finalmente, con l'aggiunger molti pesi sopra pesi, fa che il povero animale si fiacca le gambe, e resta sotto l'inegual soma oppresso. Meglio da principio cominciare a levar via della roba soverchia » (MSS. Gal., P. III, T. X, fol. 72).

Que' Teologi, i quali inopportunamente s'ingerivano della scienza umana, pensava Galileo che si potevano pungere con questo discorso: « Ancorchè i sacri Teologi siano quelli, che intendono meglio come camminano i moti del Sole e delle altre stelle, che non lo sanno gli Astronomi; tuttavia, per regolare i tempi della Pasqua e delle altre feste mobili, ricorrono, anzi si rimettono agli Astronomi. Ma perchè non regolarsi con la loro sopraeminente intelligenza? » (ivi, P. V, T. IV, fol. 15). Altri di così fatti aculei teneva preparati, in ripensare alle irragionevolezze degli aristotelici, e alle loro contradizioni. « Gli avversari tassano me, per avere scritto contro ad autore non inteso da me: eppure essi medesimi cascano in questo medesimo errore, mentre contradicono a me, e tanto più gravemente, quanto è dubbio se sia vero che io non abbia inteso Aristotile. E non so, se lui fosse vivo, se ei mi ne-

gasse le mie interpetrazioni. Ma io che vivo dico bene di non essere stato inteso. Se poi per mia colpa o di loro, questo non determinerò io. Potriano forse dire non mi avere inteso, perchè non metteva conto a porre studio nelle cose mie, ed affaticarvisi come in quelle di Aristotile, ma io gli risponderò che, se non metteva conto lo studiare le cose mie, meno metteva conto l'impugnarle » (ivi, P. III, T. X, fol. 75).

All'ufficio poi di diffondere le verità della scienza, senza curarsi de' suoi contradittori, si sentiva Galileo generosamente eccitato da questo pensiero: « Se io doverò leggere in Studio, piccolo frutto si caverà dalle mie fatiche, occupandomi con pochi in cose minime. Ma se io scriverò al mondo tutto, maggior gloria a me, et utilità a quello arrecherò » (ivi, P. III, T. III, fol. 35). E mentre il Carcavy era per metter mano alla stampa di tutte le opere sue (Viviani, Scienza delle proporz. cit., pag. 81), voleva s'imprimesse sul frontespizio queste parole, benchè nessun altro poi de' successivi editori leggesse o intendesse, o comunque sia mettesse in esecuzione il testamento: « *Da porsi nel titolo del libro di tutte le Opere:* Di qui si comprenderà in infiniti esempi qual sia l'utilità delle Matematiche in concludere circa alle proposizioni naturali, e quanto sia impossibile il poter bene filosofare, senza la scorta della Geometria, conforme al vero pronunciato di Platone » (ivi, P. III, T. III, fol. 63 a tergo).

III.

Oltre ai Problemi fisici, scriveva Galileo al Carcavy di averne a portare in dialogo dei matematici. Ora, a questo annunzio, furono le nostre diligenze rivolte a cercar quali fossero, e dove potessero ritrovarsi i nuovi materiali dispersi, e rimasti fuori di luogo nelle altre costruzioni. In mezzo a tali sollecitudini ci venne fatto di fermar l'attenzione sul quarto tomo della parte V dei manoscritti galileiani, dove ricorrono qua e là, interpolati da note di argomento diverso, teoremi e problemi di Geometria, i quali, benchè tutti elementarissimi, ci parve nulladimeno che dalla novità, e più che altro dalla fama dell'Autore, partecipassero qualche importanza. Non son più che quindici o sedici, ed essendo scritti dal Viviani, in quella sua ben distinta calligrafia giovanile, possiamo ragionevolmente credere che gli fossero dettati da Galileo, quando cieco era costretto di rappresentarsi nella mobilità delle immagini le figure illustrative. Sarebbero di ciò indizio le dimostrazioni spesso spesso confuse e qualche volta sbagliate, che ci occorreranno a notare, ma intanto si pensava fra noi che di simili teoremi ne doveva essere rimasti addietro parecchi altri, e forse di maggiore importanza, occorsi allo stesso Galileo, mentre cercava i lemmi geometrici alle sue laboriose dimostrazioni delle resistenze dei solidi, e dei moti locali. Qualche esempio, in cui ci abbattemmo nell'ordinare i libri dei moti accelerati, avvalorava quelle nostre congetture,

dalle quali poi ne conseguì la raccolta de' teoremi di Algebra e di Geometria, che daremo, come parte principalissima di quelle cose matematiche, che Galileo intendeva di ridurre in dialogo, affinchè non si dovessero, con detrimento della sua gloria e della utilità degli studiosi, rimaner nell'oblio.

Essendo le nuove questioni però molto più spezzate delle fisiche e delle meccaniche, pareva assai più difficile a ridurle in unità di composizione: e mentre si pensava fra noi che, a superare la difficoltà avrebbe Galileo forse usato il medesimo artifizio, che nella seconda, nella terza e nella quarta giornata delle Scienze nuove, introducendo cioè il Salviati, che sopra alcuni fogli dell'Accademico legge al Sagredo e a Simplicio le varie proposizioni, attenenti a que' matematici soggetti; vedemmo l'opinione ridursi quasi a certezza da un frammento di scrittura, ritrovata da noi in certe carte tanto informi e disordinate, ne' margini e addentro così corrose e macere dalla muffa, che il Bonaventuri non seppe cavarci alcun costrutto, benchè il Panzanini l'assicurasse esser quelle tutte robe galileiane, scritte da suo zio Vincenzio Viviani. Sopr' una di quelle pagine, dove si può in qualche modo incominciare a leggerla, o diciam meglio a intenderne il significato, è scritto:

« SIMPLICIO. — Io non ho altra notizia di Geometria, da quella in fuori che imparai essendo giovane studente sopra i libri degli Elementi di Euclide, per cui temo che le cose scritte in cotesto libriccino dell'Accademico, e che voi, signor Salviati, volete leggerci, mi siano per riuscire di troppo difficile intelligenza. »

« SALVIATI. — Non dubitate, signor Simplicio, di averci a trovare maggiore oscurità, che nelle dimostrazioni e discorsi intorno ai moti locali: e se voi avete bene a mente Euclide vi basta, perchè possiate gustare il dolce di queste vivande rimaste indietro alla mensa, come l'Accademico stesso si esprimeva, imbandita dai Matematici antichi nei loro trattati. Se qualche cosa de' principii elementari vi fosse caduta col tempo dalla memoria, non mancherà di ridurvela la destrezza del signor Sagredo, che, per grande desiderio di penetrare addentro ai teoremi dimostrati dal nostro Amico, s' è reso familiari i libri, non d' Euclide solo, ma di Archimede, di Apollonio e di Pappo. »

La nostra Storia fa riflettere così la sua luce sopra questo frammento, da non si dubitare ch' egli propriamente non appartenesse a quel dialogo, in cui Galileo intendeva di ridurre i Problemi matematici, e si può intendere, da quel che ivi si dice, che nella raccolta matematica fatta dal Viviani a dettatura in Arcetri, ora mancano le dimostrazioni e le soluzioni, e ora vi sono semplicemente accennate, perchè il Sagredo v'avrebbe poi supplito, nell' atto di farne a Simplicio la spiegazione. A noi però non riman dell' opera che i materiali sparsi, ma preparati dall' Autore stesso per costruirla: ond' è che, non potendo consolar d' altro i Lettori, porremo sotto ai loro occhi que' materiali stessi, de' quali faremo primi i teoremi di Geometria raccolti dal Viviani. Essendo nel manoscritto sopra indicato messi alla rinfusa, per non aver gli uni dipendenza alcuna dagli altri, non si potrebbero annoverar con altr' or-

dine, da quello assiomatico in fuori, cominciando cioè dalle linee, per passare alle superficie, e di lì ai solidi. Così dunque faremo, non dimenticando che l' ufficio nostro è di storici, no di editori, e le dimostrazioni si aggiungono, o si dichiarano in forma di note, non perchè crediamo che, in cose tanto elementari, i Lettori ne abbiano bisogno, ma per dar qualche idea della parte che, rappresentandosi il Dramma, Galileo avrebbe affidata al Sagredo.

« PROPOSITIO I, THEOREMA I. — *In linea AF* (fig. 79) *moveantur duo mobilia A, B, unumquodque ubique velociter: A vero moveatur velocius quam B, et quam rationem habet velocitas A, ad velocitatem B, hanc habeat AC linea ad CB. Dico eodem tempore puncta A, B, si moveantur versus C, punctum C consecutura esse.* »

Figura 79.

« Nisi enim A, B non convenerint in C, convenient primo, si potest fieri, infra, in E. Et quia velocitates sunt inter se ut spatia, per quae eodem temporis intervallo moventur mobilia; ergo velocitas A, ad velocitatem B, erit ut spatium AE ad spatium BE. Erat autem et ut AC ad CB, quod est impossibile. »

« Similiter ostendetur quod neque supra numquam convenient. »

« Sed melius: Si quando A pervenerit in C, B non eo pervenit, aut supra aut infra perveniet, ut in E, aut F. Eodem ergo tempore, quo A transivit spatium AC, B transivit BE, aut BF: ergo velocitates.... ergo A, B convenient in C » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 22).

Nel luogo, corrispondente a quello da noi punteggiato, il margine è corroso, ma non è difficile il supplire alle parole ivi scritte, che dovevano esser queste o simili: *erunt ut AC ad BE, vel BF, contra propositum,* cosicchè nella sua integrità la conclusione sarebbe tale: « ergo velocitates erunt ut AC ad BE, vel BF, contra propositum: ergo A, B convenient in C. »

Il teorema si potrebbe dire un corollario, o forse meglio una trasformazione del II° Dei moti equabili (Alb. XIII, 151), sicchè partecipa del meccanico, come ne partecipa il seguente, a cui si riferiscono queste notizie: In una lettera del dì 6 Febbraio 1635 così il Cavalieri mandava a dire a Galileo da Bologna: « Io scrissi già in una mia a V. S. E. un quesito meccanico, ma perchè non me ne dice cosa alcuna, temo che la lettera non si sia smarrita. Il quesito era questo: Data una ruota volubile intorno al suo asse, trovar modo di moverla con un' altra ruota, pur volubile intorno al proprio asse, in tal maniera che, perseverando la medesima velocità della ruota movente, la ruota mossa vada sempre crescendo di velocità. Io pensai che ciò non potesse farsi con le ruote solite dentate, nè con le funi avvoltele intorno, camminando ambedue con pari velocità, ed anco con pari circolazioni, quando sono di diametro uguale: ovvero con pari velocità e con dispari circolazioni, cioè conforme alla reciproca proporzione de' diametri, quando questi sono diseguali. E perciò venni in questo parere che bisognasse

fare una cosa tale, quale fanno qua a Bologna in particolare questi, che trafilano l'argento falso » (Campori, Carteggio gal., Modena 1881, pag. 430).

Galileo, per rispondere al quesito, preparò una serie di proposizioni relative al moto delle ruote, mosse da altre ruote, e delle quali non ci è rimasto memoria che della seguente, annunziata già dallo stesso Cavalieri:

« PROPOSITIO II, THEOREMA II. — *Le circonferenze di due ruote disuguali, che girino, vanno con la medesima velocità, quando le circolazioni hanno reciproca proporzione dei diametri* » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 29.

Il teorema, a cui manca la dimostrazione, può formularsi più chiaramente così: *Due ruote di differente raggio vanno ugualmente veloci, quando i numeri dei giri, fatti dall' una e dall' altra nel medesimo tempo, son reciprocamente proporzionali alle lunghezze dei raggi.* Le velocità saranno uguali, quando ne' medesimi tempi gli spazi sono uguali. Ora, chiamati R, r i raggi della ruota maggiore e della minore, gli spazi percorsi nelle loro circolazioni sono $2\pi R$, $2\pi r$. Sia N il numero, per cui, moltiplicato $2\pi r$, si rende uguale a $2\pi R$: avremo $1 : N = r : R$. Ma se uno è il numero dei giri della ruota maggiore, N rappresenta il numero de' giri della minore, dunque è vero il teorema.

La prima proposizione di Geometria pura, da ordinarsi fra quelle raccolte dal Viviani, è tale: Sia il triangolo BAC (fig. 80), la base BC del quale intendasi prolungata indefinitivamente verso K. Si tirino dal vertice A le linee AF, AK, in modo che, de' triangoli, i quali vengono esse a formare col lato AC, e con le intersezioni del prolungamento della base BC, il primo sia uguale, il secondo doppio, il terzo triplo ecc. del triangolo BAC. Se dal mezzo di BC, qual sia D, si conduce una parallela all' AB e si prolunga, prima fino a incontrare il lato AF in G, poi il lato AK in H, e via via gli altri nei punti conseguenti O, P, ecc.; dimostra Galileo che $DE : EG = 2 : 1$; $DE : EH = 3 : 2$; $DE : EO = 4 : 3$; $DE : EP = 5 : 4$, e così sempre: ossia, secondo il linguaggio antico, che DE ad EG, ad HE, ad EO, ad EP, ecc., sta in ragion dupla, sesquialtera, sesquiterza, sesquiquarta, ecc.

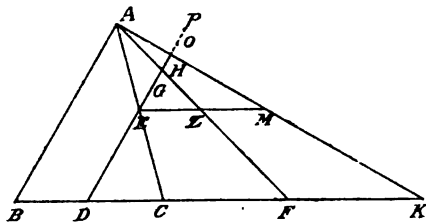



Figura 80.

« PROPOSITIO III, THEOREMA III. — *Sit triangulum ABC, cuius latus BC infinite extensum ad K: sectaque BC bifariam in puncto D, ducatur DH aequidistans BA, et constituatur FAC triangulum aequale CAB, cuius latus AF secet DH in G. Dico lineam DE duplam esse lineae EG.* »

« Ducatur EL aequidistans BF: et quia DE aequidistat BA, estque BD aequalis DC; erit CE aequalis EA. Sed aequidistat EL ipsi BF, ergo FL aequatur LA, estque triangulum ALE simile triangulo AFC. Ergo AEL est quarta pars ipsius ACF et eamdem ob causam EDC erit quarta pars BAC,

et positum est BCA aequale ACF. Ergo AEL aequatur DEC. Et quia est ut FB ad BD ita FA ad AG; erit AG quarta pars ipsius AF et LA dupla AG. Quare triangulum LAE hoc est DEC, duplum trianguli AEG. Et est CD linea aequalis BD; ergo DE est dupla EG. »

« Sed, si constituamus triangulum KAC duplum trianguli BAC, dico lineam DE sesquialteram esse ipsius EH, quod simili modo ostendetur. Producta enim EM aequidistans BK, quia AEM est quarta pars KAC, et EDC quarta pars CAB, estque ACK duplum BCA; erit MEA duplum DCE, et triplum AEH, cum sit AH sexta pars ipsius AK, et tertia dimidiae AM. Ergo DCE, cum sit dimidium triplae AEH, erit ipsius AEH sesquialter: hoc est DE sesquialtera EH. »

« Similiter, si ponamus triangulum triplum BAC, erit DE sesquitertia lineae consequentis: et, si quadruplum, sesquiquarta: et, si quintuplum, sesquiquinta, et sic in infinitum. »

« Oppositum huius theorematis facile, per reductionem ad impossibile, ostendetur » (ibid., fol. 21).

« PROPOSITIO IV, THEOREMA IV. — *Dato il triangolo ABC* (fig. 81), *siano divisi i due lati AB, AC per mezzo, nei punti E, D: e dagli angoli C, B tirinsi le linee CE, BD, e dal punto A la linea AGF. Dico che la BC è divisa per mezzo, e che le parti GF, GE, GD, ciascuna di loro, sono la metà dei loro rimanenti pezzi* » (ivi, fol. 28).

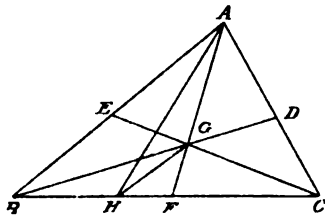



Figura 81.

Questa proposizione è facile veder come sia quella stessa, comunemente applicata dai Matematici, per dimostrare dove stia il centro della gravità nel triangolo, e Galileo la rende puramente geometrica, e così dimostra le relazioni, che passano fra le linee e fra le superficie, astraendo dal peso. La dimostrazione però non è bella, come quasi sempre riescon quelle condotte dagli assurdi, ed è a notare, per renderla più chiara, come s' usa le prime due volte la parola *trapezio*, per indicar quello, che propriamente è un *quadrilatero.*

« Della linea divisa in mezzo, così si dimostra: Poichè, se non è divisa pel mezzo, dividasi nel punto H, e giungasi AH. E perchè il triangolo BDA è la metà di tutto, ed ancora il triangolo CEA è la metà di tutto; lascisi il comun trapezio EGDA: rimarranno i due triangoli EGB, CDG uguali tra loro, ed uguali saranno tutt' a quattro i triangoli EGB, DGC, AGE, DGA, e i triangoli AGC, AGB uguali. Giungasi GH: il trapezio AGHC è uguale al trapezio ABHG, cioè la metà di tutto il triangolo. Ma ancora il triangolo AHC è la metà di tutto, adunque il maggiore al minore sarà uguale. È dunque la BC divisa in mezzo nel punto F, e però il triangolo BGC eguale a ciascuno dei triangoli BGA, CGA, e le loro metà uguali ancora tra di loro, e due di loro metà doppie di una: cioè il triangolo AGB doppio del triangolo GBF: cioè la linea AG doppia della GF » (ivi).

« Propositio V, Problema I. — *Proponitur linea AB* (fig. 82), *in C secta, cui perpendicularis est DB: circulum possumus describere transeuntem per signa A, C, et ipsam DB tangentem.* »

« Dividatur AC bifariam in E, a quo erecta perpendicularis EF, media proportionalis inter AB, BC, et ab F super DB perpendicularis FG ducatur. Dico, facto centro F, intervallo FG, esse petitum » (ivi, fol. 25).

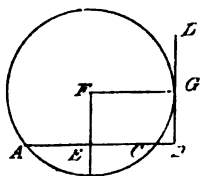



Figura 82.

La proposta soluzione sarà vera, quando prima di tutto s' avrà dimostrato che AF, FC, FG sono uguali, e poi che alla BG competono le proprietà delle tangenti al cerchio. Quanto alla prima parte, la verità resulta dalla seguente serie di equazioni: $FC^2 = EF^2 + EC^2 = EF^2 + (EB - CB)^2 = EF^2 + EB^2 - 2\,EB\,.\,CB + CB^2 = AB\,.\,BC + EB^2 - 2\,EB\,.\,CB + CB^2 = BC\,(AB + CB - 2\,EB) + EB^2$. Ma le quantità dentro parentesi sono zero, dunque $FC^2 = EB^2$, e perciò $FC = EB = FG$. La verità della seconda parte della soluzion del problema galileiano si rende manifesta dall' essere GB uguale alla FE, la quale per supposizione è media fra la secante AB, e la sua parte esterna CB, e perciò, per la XXXVI del terzo di Euclide, competono alla BG le proprietà delle tangenti il cerchio.

« Propositio VI, Theorema V. — *Sit sector ABDC* (fig. 83) *bifariam sectus in D: iunctis AD, BC constat sectorem aequari rectangulo contento sub AD et arcu BD; triangulum vero ABC aequatur rectangulo BEA. Ergo, si ponatur arcus BF aequalis rectae BE, circuli portio BDC aequabitur contento sub AE, DF, et contento sub BD, ED* » (ibid., fol. 25).

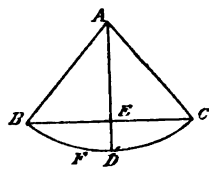
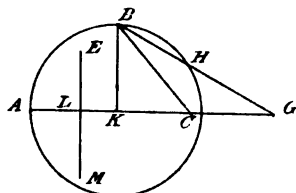



Figura 83.

Abbiamo infatti $BDC = AB\,.\,BD - BE\,.\,AE = (AE + ED)\,BD - BE\,.\,AE = AE\,.\,BD + ED\,.\,BD - BE\,.\,AE = AE\,(BD - BE) + ED\,.\,BD$. Ond' è che, posto $BE = BF$, ed essendo $BD - BF = DF$, si trova esser vero che BDC è uguale ad $AE\,.\,DF + ED\,.\,BD$.

Accennammo che queste proposizioni geometriche furono dimostrate da Galileo all' occasione o di studiare nei matematici antichi, o di dimostrare i varii lemmi per la sua Meccanica, di che abbiamo intanto un esempio nel seguente problema, nato in mezzo alle ricerche del primo lemma, preparato in servigio della XXXVI proposizione, scritta nel terzo Dialogo delle Scienze Nuove.

Figura 84.

« Propositio VII, Problema II. — *Applicare dalla cima B* (fig. 84) *del semicircolo ABC una linea, come BHG, sicchè la HG sia uguale alla data LE.* »

« Perchè, giunta KC, sarà BC lato del quadrato inscritto nel cerchio, applichisi alla linea LE un rettangolo eguale al quadrato BC, che ecceda d' una figura quadrata, e sia questo EML. E perchè il rettangolo EML è uguale al quadrato BC,

sarà ML minore di BC. Si tiri dal punto B la BH eguale alla ML, e prolunghisi insino in G: dico, ecc. » (ivi).

È stato fatto $EM \cdot ML = BC^2$, e per il detto lemma alla proposizione XXXVI (Alb. XIII, 214) anche $BG \cdot BH = BC^2$. Dunque $EM \cdot ML = BG \cdot BH$. Ed essendo $BH = ML$ per costruzione, sarà $EM = BG$ e perciò $HG = LE$.

« Propositio VIII, Theorema VI. — *Exagonus circumscriptus exagoni inscripti est sesquitertius.* »

« Trigonus circulo circumscriptus duplus est exagoni inscripti: circumscripti vero est sesquialterus; quare exagonus circumscriptus exagoni inscripti est sesquitertius » (ibid., fol. 25).

Chiamato C l'esagono circoscritto, I l'inscritto, e T il trigono, le due equazioni $T = 2I$, $T = (1 + 1/2)\,C$ danno $C : I = 4 : 3$.

« Propositio IX, Theorema VII. — *Quodratum circulo circumscriptum, ad circulum, minorem habet rationem quam circulus ad quadratum inscriptum.* »

« Patet, nam circumscriptum latus ad latus inscripti est, ut latus inscripti ad semidiametrum. Sed quarta pars circumferentiae est maior latere quadrati inscripti, ergo latus circumscripti, ad quartam partem peripheriae, minorem habet proportionem quam quarta pars circumferentiae, ad latus inscripti. Est autem ut latus circumscripti, ad quartam partem peripheriae, ita circumscriptum quadratum ad circulum. Ut autem quarta pars peripheriae, ad latus inscripti, ita circulus ad inscriptum, ergo circumscriptum, ad circulum, minorem habet rationem, quam circulus ad inscriptum » (ibid., fol. 28).

Essendo il quadrato circoscritto doppio all'inscritto, ossia (fig. 85) $CD^2 = 2\,AB^2$, avremo $CD^2 : AB^2 = 2 : 1 = 2\,AO^2 : AO^2 = AB^2 : AO^2$; onde $\frac{CD}{AB} = \frac{AB}{AO}$. Chiamata $C^a \cdot AB$ l'arco, sarà questa maggiore dell'AB corda e perciò $\frac{CD}{C^a \cdot AB} < \frac{AB}{AO}$. Di qui si potrebbe concluderne

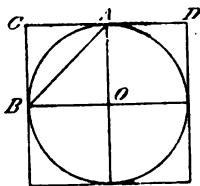



Figura 85.

$\frac{CD}{C^a \cdot AB} < \frac{C^a \cdot AB}{AO}$, ma non si vede la ragione di quell'altra disuguaglianza conclusa da Galileo $\frac{CD}{C^a \cdot AB} < \frac{C^a \cdot AB}{AB}$, e ch'egli stesso mette sotto questa forma: *Ergo latus circumscripti, ad quartam partem periferiae, minorem habet proportionem quam quarta pars circumferentiae, ad latus inscripti.*

Essendo inoltre $CD : \frac{\pi \cdot AO}{2} = CD^2 : \frac{\pi \cdot AO \cdot CD}{2} = CD^2 : \pi \cdot AO^2$, è perciò verissimo che *ut latus circumscripti ad quartam partem periferiae, ita circumscriptum quadratum ad circulum,* ma che poi *ut quarta pars periferiae, ad latus inscripti, ita circulus ad inscriptum,* non ci è riu-

scito dimostrarlo: non ci è riuscito di dimostrare cioè come $\frac{\pi \cdot AO}{2} : AB = \pi \cdot AO^2 : AB^2$, perchè essendo $\frac{\pi \cdot AO}{2} : AB = \frac{\pi \cdot AO \cdot AB}{2} : AB^2$ bisognerebbe che fosse $\frac{AB}{2} = AO$.

Qualcuno, accecato nella mente da quel bagliore di luce, di che la fama ha circondato il nome di Galileo, o, come altrimenti si potrebbe dire, perduto il senno, non avrà forse difficoltà ad ammettere, persuaso dell' infallibile magistero dell' Uomo divino, che la metà del lato del quadrato inscritto nel circolo sia uguale al raggio. Ma noi che siamo avvezzi oramai a farci colle mani il solecchio, e che possiamo perciò vedere distintamente nella spera luminosa ogni macchia, crediamo che una di queste fra le più nere consista nell' essersi per isbaglio attribuito alle linee quel ch' è proprio dei soli quadrati, essendo veramente il quadrato del raggio uguale alla metà del quadrato inscritto.

Che Galileo abbia veramente commessi sbagli, nelle più sottili questioni della Meccanica, è stato, nella nuova Storia, dimostrato con tanti esempi, da doverne rimanere oramai persuaso ognuno, che non abbia ereditata la caparbietà, o, per più vero dire, la dissennatezza dei peripatetici antichi. Ma che il grand' Uomo abbia sbagliato, anche in cose riguardanti la Geometria più elementare, viene ora l' occasione di mostrarlo a coloro, i quali fossero rimasti o irritati o incerti intorno al giudizio, che del Nostro pronunziava il Cartesio. A noi non riesce d' attribuir la sentenza del Filosofo francese, che diceva esser Galileo poco versato nella Geometria, a rivalità o ad invidia, dietro i fatti, che abbiamo a rivelare.

Troviamo che talvolta lo sbaglio è subito riconosciuto, come per esempio in questa proposizione, la quale, non appena Galileo ha pronunziata, che subito la condanna di falsa. « Sit triangulum rectangulum ABC (figura 86), et AB sit aequalis BC, et secetur bifariam AC in D, et connectatur BD, sitque AI ipsi CB parallela, positaque AE, ipsi AB aequalis, erunt CA, AE, AD continue proportionales. Secetur CB bifariam in F, et connectatur EF. Dico quod, si protrahatur quaelibet linea, ex puncto C ad lineam AI, ut puta CGHI, esse proportionales CI, IG, IH. » Ma subito la stessa mano di Galileo, che aveva scritto, soggiunge: *falsa est.* (MSS. Gal., P. V, T. II, fol. 176).

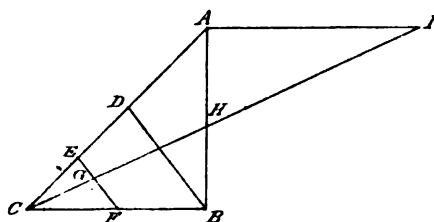



Figura 86.

Talvolta però si trova che, caduto Galileo in errori ancora più patenti di questo, vi persiste lungamente, senza poter risorgere a proseguire il cammino. Riuscirebbe la cosa incredibile a noi stessi, se non ne avessimo il documento certissimo nelle carte, non dettate al Viviani, all' Am-

brogetti o ad altri, ma scritte dalla propria mano dell' Autore, con caratteri così scolpiti, da non valer per scusa il non essersi potuto aiutare dei segni figurativi.

Nel quarto teorema degli Elementi Euclide si propone di dimostrare che, se una linea retta sia comunque segata in due, il quadrato di tutta sarà uguale ai quadrati delle parti, e al rettangolo contenuto due volte dalle dette parti. Galileo, volendo per suo studio confrontare questa proposizione coi numeri, ne traeva un corollario tanto falso, che della falsità si avvedrebbe qualunque scolaretto, a cui si dicesse che la somma de' quadrati delle parti è uguale al doppio del rettangolo contenuto sopra esse parti. La cosa, ripetiamo, ci sembrerebbe incredibile, se non avessimo sotto gli occhi il foglio, sopra il quale la stessa mano propria di Galileo scrisse queste parole:

« Quando si domanda che proportione habbia il minor numero col maggiore, si dice un *sub*, come 7 a 3, *dupla sesquitertia*. Domandato di 3 a 7, si chiamerà *subdupla sesquitertia.* »

« Per confrontar con i numeri le proportioni del 2° Libro, come della quarta, si fa a questo modo. Sia una linea retta, 8 palmi per es., segata in qualsivoglia modo: v. g. che una parte sia 5, e l' altra sia 3. I quadrati della linea che è 5, e di quella che è 3 sono uguali alli rettangoli contenuti due volte dalle dette linee, cioè da 5 e 3, e si fa in questa maniera: si raddoppiano i numeri di questi quadrati in sè stessi, come 5 via 5 fa 25, e 3 via 3 nove: 25 e 9 fa 34. Così ha da tornare raddoppiandonelo » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 27).

Chi crederebbe che Galileo fosse stato capace di scrivere e d' insegnare sul serio che, raddoppiando il cinque via tre deve tornar trentaquattro, come conferma del nuovo corollario da soggiungersi dopo la IV del secondo di Euclide in questa maniera: La somma dei quadrati delle due parti, in cui sia segata una linea, o diviso un numero, è uguale al doppio del rettangolo contenuto, o del prodotto formato dalle dette parti? Che il non tornare il conto del cinque via tre più cinque via tre uguale a 34, non fosse bastante a persuadere quella mente divina, che il corollario era falso, resulta dal vederlo applicato, come una verità approvatissima in Geometria, a un frammento di proposizione, scritto in quel carattere così scolpito, che rivela lo stato della più valida virilità di Galileo.

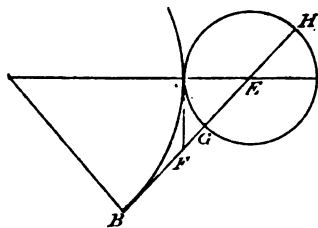



Figura 87.

Riferendosi alla nostra figura 87, quel frammento è tale: « □ *bg* aequatur □is *bf . fg* et 2 ▭ *bfg* . pro □ *bf* sumatur ▭ *hfg*, erit □ *bg* aequale duobus ▭ *bfg*, □o *bf* idest ▭o *hfg* cum □ *fg*, id autem idem est ac si dicas □ *bg* esse aequale 2 ▭ *bfg*, 2 ▭ *egf* et 2 □ *fg*. »

« ex □° *bg* demitur 2 ▭ *bfg* et 1 □ *gf*, remanet □ *bf* aequale 2 ▭ *egf* minus 1 □ *gf*, quod est ▭ *hfg* aequale □° *bf*.... » (MSS. Gal., P. V, T. II, a tergo del fol. 54).

Essendosi dunque concluso $BG^2 = 2\,BFG + 2\,EGF + 2\,FG^2$, fatta la indicata sottrazione, avremo $BG^2 - 2\,BFG - FG^2 = 2\,EGF + FG^2$, ossia $BF^2 = 2\,EGF + FG^2$. Dunque « quadratum BF aequale est duobus rectangulis EGF *plus*, et non *minus* uno quadrato GF » come dice rimaner dalla fatta sottrazione Galileo. Dall' altra parte, procedendo per le vie più spedite, se $BF^2 = HFG$, come si suppone, e se $HF = HG + FG = 2\,GE + FG$, abbiamo immediatamente $BF^2 = (2\,GE + FG)\,FG$, ossia $BF^2 = 2\,EGF + GF^2$, e non $2\,EGF - GF^2$. La radice del quale errore consiste nel persistere in ritener per vero che il quadrato di una delle parti sia uguale al doppio del rettangolo contenuto da ambedue, meno il quadrato dell' altra parte. Ciò poi rende credibile che, nella proposizione ultimamente trascritta, avendo Galileo sotto gli occhi un triangolo rettangolo isoscele, e preoccupato da quel che solamente è vero nel Teorema pitagorico, mettesse che l' ipotenusa è doppia o dell' uno o dell' altro uguale cateto. Fatta la qual digressione, per secondare il genio di coloro, che amano di giudicare gli uomini, non dall' esteriore apparenza, ma dai loro più intimi affetti e pensieri; liberi di noi stessi, riduciamoci in via.

« Propositio X, Theorema VIII. — *Si tres lineae fuerint proportionales, quadratum primae, ad circulum secundae, est ut periferia quadrati primae, ad periferiam circuli tertiae* » (MSS., Gal., P. V, T. IV, a tergo del fol. 23).

Siano le tre linee A, B, C: essendo per supposizione continue proporzionali abbiamo $B^2 = A\,.\,C$, o anche $AB^2 = A^2\,C$, d' onde $A^2 : B^2 = A : C$, ossia $A^2 : \frac{\pi\,B^2}{4} = 4\,A : \pi\,C$. Ma $\frac{\pi\,B^2}{4}$ esprime il circolo che ha per diametro B, $4\,A$ il perimetro del quadrato A, $\pi\,C$ la periferia del circolo, che ha per diametro C, *unde patet propositum.*

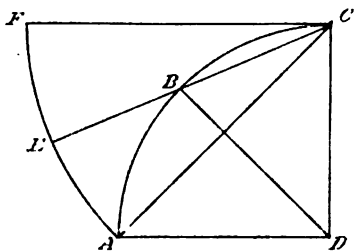



Figura 88.

In mezzo allo studio della mirabile generazione delle spirali occorse a Galileo un nuovo teorema di Geometria, di cui ora diremo la qualità e il modo dell' invenzione. Sia il quadrante ABCD (fig. 88), e tirata la CF parallela ad AD, fatto centro in C, e col raggio AC, descrivasi il settore ACF, che è facile vedere come sia uguale allo stesso quadrante, essendo questo misurato da $\frac{\pi\,AD^2}{4}$, e quello da $\frac{\pi\,AC^2}{8}$ e $AC^2 = 2\,AD^2$. Condotta poi la secante CB, e prolungata infino a incontrare in E l' arco del settore AF, si serve Pappo alessandrino di questa

costruzione, nel problema VII del IV libro delle sue *Collezioni,* per dimostrare la proporzionalità, che passa fra la quarta parte del circolo massimo della sfera, e la porzion di spirale in essa sfera descrittta. Studiando ora Galileo nel libro del Matematico antico, coi commenti del Commandino, ebbe a fare un'osservazione, sfuggita a quello stesso eruditissimo commentatore, qual' è che il quadrante sta all' arco del settore come la porzione BC di quello, intersecata, sta alla porzione FE di questo, terminata dal prolungamento in E della stessa linea BC intersecante.

Abbiamo infatti, condotta la DB, e intendendo dire degli angoli, ADC = ADB + BDC, FCA = ECA + ECF: e pure 2 FCA = 2 ECA + 2 ECF. Ma ADC = 2 DAC = 2 FCA, per essere il triangolo ADC isoscele, ed FC parallela ad AD; dunque ADB + BDC = 2 ECA + 2 ECF. Ma ADB = 2 ECA, per la XX^a del terzo di Euclide, dunque BDC = 2 ECF. Le due equazioni perciò danno ADC : BDC = FCA : ECF, e permutando ADC : FCA = BDC : ECF. E perchè gli angoli stanno come gli archi compresi, ABC : AEF = BC : EF, come conclude Galileo dal suo proprio discorso in questo modo:

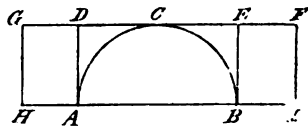
« PROPOSITIO XI, THEOREMA IX. — *Sit quadrans ACD, ipsi vero DC perpendicularis CF, et centro C, spatio CA, describatur circumferentia AEF, et ducatur contingenter recta EC. Dico quam rationem habet AF ad FE, hanc habere ABC ad BC.* »

« Jungatur BD: et quia angulus ADC duplus est anguli ACF, angulus vero ADB duplus est anguli ACB; erit reliquus BDC reliquo ECF itidem duplus. Quare ADC angulus, ad angulum ACF, erit ut BDC angulus ad angulum ECF. Et permutando ut angulus ADC, ad angulum BDC, hoc est, ut periferia ABC ad CB periferiam; ita angulus ACF ad angulum ECF: hoc est periferia AEF ad periferiam EF. Hanc demonstrationem non novit Comandinus in XXX^a quarti Pappi » (MSS. Gal., P. V, T. IV, a tergo del fol. 25).

« PROPOSITIO XII, THEOREMA X. — *Venduntur quaedam cartae cosmograficae ex pluribus triangulis, quibus abscissis, possunt ipsae sphaeris adaptari. Trianguli vero abscissi, ad id quod reliquum est, eam habent proportionem, quam habet sphaerae diameter ad excessum, quo dimidia circumferentia circuli maximi excedit dictam diametrum.* »

« Nam cylindri circa sphaeram superficies, exceptis basibus, aequatur superficiei sphaerae. Dicta autem carta est superficies cylindri, circa sphaeram, habentis altitudinem aequalem dimidio sphaerae circumferentiae. Quod, si haberet altitudinem aequalem sphaerae diametro, aequaretur illius superficiei. Ex quo patet quod dicta carta excedit sphaerae superficiem secundum proportionem, quam habet dimidia circumferentia ad diametrum » (ibid., fol. 24).

Figura 89.

Sia ACB (fig. 89) la mezza circonferenza, DE uguale al diametro, e GF uguale in rettitudine alla stessa mezza circonferenza. Rivolgendosi la figura tutt' intorno all' asse HI, il mezzo cerchio descriverà una sfera, il rettangolo DB un cilindro, l' esterna

superficie S del quale uguaglierà quella della sfera, o dei triangoli ascissi. Il rettangolo GI poi genererà un cilindro, la superficie esterna del quale, che chiameremo S', sarà uguale alla superficie della carta, e avremo $S' = 2\pi . EB . GF$, $S = 2\pi EB . AB$, d'onde $\frac{S'}{S} = \frac{GF}{AB}$, che vuol dire appunto che la carta eccede la superficie della sfera secondo la proporzione della mezza circonferenza al diametro.

« Propositio XIII, Theorema XI. — *Cuiuscumque cylindri superficies, exceptis basibus, sive cum basibus, minor est quam dupla superficiei coni in ipso descripti, excepta, sive cum base. E contra vero quorumdam conorum in cylindris inscriptorum superficies, excepta base, maior est quam dupla superficiei cylindri, exceptis basibus* » (ibid.).

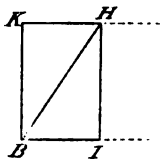



Figura 90.

La prima parte della proposizione si dimostra facilmente vera dal considerare il cilindro generato dal rettangolo KI (fig. 90), e il cono dal triangolo BIH, mentre ambedue le figure si rivolgono attorno al loro comune asse HI. Imperocchè, chiamata S l'esterna superficie di quel solido, S' l'esterna superficie di questo, non comprese le basi, abbiamo $S = 2\pi BI . KB$, $S' = \pi BI . BH$, d'onde $\frac{S}{S'} = \frac{2 KB}{BH}$, che, per essere $\frac{KB}{BH}$ un rotto proprio, sarà necessariamente minore di due. Comprese poi le basi, sarà $S = 2\pi BI . KB + 2\pi BI^2 = 2\pi BI (KB + BI)$; $S' = \pi BI . BH + \pi BI^2 = \pi BI (HB + BI)$, onde $\frac{S}{S'} = \frac{2(KB + BI)}{HB + BI}$, che è pure minore di due, per la medesima ragione di dianzi, per essere cioè il due moltiplicato per un rotto proprio.

Anche nell'altra sua parte apparisce vero il proposto teorema, perchè essendo $\frac{S'}{S} = \frac{BH}{2 KB}$, se $BH = 2 KB$, le superficie sono uguali. Se $BH = 4 KB$, la superficie del cono è doppia di quella del cilindro: se poi BH è maggiore di 4 KB, i coni inscritti hanno tutti superficie maggior del doppio di quelle dei cilindri circoscritti.

« Propositio XIV, Theorema XII. — *A data sphaera, segmento plano secto, ita ut segmentum ad conum basim habentem eamdem cum segmento et aequalem altitudinem, datam rationem habeat; dico datam illam rationem debere esse necessario sesquialtera maiorem.* »

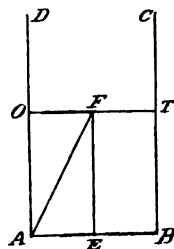
Così Galileo intendeva di riformare la VII archimedea, problema VI del secondo libro *De sphaera et cylindro,* secondo ciò che leggesi nella seguente nota manoscritta: « Ex resolutione VI problematis secundi Archimedis *De sphaera et cylindro,* patet quamlibet sphaerae portionem maiorem esse quam sesquialteram coni in ipsa descripti » (ibid., fol. 24).

« Propositio XV, Problema III. — *Ex cylindro recto, ex altera parte indeterminato, possumus partem sic abscindere, ut illius superficies, exceptis*

basibus, ad superficiem coni in ipso descripti, excepta base, datam habeat proportionem: oportet autem datam proportionem minorem esse quam duplam. »

« Sit cylindrus interminatus ABCD (fig. 91), axis EF; data proportio K ad HG, minor quam dupla. Ponatur HI aequalis HG, et ex puncto A ducatur AF, secans axem in F, et abscindens partem FE, ad quam habeat proportionem eamdem, quam GI ad K, et per F aequidistans ducatur FOT. Dico cylindrum AOTB esse petitum. »

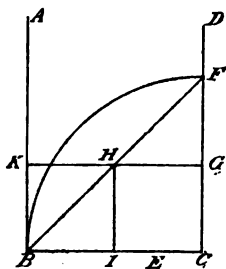
Figura 91.

« Quod enim fit ex AO in AB, et id quod fit ex dimidio FA in AB, est ut OA ad dimidium FA. Verum quod fit ex dimidia FA in AB aequatur ei, quod fit ex tota FA iu dimidia AB: hoc est in AE. Contenta ergo sub OA, AB, ad contentum sub FA, AE, est ut OA ad dimidiam AF: hoc est ut K ad GH. Verum, ut contentum sub OA, AB, ad contentum sub FA, AE, sic est superficies cylindri ad superficiem coni; ergo etc. » (ibid., fol. 23).

È dato, secondo il discorso di Galileo, $AO : \frac{FA}{2} = K : GH$, ossia $AO \,.\, AB : \frac{FA \,.\, AB}{2} = K : GH$, che, moltiplicata la prima ragione per π e posta $AB = 2\,AE$, si riduce ad $AO \,.\, 2\,\pi\,AE : FA \,.\, \pi\,AE = K : GH$. Ma nella prima ragione il primo termine misura la superficie del cilindro, il secondo la superficie del cono, dunque ecc. Bisogna poi, com'è stato avvertito nella proposta, che sia $\frac{2\,AO}{AF} = \frac{K}{GH} < 2$, perchè, se fosse uguale, sarebbe $OA = AF$, e gli apotemi del cilindro e del cono si confonderebbero insieme, per cui non sarebbe possibile la richiesta costruzione.

« PROPOSITIO XVI, PROBLEMA IV. — *Dato cylindro recto, in altera parte indeterminato, possumus ab ipso portionem abscindere, ita ut illius superficies, exceptis basibus, aequetur superficiei coni recti in ipso descripti, excepta base coni.* »

« Sit itaque cylindrus rectus indeterminatus, et planum ductum per axem faciat sectionem ABCD (fig. 92), sitque BE dupla EC, et centro C, intervallo CB, describatur circuli circumferentia, quae secet CD in F, et ducatur BF, quae bifariam dividatur in H, et per H ducatur, BC aequidirtans, GHK. Dico, si convolvantur rectangulum KGCB, et triangulum BHC, effici quod petitur. »

Figura 92.

« Quia enim quadratum BC triplum est quadrati CF, erit BF quadratum quadruplum FC, hoc est HB quadratum quadruplum quadrati BK, et linea HB dupla BK. Quare, si BC bifariam dividatur in puncto I, erit ut HB ad BK, ita CB ad BI. Quod ergo

fit ex KB in BC aequatur ei quod fit ex HB in BI. Igitur mediae inter HB, BI, et inter KB, BC; hoc est circuli, quorum dictae mediae sint semidiametri, sunt aequales. Ergo etc. » (ibid., fol. 22).

La superficie del cono, generato dalla rivoluzione del triangalo BHI intorno all'asse HI, è, senza la base, π BI . BH, e la superficie del cilindro, generato dal rettangolo KI nel rivolgersi intorno al medesimo asse, è, senza le basi, π BC . KB, per cui, se i rettangoli BI . BH, BC . KB fossero uguali, sarebbe dimostrato che le due superficie sono uguali. L'eguaglianza poi dei detti rettangoli la conclude Galileo dal supporre $BC^2 = 3\ CF^2$, dal quale supposto ne consegue veramente $BF^2 = 3\ CF^2 + CF^2 = 4\ CF^2$, ossia $(2\ BH)^2 = 4\ (2\ KB)^2$, e in ultima riduzione $BH = 2\ BK$. Ma è strano il fare ***quadratum BC triplum quadrati FC,*** perch' essendo per costruzione BC, FC raggi di un medesimo circolo, non possono i loro quadrati non essere uguali. La cosa anzi ci parve tanto strana che, dubitando di non aver bene interpetrato il manoscritto, si voleva escludere questo dagli altri teoremi. Essendosi però ritrovato per cosa certa ch' era stato propriamente messo così, come noi ricopiammo, lo adduciamo come documento storico di quei falli, nei quali ebbe più volte a incorrere Galileo, principalmente per la privazion della vista, e del potere adoperare la penna, « infelicità, diceva da sè stesso, che mi accade anco nel poter discorrere sopra linee, che passino oltre un triangolo, sicchè nè pure posso intendere una delle mie medesime proposizioni e dimostrazioni » (Alb. VII, 236).

Ma quest' altra proposizion che scriviamo, era tanto facile, da potersi contemplar con la sola mente, alla quale bastava rappresentar come il quadrato del raggio, ch' entra a misurar la base di un cilindro, è uguale a esso raggio moltiplicato in sè stesso. Essendo infatti C, C' due cilindri con le basi di raggio R, R', e con le altezze A, A', avranno fra loro la proporzione $C : C' = A\ \pi\ R^2 : A'\ \pi\ R'^2 = 2\ \pi\ R\ .\ A\ .\ 2\ R : 2\ \pi\ R'\ .\ A'\ .\ 2\ R'$, che vuol dire appunto quel che Galileo proponesi di dimostrare in questo modo:

« Propositio XVII, Theorema XIII. — *Cylindri proportionem habent compositam ex proportione superficierum curvarum, et ex proportione diametrorum basium.* »

« Nam habent proportionem compositam ex proportione altitudinum, et ex proportione basium. Bases autem habent proportionem compositam ex circumferentiis, et ex proportione diametrorum. Quare cylindrus ad cylindrum habet proportionem compositam ex tribus proportionibus: nempe altitudinum, circumferentiarum et diametrorum, quarum duae primae componunt proportionem superficierum curvarum. Quare patet propos. » (ibid., fol. 25).

I raccoglitori dei manoscritti attribuirono a Galileo un'altra proposizione geometrica, che poi il Viviani pubblicò per sua, e nel dedicarla, con la data del 1668 al padre Adamo Adamando, gli diceva di averla ritrovata trent'anni fa, nello studiare il teorema di Pitagora, *vix Geometriae limini appulsus.* Poi soggiungeva essere stato condotto all' invenzione da così fatto pensiero: « Quum primum enim, nullo explicantis praeceptoris praesidio, ad illius

pithagorici inventi demonstrationem perveni, ignorans adhuc universalem propositionem trigesimam primam, de similibus figuris ab Euclide in sexto Elementorum allatam; excogitari coepi num, quod de figura quadrata, verum quoque esset de prima ac simplicissima rectilinearum figurarum aequalium pariter laterum et angulorum; nimirum de triangulo aequilatero » (Viviani Scienza delle proporz. cit., pag. 126)

Non si vuol da noi negar fede a queste asserzioni, perchè i frutti rendon credibile la precoce eccellenza dei fiori, sullo sbocciar dei quali avendo nonostante avuto Galileo quella parte, che ha la luce e il tiepore del sole, non par che aberri dal vero chi attribuisce a lui i portati primaverili della giovane pianticella. Se dall' altra parte il modo, come fu distesa quella proposizione nella sua prima forma originale, attesta l' inesperienza del giovane dimostratore, è anche indizio delle difficoltà dello stesso Galileo nel doversela rappresentare in mezzo alle tenebre.

« Propositio XVIII, Theorema XIV. — *Sia il triangolo rettangolo ABC* (fig. 93), *il di cui angolo retto ABC. Dico il triangolo equilatero ADC, fatto sopra il lato AC opposto all' angolo retto, essere uguale ai triangoli equilateri AEB, CFB, fatti dai lati AB, BC, che l' angolo retto contengono.* »

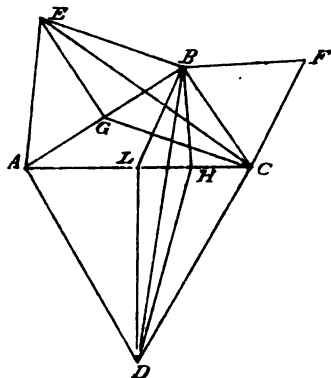



Figura 93.

« Per provar questo, tirisi la linea retta BD, e poi dal punto E tirisi la EG perpendicolare sopra la AB. Tirisi inoltre la linea retta GC, e finalmente tirisi un' altra linea retta EC. Considero ora i due triangoli EAC, BAD, i quali hanno i lati EA, AC eguali ai due lati BA, AD, l' uno all' altro, essendo lati di triangoli equilateri. Inoltre l' angolo DAC è uguale all' angolo EAB, per essere ambedue in un triangolo equilatero: aggiunto comune CAB sarà tutto l' angolo DAB eguale a tutto EAC, sicchè i triangoli EAC, BAD, avendo due lati uguali a due lati, e l' angolo compreso uguale all' angolo compreso, sarà tutto il triangolo uguale a tutto il triangolo. Ma il triangolo EAC è composto dei tre triangoli EAG, EGC, AGC, i quali fra tutti e tre fanno tutto il triangolo AEB equilatero, e mezzo il triangolo ABC rettangolo: perchè, essendo la EG perpendicolare sopra la AB, sarà l' angolo EGA eguale all' angolo EGB, essendo ambedue retti. L' angolo ancora EAG è uguale all' angolo EBG, per essere del triangolo equilatero. Sicchè dunque i due triangoli AEG, GEB saranno uguali, essendo come s' è detto l' angolo AGE eguale all' angolo EGB, e l' angolo EAG eguale all' angolo EBG: un lato uguale a un lato del comune EG, e il lato EA uguale al lato EB, per essere ambedue del triangolo equilatero. Sarà dunque il triangolo EAG eguale al triangolo EGB, cioè il triangolo EGB la metà di tutto l' equilatero EAB. Inoltre essendo ancora, per la medesima ragione, il lato AG eguale al lato GB,

saranno i triangoli AGC, BGC sopra basi uguali, ed hanno la medesima altezza in C: sicchè saranno uguali fra di loro. Però il triangolo AGC sarà la metà di tutto il triangolo rettangolo ABC. Inoltre poi, essendo l' angolo EGA retto, e l' angolo GBC pur retto, saranno fra loro uguali. Però le linee EG, BC saranno parallele: però i triangoli EGC, EGB saranno fra loro uguali, essendo sopra la medesima base e fra le stesse parallele. Ma il triangolo EGB è la metà del triangolo equilatero AEB, adunque anche il triangolo EGC sarà la metà di detto triangolo equilatero. Sicchè dunque i due triangoli AEG, EGC sono uguali a tutto il triangolo equilatero AEB, ed il terzo triangolo AGC è la metà del rettangolo ABC, e fra tutt' e tre s' è detto che compongono il solo grande EAC. Adunque il triangolo EAC è uguale al triangolo equilatero EAB, e alla metà del rettangolo ABC. Ma il triangolo BAD si è provato uguale al triangolo EAC, adunque anche il triangolo BAD sarà uguale al triangolo equilatero EAB, e alla metà del rettangolo ABC. »

« Per le medesime ragioni, e con la medesima costruzione appunto, si proverà il triangolo BDC eguale all' equilatero BFC, con la metà del triangolo ABC. Adunque tutto il triangolo equilatero ADC, con tutto il triangolo rettangolo, è uguale ai due triangoli equilateri EAB, BCF, con due metà del triangolo equilatero: cioè con tutto il medesimo triangolo equilatero. Ma se, tanto dal solo triangolo equilatero, che dagli altri due, ne leveremo il comune triangolo rettangolo; resterà il triangolo equilatero ADC solo eguale ai due triangoli equilateri EAB, BCF. Ma il triangolo ADC è il triangolo fatto dalla AC, lato opposto all' angolo retto del triangolo rettangolo ABC, e i triangoli EAB, BCF i triangoli fatti dai lati, che l' angolo retto contengono del medesimo triangolo; sicchè dunque del triangolo rettangolo il triangolo equilatero, fatto sopra il lato opposto all' angolo retto, è uguale ai due triangoli equilateri, fatti dai lati che l' angolo retto contengono, il che si doveva provare » (MSS. Gal., P. VI, T. III, fol. 11 a tergo e fol. 12).

« Propositio XIX, Theorema XV. — *Ma volendosi sapere qual parte del triangolo equilatero, fatta dal lato opposto all' angolo retto, è uguale a uno degli altri triangoli, e qual parte è uguale all' altro, si opererà così:* »

« Sia il detto triangolo rettangolo ABC, come nella precedente figura, e fatti i triangoli voglio provare quanto di sopra. Per provar questo, tirisi dal punto B la BH perpendicolare sopra la AC: congiungasi HD. Dico il triangolo ADH essere eguale all' equilatero AEB, l' uno all' altro. »

« Tirisi la retta BD: poi tirisi la DL perpendicolare sopra AC, e congiungasi LB. Tirisi inoltre la perpendicolare EG sopra la AB, e congiungasi GC, e finalmente tirisi la linea retta EC. Già, per la di sopra, sappiamo il triangolo AEC essere uguale al triangolo ABD, e l' uno e l' altro eguale all' equilatero AEB. Ma essendo l' angolo DEC retto uguale all' altro retto AHB, saranno le linee DL, BH parallele. Più il triangolo DLH sarà uguale al triangolo DLB, essendo sopra la medesima base DL, e fra le stesse parallele. Però, pigliando in cambio di BLD il triangolo DLH, sarà tutto il triangolo DAH, con ALB, eguale al triangolo AEB, con la metà del triangolo rettangolo ACB.

Adunque anche il triangolo ADH, con il triangolo ALB, sarà uguale al triangolo equilatero AEB, e alla metà del triangolo rettangolo ABC. Ma il triangolo ALB ancora è la metà del triangolo rettangolo, per essere sopra basi eguali AL, LC, avendo la medesima altezza in B. Ma se tanto dal triangolo equilatero AEB, che dal triangolo ADH, si tolgano le parti uguali alla metà del triangolo rettangolo ABC, resterà il triangolo equilatero AEB eguale al triangolo ADH, che si doveva provare. »

« Con la medesima costruzione si proverà l' altro triangolo CHD eguale all' altro equilatero BCF. Adunque tutto ADC sarà uguale ai due » (ivi, fol. 12).

IV.

Tali essendo, quali gli abbiamo ordinati ed esposti fin qui, i problemi e i teoremi di Galileo raccolti dal Viviani, passiamo a ordinare quegli altri, che si sono raccolti da noi, per la massima parte dagli autografi, ne' quali, per non aver potuto l' Autore mandare ad effetto la sua intenzione, son da due secoli e mezzo rimasti abbandonati. Dicemmo esservene alcuni concernenti l' Algebra, per la quale intendiamo quella parte della Matematica, che dimostra le relazioni esistenti fra certe date quantità, come loro proprietà universali, comunque siano quelle stesse quantità definite. Il modo di dimostrare così fatti teoremi consiste per lo più, appresso agli antichi, nel concludere per induzione una regola generale da pochi fatti particolari, cosicchè la fiducia, che s' aveva della verità di queste soluzioni, si faceva unicamente dipendere dal principio, che la Natura opera in modo sempre costante. Come il principio sia talvolta sicuro, e come non di rado riesca pericoloso, apparisce dagli esempi dei Matematici antichi, i quali, non sapendo dar forma ai concetti universali, per poi vedervi in essi compresi i particolari, da questi, risaliti per pochi gradi, distendono a quelli il volo ardito, soggiacendo bene spesso alle sorti d' Icaro, di che ebbe talvolta a fare esperienza anche Galileo.

PROPOSITIO XX, THEOREMA XVI. — *Abbiasi una progressione aritmetica che, cominciando da un numero pari, proceda costantemente per differenze uguali al primo termine* a, *alla metà del quale s' agguagli il numero degli stessi termini in progressione. Si ponga poi una nuova progressione decrescente con differenze costantemente uguali a due, e il maggior numero della quale sia il primo della progressione crescente, diminuito di un' unità, e si proceda infin tanto che, per essere quel maggior numero impari, non si esaurisca nell' uno. Poste queste cose, si dimostra primo: che il numero dei termini della progressione decrescente sarà uguale al numero dei termini della crescente. Secondo: che il doppio della somma della stessa decrescente è uguale al primo termine della crescente, moltiplicato per il numero dei termini in progressione.*

Chiamato infatti ω il maggior termine della progressione decrescente, e d la differenza, la formula $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$ dataci dai trattati di Algebra si riduce ad $n = \frac{a}{2}$. Dunque il numero dei termini è veramente, come si diceva, nelle due progressioni uguale.

La formula poi $\omega = a + d\ (n - 1)$ dà per la crescente $\omega = a + a\ (n - 1) = an$: mentre per la decrescente la somma s è data dalla formola $s = \frac{n}{2}\ (a + \omega)$ che nel presente nostro caso si riduce a $2\,s = n\ (1 + a - 1) = an$. Dunque $\omega = 2\,s$, come si doveva dimostrare.

Propositio XXI, Theorema XVII. — *Abbiansi le medesime cose come sopra, ma il minor termine della crescente, la quale abbia tanti termini in progressione, quant'è la metà di* $a + 1$, *sia impari, e sia perciò pari il maggior della decrescente. Si dimostra, così posto, che il numero dei termini della decrescente è sempre minore di uno del numero dei termini della crescente; e che il doppio della somma di quella è uguale al numero dei termini di questa moltiplicato per il suo primo termine diminuito di uno.*

La formula infatti $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$, dianzi proposta, si riduce a $n = 1 + \frac{a - 1 - 2}{2} = \frac{a - 1}{2}$, ciò che dimostra la verità della prima parte del teorema. Quanto alla seconda, l'altra formula generale, che dava la somma dei termini in progression decrescente, torna a $2\,s\ (n - 1)\ (a + 1) = an - a + n - 1 = an + n - (a + 1)$. Ma $a + 1 = 2\,n$, dunque $2\,s = an - n = n\ (a - 1)$, come dovevasi dimostrare.

Galileo concludeva il primo dei riferiti teoremi dal veder procedere secondo la medesima regola le progressioni contrassegnate nel manoscritto con le lettere D, F, E, B, A.

D { ÷ 8 : 4
  { ÷ 3 : 1

F { ÷ 6 : 12 : 18
  { ÷ 5 : 3 : 1

E { ÷ 8 : 16 : 24 : 32
  { ÷ 7 : 5 : 3 : 1

B { ÷ 10 : 20 : 30 : 40 : 50
  { ÷ 9 : 7 : 5 : 3 : 1

A { ÷ 20 : 40 : 60 : 80 : 100 : 120 : 140 : 160 : 180 : 200
  { ÷ 19 : 17 : 15 : 13 : 11 : 9 : 7 : 5 : 3 : 1

L' altro teorema era pure concluso per induzione dai particolari esempi, offerti e considerati nelle progressioni G, H, I, L.

G { ÷ 5 : 10 : 15
÷ 4 : 2

H { ÷ 7 : 14 : 21 : 28
÷ 6 : 4 : 2

I { ÷ 9 : 18 : 27 : 36 : 45
÷ 8 : 6 : 4 : 2

L { ÷ 25 : 50 : 75 : 100 : 125 : 150 : 175 : 200 : 225 : 250 : 275 : 300 : 325
÷ 24 : 22 : 20 : 18 : 16 : 14 : 12 : 10 : 8 : 6 : 4 : 2

L' uno e l' altro poi dei detti teoremi veniva da Galileo applicato a illustrare la meccanica dei moti naturali, comparati con i violenti, com' apparisce dalla seguente nota autografa, della quale è questa la fedel copia che se n' è presa:

« *Notabile per i proietti nel determinare quanto detragga la propensione naturale in giù al moto preternaturale della proiezione.* — Si impetus violentus disponatur secundum numeros pares, descensus naturalis demit dimidium, ut constat in exemplis D, F, E, B, A. Verum, si dispositio sit secundum numeros impares, naturalis descensus demit minus quam dimidium, iuxta numerum partium dispositarum, ut patet in exemplis G, H, I, L. In G enim partes dispositae iuxta impetum violentum non retardatum sunt tres, nempe 5, 10, 15, ex quibus in prima demitur 1, et relinquitur 4. Dempto ex secunda 4, relinquitur 6. Dempto ex tertia, nempe ex 15, 9, relinquitur idem numerus 6, quod deficit a dimidio 15 per 3, qui est numerus partium 5, 10, 15. In exemplo H numerus partium est 4: subtractiones motus naturalis sunt 6, 4, 2, quae conficiunt 12, cuius duplum deficit a 28 per 4. In exemplo I subtractiones 8, 6, 4, 2 exhibent 20, cuius duplus deficit a 45 per 5, quod est numerus partium. In L pariter apparet subtractiones, nempe 156, duplicatim deficere per 13, quod est numerus partium motus violenti, a 325 » (MSS. Gal., P. V, T. II, fol. 182).

« Propositio XXII, Theorema XVIII. — *In numeris, ab unitate consequentibus, summa cuiuslibet multitudinis, ad aliam summam alterius multitudinis, si ab utraque dimidium maximi numeri auferatur, est ut quadratum multitudinis unius, ad quadratum alterius multitudinis* » (ibid., fol. 68).

Anche di questo teorema, concluso da Galileo per induzione da pochi esempi particolari, è manifesta la verità generale, applicandovi la formula algebrica $s = \frac{n}{2}(a + \omega)$, che si trasforma in $s - \frac{\omega}{2} = \frac{n(a + \omega)}{2} - \frac{\omega}{2} =$

$\frac{n(1+\omega)-\omega}{2}$, intendendosi per s la somma che si cerca, per a, ω il primo e l'ultimo termine, e per n il numero dei termini in progressione. Ora essendo $a=1$, e nella progressione dei numeri naturali conseguenti dall'unità $n=\omega$, avremo $s-\frac{\omega}{2}=\frac{\omega^2}{2}$. Per la somma s' di un'altra progressione, l'ultimo termine della quale sia ω', essendo $s'-\frac{\omega'}{2}=\frac{\omega'^2}{2}$, avremo dunque $s-\frac{\omega}{2}:s'-\frac{\omega'}{2}=\omega^2:\omega'^2$, ciò ch'esprime la verità che volevasi confermare.

« Propositio XXIII, Theorema XIX. — *Si fuerint quatuor lineae, quarum prima et secunda simul sumptae sint aequales tertiae et quartae simul sumptis, sint autem prima et secunda minus inter se differentes quam tertia et quarta; rectangulum primae et secundae superat rectangulum tertiae et quartae rectangulo contento ab excessu tertiae supra primam in excessu primae supra quartam* » (ibid., fol. 62 ad terg.).

Galileo non dimostra direttamente il teorema, ma si contenta d'accennar come si verifichi nell'esempio di quattro linee, la prima e la seconda delle quali siano 10, 8, e la terza e la quarta 12 e 6. In questo caso è veramente $10 \times 8 - 12 \times 6 = 2 \times 4$. È però verissima la cosa in generale, perchè chiamate a, b, c, d le quattro linee o i quattro numeri, se meglio piace, essendo per le poste condizioni $a+b=c+d$, è facile dimostrare che $ab-cd=(c-a)(a-d)$. Sostituito infatti il valore di b, sarà $ab-cd=a(c+d-a)-cd=ac+ad-a^2-cd=a(c-a)+d(a-c)=a(c-a)-d(c-a)=(c-a)(a-d)$, che conferma la verità dell'annunziata proposizione.

Seguono altri teoremi, i quali pullularono fecondi nella mente di Galileo, mentre si proponeva di dimostrare con qual proporzione crescano le superficie ne' solidi sminuzzati, per concluderne poi il maggiore impedimento, che ricevon questi nello scendere per varii mezzi, rispetto all'impedimento, che riceverebbe il solido tutto intero.

« Propositio XXIV, Theorema XX. — *Dato un cubo, diviso in tre parti uguali uno de' suoi lati, come uno sta a tre, così la superficie del grande alla superficie di tutti que' piccoli* » (MSS. Gal., P. V, T. IV, fol. 37).

Chiamato BD il lato del cubo grande, e BE il suo terzo, le superficie S, σ son date da $S=6 \, . \, BD^2$, $\sigma=6 \, . \, BE^2$, onde $S:\sigma=BD^2:BE^2$. La somma poi di tutti i cubetti, che chiameremo Σ, sarà $3^3 \, . \, 6 \, . \, BE^2$, ossia $27 \, . \, 6 \, . \, BE^2$, e perciò $\Sigma:\sigma=27\,BE^2:BE^2$, onde $S:\Sigma=BD^2:27 \, . \, BE^2$. E perchè $BD=3\,BE$, $S:\Sigma=9:27=1:3$. La qual medesima conclusione è dimostrata da Galileo così, con altra forma di discorso:

« Come la superfice del gran cubo alla superfice di un piccolo solo, così la base del grande alla base del piccolo: e come la superfice del piccolo alla superfice di tutti con esso, cioè a 27; così la sua base a 27 basi come la

sua. Adunque *ex aequali* come la superfice del grande alla superfice di tutti i piccoli, così la sua base grande a 27 di quelle basi piccole. Ma questa ne contiene nove di quelle piccole, dunque come 9 a 27, cioè come uno a tre, così la superfice del grande, alla superfice di tutti que' piccoli » (ivi).

Potevasi il teorema dimostrar facilmente nella sua generalità, chiamando C il numero qualunque delle parti, nelle quali s' intenda essere stato diviso il lato del maggior cubo, perchè, ragionando come sopra e ritenendo le significazioni di sopra, se ne concluderebbe $S : \Sigma = BD^2 : C^3 . BE^2$. E per essere $BD = C . BE$, $S : \Sigma = C^2 . BE^2 : C^3 . BE^2 = 1 : C = BE : BD$, che vuol dire: *la superfice grande sta alla somma delle piccole, reciprocamente come un lato di uno de' piccoli cubi sta al lato del grande.* La dimostrazione di questo generale teorema fu data dallo stesso Galileo, facendo uso della così detta *Algebra speciosa,* com' apparisce dal seguente frammento, in cui, dietro le cose già esposte, non è difficile supplire al significato delle parole, che mancano sul principio del manoscritto:

« . . . . . . alla superfice di tanti cubetti quanto è il numero B, è la medesima che quella del cubo B alla medesima dei tanti cubetti quanto è il numero B. Ma la superfice di tanti cubetti quanto è il numero C, a quella di tanti quanto è il numero D, sta come i cubetti del numero C ai cubetti del numero D, cioè come il numero C al numero D, cioè il numero A al B, cioè la linea A alla linea B; adunque la superfice di tanti cubetti quanto è il numero C, cioè la superfice del cubo B, alla superfice dei cubetti quanto è il numero D, cioè alla superfice di tanti cubetti, che fanno il cubo medesimo B, sta come la A alla B, cioè come il lato di uno de' cubetti, uguali e simili al tutto, al lato del tutto, che è quello che si doveva dimostrare. Il che si deve intendere esser vero in ogni solido risoluto in solidi simili, essendo tra di loro come i cubi de' lati omologhi » (ivi, fol. 38).

Dall' essere poi $S : \Sigma = 1 : C$, secondo i simboli da noi applicati di sopra a questa conclusione di Galileo, ne segue *per conversionem rationis* $\Sigma : S = C : 1$, corollario del precedente, o nuovo teorema dallo stesso Galileo così proposto e illustrato col discorso, che per noi si ricopia dal manoscritto.

« PROPOSITIO XXV, THEOREMA XXI. — *Tutte le superfice dei piccoli cubi risoluti prese insieme, alla superfice del cubo grande risoluto, hanno la medesima proporzione, che il numero delle parti del lato che si sega all' uno.* »

« Il numero de' cubi, nei quali uno si risolve, è il numero cubo delle parti, che son nel lato del cubo, che si risolve: come per esempio, diviso il lato del cubo in tre o quattro parti, i cubi, che da esse parti si faranno, saranno 27 o 64. Ed avendo ogni cubo sei quadrati in superfice, moltiplicando 27 per 6, e 64 pur per 6, averemo i numeri dei quadrati, che son superfice dei detti cubi. Di qui facilmente ne consegue quel che si diceva, che cioè tutte le superfice dei piccoli cubi risoluti prese insieme, alla superfice del cubo grande risoluto, hanno la medesima proporzione che il numero delle parti del lato che si sega all' uno. E così tutte le superfice dei 27 cubi,

alla superfice del primo massimo cubo, saranno triple, e tutte le superfice delli 64 cubetti prese insieme saranno quadruple della superfice dell' intero gran cubo, essendo che il lato di questo fu diviso in tre parti, per cavarne li 27 cubi, ed in quattro, per cavarne li cubi 64 » (ivi, fol. 19).

Osservava in simile proposito Galileo che, se il lato del quadrato è diviso in tre parti uguali, uno solo è il quadratino, che riman rinchiuso in mezzo a tutti gli altri. Se poi la divisione sia fatta in quattro, o in cinque parti uguali, i quadratini rinchiusi saranno quattro o nove. Di qui ne concludeva per regola generale che, chiamato D il numero delle divisioni, il numero N de' quadratini interni è $(D - 2)^2$, d' onde ne conseguiva $(D - 2)^3$, per il numero dei cubetti rimasti dentro al gran cubo sepolti. Intorno a che formulava Galileo stesso, riscontrata sopra alcuni esempi numerici, la seguente:

« PROPOSITIO XXVI, THEOREMA XXII. — *Il numero dei cubi, che restano sepolti nel gran cubo, si trova essere il numero cubo delle parti, nelle quali si divide il lato del gran cubo, trattone due.* »

« Onde, nascendo li 27 cubi dalla divisione in tre, tratto da questo numero tre, due, resta uno, ed uno solo sarà il cubo, che rimane incluso e sepolto tra li 27. Otto saranno i cubi sepolti tra li 64, nascenti dalla divisione del primo gran lato in quattro, imperocchè, tratto dal quattro due, resta due, il cui cubo è otto. E così di tutti gli altri » (ivi).

« PROPOSITIO XXVII, PROBLEMA V. — *Di due palle, quanto una è maggiore di un' altra?* »

« Una palla di quattro è maggiore di una di tre, ed ha la medesima proporzione che 64 a 27, facendo i cubi loro, perchè le figure simili sono in tripla proporzione dei lati, cioè di 4 a 3. Di qui intenderai perchè le superficie dei solidi simili no nell' istessa proporzione, ma in minore, cioè in subsesquialtera di quella di essi solidi crescono e calano » (ivi, fol. 31).

Chiamati infatti S, s i solidi, Σ, σ le superficie, R, r i raggi: sarà $S : s = R^3 : r^3$, $\Sigma : \sigma = R^2 : r^2$, e perciò $\Sigma^3 : \sigma^3 = S^2 : s^2$, ossia $\Sigma : \sigma = S^{\frac{2}{3}} : s^{\frac{2}{3}}$.

Nel giugno del 1639 riceveva Galileo quel trattatello in forma di lettera, nella quale il Castelli, descrivendo il Pluviometro, diceva di essersi servito del nuovo inventato strumento per misurare dall' altezza di lui l' altezza, a cui sarebbe cresciuta in tempo di pioggia la superfice del lago Trasimeno. Era per caso allora esso Galileo tutto in pensiero de' teoremi aritmetici riferiti di sopra, per ordinarli nel Dialogo, a cui parvegli si sarebbe potuta aggiungere in simile argomento un' altra bellissima speculazione, qual era di ritrovare il numero delle gocciole cadute sulla superfice di quello stesso lago. E risoluto il problema, dettava intanto al Viviani così, perchè non se ne avesse a perdere la memoria:

« In proposito del p. ab. don Benedetto, nel trattato del lago Trasimeno, è cosa degna di esser notata quante sarebbero le gocciole dell' acqua piovente sopra la superfice del lago, data la distanza tra gocciola e gocciola, mantenuta sempre eguale tra ciascheduna di quelle, e dato quanto sarebbe il se-

midiametro uguale alla superfice del lago, cioè quante di tali distanze ne conterrebbe. Imperocchè, fatti due cubi, uno del numero di tutte le date distanze con uno più, e l'altro di un numero uno manco di tutto quello, e sottratto questo minor numero cubo dall'altro, la loro differenza è il numero delle gocciole sopra il dato cerchio cadenti. Per esempio la distanza tra gocciola e gocciola sia un soldo: il semidiametro del cerchio sia soldi novantanove. Facciasi il cubo di cento, che è uno più di novantanove, che è un milione, dal quale si tragga il numero cubo di novantanove, che è 970,299. Tratto questo da un milione, resta 29,701 e tanto sarà il numero delle gocciole cadenti sopra il dato cerchio » (ivi).

Nello stesso tempo dettava Galileo al Viviani una lettera, nella quale s'avvisava il Castelli che il suo discorso sul lago Trasimeno aveva provocata la seguente

PROPOSITIO XXVIII, PROBLEMA VI. — *Dato un cerchio, e il numero delle distanze fra le gocciole nel suo raggio comprese, trovare il numero di tutte le gocciole, sopra quella circolar superfice cadenti.* E chiamato N questo numero, e D le date distanze, diceva Galileo essere risoluto il problema, in modo corrispondente alla formula $N = (D + 1)^3 - D^3$.

Il Castelli fece intorno a questa soluzione qualche difficoltà, alla quale Galileo così rispondeva: « Quanto a quello, che ella tocca nella sua, in proposito delle gocciole cadenti, che si debbano prendere non gl'intervalli tra gocciola e gocciola, ma i numeri di esse gocciole, è verissimo, nè io poteva venire in cognizione di quanto scrissi, se non servendomi del numero delle gocciole, ponendo il primo come centro, e gli altri sei come gli angoli dell'esagono inscritto nel primo cerchio, e così i contenuti sono sette. Presi poi due punti, e fattone il cubo, che è otto, e trattone il primo cubo, che è uno, restano pure sette. Aggiunto il secondo cerchio, doppio in circonferenza del primo e perciò contenente dodici gocciole nella circonferenza, e fatto il cubo di tre punti, cioè 27, e trattone il cubo di due, che è otto, restano 19, che è la somma stessa delli 12, delli sei, e dell'uno del centro. E seguitando con quest'ordine, aggiugnendo il terzo cerchio, e li 18 punti contenuti nella sua circonferenza, sommandogli con gli antidetti dodici, e gli altri sei precedenti a quello del centro, si fanno 37 gocciole, e tale è il numero che resta, cavando il cubo di 3 dal cubo 4, cioè 27 da 64. E così continuando vidi la continuazione della regola, ma poco potei andare innanzi, vietandomelo la privazione della vista e del potere adoperar la penna: infelicità che mi accade anco nel poter discorrere sopra linee, che passino oltre un triangolo, sicchè neppure posso intendere una delle mie medesime proposizioni e dimostrazioni, ma tutte mi giungono come ignote e inintelligibili » (Alb. VII, 235, 36).

I riferiti esempi, benchè pochi, possono nulladimeno bastare, per dare un'idea de' teoremi dimostrati, e de' problemi risoluti da Galileo, relativamente a quelle proprietà, che universalmente intercedono fra certe date quantità numeriche e lineari, e che oggidì più francamente e più generalmente si dimostrerebbero per via di simboli algebrici, e con la regola nota delle

loro operazioni. Rimarrebbe, a condurre il nostro primo proposito ad effetto, di raccogliere quegli altri teoremi di Geometria, i quali occorsero alla mente di Galileo, nell'atto di dimostrare le proposizioni attinenti alle varie proprietà dei moti: proposizioni, che, rimaste indietro nei manoscritti e fuor di luogo nell'opera dei dialoghi stampati, si volevano dall'Autore stesso ridurre tutte insieme in questo dialogo novissimo, incominciato, in mezzo alle tenebre esteriori, a dettare al Viviani.

Sembrerebbe si potesse congetturare dai fatti, in questa nostra Storia più volte notati, che non fu una tal dettatura nè ordinata nè continua: ma si dialogizzava uno o altro soggetto a parte, come ne veniva l'occasione e il tempo, con intenzione d'intessere tutte insieme quelle parti nel tutto, rimanendo solo a farne le facili attaccature. Per conferma di che soggiungeremo qui, prima di passare a raccogliere i promessi teoremi geometrici, una delle dette parti dialogizzate, nelle quali, in modo che, rispetto agl'insegnamenti degli altri Autori e del medesimo Galileo nelle opere stampate, si direbbe nuovo; s'applica la Geometria elementare ad alcune curiose insieme, e utili operazioni della Geodesia:

« Salviati. — Ha il nostro Accademico in questi fogli insegnato anche il modo di misurar con la vista. »

« Simplicio. — Ma cotesto stesso l'avevano insegnato, ne' loro libri, tanti altri Matematici, prima di lui. »

« Salviati. — Voi dite il vero, signor Simplicio: e bench'io vi debba concedere che il nostro Amico non abbia intorno a ciò insegnato nulla di nuovo nella sostanza, ha nonostante il merito della novità, quanto ai modi, i quali, se son più facili e più spediti degli altri, sono anche insieme di minore spesa, e di minore incomodo nel praticarli. Ditemi: basta forse la semplice vista, per questa maniera di operazioni? »

« Simplicio. — No, ma vi si richiedono i necessari strumenti, come sarebbero quadranti e diottre e traguardi, i quali vogliono esser fatti con gran precisione dalle mani degli artefici più periti. »

« Salviati. — Ora io vi dico che il nuovo modo dispensa l'operatore da tutto questo: basta che egli abbia un quadrato o un rettangolo, fatto di qualunque materia, con i lati ben diritti e puliti, e con gli angoli ben piegati in perfetta squadra. »

« Sagredo. — Ciò potrà forse bastare per l'operazione in sè stessa, ma ella richiede pure il fondamento di altre operazioni, come sarebbe quella di tirare la linea del perpendicolo e l'equidistante alla orizzontale, per far che non vedo come possa bastare in tutto un semplice rettangolo o un quadrato, e sia pure, negli angoli e ne' lati, quanto vogliate, perfetto. »

« Salviati. — Voi, signor Sagredo, avete accortamente distinto il fondamento preparatorio dalla stessa propria operazione, della quale sola s'intendeva parlare: e benchè, qualunque peso pendulo da un filo sia strumento paratissimo a tutti, per una delle dette operazioni; per l'altra nonostante, cioè per livellare, si ricerca strumento assai più artificioso. Tale sarebbe un

sifone pieno di liquido, per la maggior precisione del quale si vorrebbe principalmente che fosse assai lungo. »

« SIMPLICIO. — Io dai pratici ho sentito dire che i due rami del sifone, che si ripiegano in su, e nei quali trasparisce l' acqua, debbono essere, più che sia possibile, uguali, e che la differenza del calibro, specialmente andando a restringersi i tubi, può rendere assai fallace la linea della mira, ma non intendo in qual fallacia potesse indurre l' esser più o meno lungo il tubo disteso in piano, l' acqua rinchiusa del quale non apparisce al di fuori e non si guarda. »

« SALVIATI. — E io, molto diversamente da quel che voi signor Simplicio, credete, vi annunzio come cosa verissima che, quanto sarà più lungo lo strumento da livellare tanto sarà minore l' errore, che si potesse fare nella linea di mira. »

« SAGREDO. — Che sia verissimo quel che il signor Salviati pronunzia me lo persuade un pensiero, che m' è sovvenuto pure ora alla mente, e che io voglio esplicare al signor Simplicio con questo discorso: Supponete di avere lo strumento prima lungo quanto AC (fig. 94), poi ridotto alla lunghezza AF, e che, per essere il ramo del tubo in C più stretto del ramo in A, o per qualsivoglia altro motivo, erri la linea di mira quanto DC. Facendosi il medesimo errore anche in F, l' effetto non è però il medesimo, quanto al riferir la mira per esempio sulla lunghezza della pertica BH, messa innanzi per scopo. È facile vedere che si dilungherà dal vero punto della orizzontale più in questo caso che in quello, ma si può anche assai facilmente dimostrare secondo qual precisa proporzione si faccia l' errore, nell' un caso e nell' altro. Perchè, presa FE uguale a DC, e tirate le visuali AG, AH, le quali terminino sullo scopo contrapposto in G e in H, i triangoli simili ACD, ABG danno che AB sta a BG come AC a CD. Parimente, dai triangoli simili ABH, AFE, s' ha che AB sta a BH, come AF ad FE. Se ne conclude perciò che AC verso AF ha la proporzion medesima di BH verso BG, cosicchè se voi, signor Simplicio, supponete che lo strumento più lungo sia per esempio sei braccia e il più corto tre, quando quello facesse errore di quattro, questo invece farebbe errore di otto. »

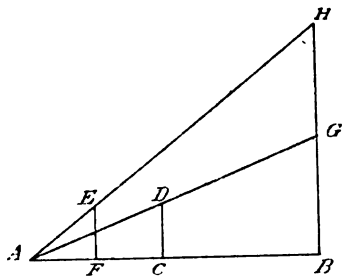



Figura 94.

« SIMPLICIO. — Trattandosi di ragioni geometriche, dimostrate da Euclide ne' suoi libri degli Elementi, sarei da dire troppo stolto o troppo caparbio, se non confessassi che il signor Sagredo mi ha persuaso col suo discorso. Passate perciò senz' altro, voi signor Salviati, a levarmi la curiosità di sapere come si possano misurar le distanze con la vista, non avendo altro strumento a mano, che un rettangolo o un quadrato. »

« SALVIATI. — Vogliasi misurare un' altezza, la cui radice non si ve-

desse, come saria l'altezza del monte EF (fig. 95). Tirato il piano dell'orizzonte DF, pongasegli aderente per uno de' suoi lati il quadrato o rettangolo DC, e traguardando dall'angolo D la sommità E segnisi la traccia della linea DC, ponendo in C uno scopo fisso, come sarebbe per esempio uno spillo. Dipoi, accostiamoci verso il monte, facendo strisciare il quadrato sul medesimo piano orizzontale in modo, che l'angolo, che prima era in D, torni in A, e si tenga conto della misura precisa dell'accostamento. Si traguardi nuovamente, e si trovi essere B il punto, dove vuole esser posto l'occhio, perchè lo spillo e la sommità E si trovino disposti lungo la medesima linea visuale. Traccisi, allo stesso modo che dianzi, la CB sopra la superficie del quadrato, e nessun'altra operazione si richiede, fuor che misurare le porzioni AB, CI sopra i lati dello stesso quadrato, per sapere quant'è l'altezza FE, la quale dunque troverete con questa semplicissima regola: Partite il fatto da CI in BD per AB, e l'avvenimento sarà l'altezza cercata. »

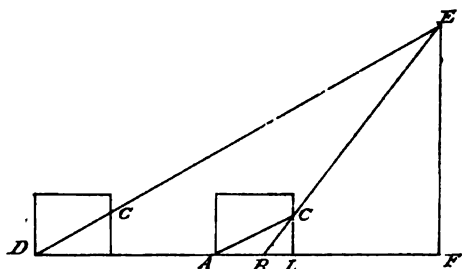



Figura 95.

« Sagredo. — Cotesta regola deve necessariamente conseguire dalla proporzione AB sta a CI, come BD ad EF, ciò che poi pare a me molto facile a dimostrarsi, osservando che, per essere AC parallela a DE, i triangoli simili ABC, DBE danno che come AB ad AC, così è BD a DE. Parimente, essendo IC equidistante da FE, per li triangoli simili ACI, DEF, AC sta a CI come DE ad EF, d'onde viene ad aversi direttamente la proporzione, sopra la quale il signor Salviati ha concluso la regola di misurare l'altezza del monte. »

« Salviati. — Per misurare poi una profondità, della quale non si vedesse la radice, come se fossimo sopra il monte BD (fig. 96), e volessimo misurare la sua altezza sopra il piano della campagna, non avendo noi altro strumento che il detto quadrato, opereremo con pari facilità in questo modo: Poniamoci in C, appiè di qualche casa, torre o albero, e preso il quadrato in mano, dall'angolo superiore del quale sia fatto pendere un filo, tirato da un sassolino o da altro peso, traguardiamo lungo la costola CI qualche segno, posto nel piano della campagna, come si vede nel punto A. Segnata poi sulla superficie dello strumento

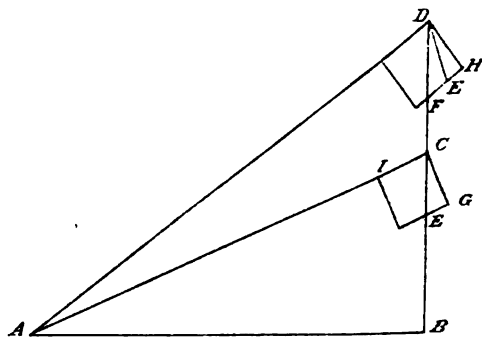



Figura 96.

la traccia, lungo la direzione del filo, ascendiamo alle finestre della casa, della torre, o sui rami dell'albero in D, misurando la quantità dell'ascesa CD, e di lassù traguardando come dianzi il medesimo punto A si segni la nuova direzione, che ha preso il filo, la quale sia per esempio FD. Misurate sopra la costola del quadrato le parti FE, EH, partite EH per AF, e l'avvenimento, moltiplicato per la misura dell'ascesa DC, vi darà senz'altro la profondità del monte che si voleva. »

« SAGREDO. — Intendo bene che la regola è stabilita sopra la proporzione FE ad EH, come DC a CB: ma non vedo chiari questa volta i principii, dai quali, voi signor Salviati, fate conseguire la verità annunziata. »

« SALVIATI. — Dal punto A, a cui tendono le linee delle mire CA, DA, conducete la AB equidistante dalla orizontale: essendo ABC angolo retto, saranno, per la XXXII del primo degli Elementi, GAB, ACB insieme uguali ad un retto, e perciò CAB uguale a un retto meno ACB. Ma anche ECG è uguale a un retto (tale essendo l'angolo del quadrato) meno ACB, dunque BAG, ECG, che è il medesimo di EDH, sono uguali, e perciò i triangoli EDH, BAC rettangoli saranno anche insieme equiangoli, e per la V^a del VI^o fra loro simili. »

« Passiamo ora a dimostrare, dietro le due citate proposizioni di Euclide, che equiangoli pure e perciò simili sono i triangoli FED, CAD. La ragione, perchè si diceva dianzi che ECG è angolo uguale a CAB, è quella medesima, per cui ora si dice che FDH è uguale a DAB, ond'è che facilmente vedrete, signor Sagredo, com'essendo FDE, CAD ciascuno la differenza di due angoli uguali, debbon essere tra loro uguali. L'angolo esterno DEF è uguale a un retto, con l'angolo EDH, ossia CAB: ma anche l'angolo esterno ACD è uguale a un retto, col medesimo angolo CAB; dunque i due detti esterni sono anch'essi fra loro angoli uguali. Il terzo angolo DFE, dovendo essere necessariamente uguale al terzo angolo ADC, non ci vuol altro perchè riteniate per dimostrata l'uguaglianza tra gli angoli, e la similitudine tra due triangoli proposti, nei quali dunque, dovendo intercedere la proporzionalità dei lati contrapposti agli angoli uguali, sarà EF ad EH, come DC a CB, che è il fondamento della regola insegnata. »

Questa parte di Dialogo è stata da noi ritrovata fra le carte, che il Panzanini consegnò al Bonaventuri, il quale non seppe ricavarne alcun utile per la sua edizione, sgomentato dall'apparirgli quelle stesse carte illeggibili, per le macchie sparse e per i margini troppo addentro corrosi. Fu tale anche la nostra apprensione in principio, ma poi, trovando che le lacune eran tali da potersi non difficilmente riempir con parole, se non identiche, equivalenti, non ci siam fatti scrupolo di rassettare così l'oggetto prezioso, piuttosto che gettarlo di nuovo. Che sia opera di Galileo nella dettatura e nell'andamento del discorso ci si rende certo dalla certezza, che abbiamo essere opera del medesimo quanto alla sostanza, avendosi la proposizione degli errori negli strumenti da livellare, e le altre del misurar l'altezza e la profondità colla vista, autografe, in quel modo che ora trascriveremo, e ne'luoghi che si citeranno,

quasi frettolosi appunti e materia buona già preparata dallo stesso Galileo a ricevere a suo tempo la bellezza della forma.

« Propositio XXIX, Theorema XXII. — *Quanto sarà più lungo lo strumento da livellare, tanto minore sarà l' errore, che si potesse fare.* »

« Sia la linea AC (nella figura 94 sopra segnata) quella del vero livello, e dato che, con lo strumento lungo quanto AC, la linea visuale s' alzi sopra l' estremità C quanto è la CD, con errore dal giusto livello quanto è la linea BG; dico che, se si adoprerà lo strumento più corto, come AF, e faccia nell' estremo F l' errore FE, uguale al CD, che l' errore BH, fatto dalla linea visuale ABH, rarà tanto maggiore del primo BG, quanto lo strumento AC è più lungo dello strumento AF. Sicchè, se il primo strumento più lungo sarà sei braccia, ed il primo errore sia di quattro braccia, e che il più corto strumento sia tre braccia, l' errore di questo sarà otto braccia. Onde, tanto quanto sarà più lungo lo strumento da livellare, tanto minore sarà l' errore che si potesse fare » (MSS. Gal., P. VI, T. II, fol. 13).

« Propositio XXX, Problema VII. — *Per mezzo del quadrato misurare l' altezza inaccessibile FE, sopra il piano dell' orizonte DE.* »

« Ut BA ad AC (riducendoci nuovamente sott' occhio la figura 95, che tien luogo delle molte parole non scritte da Galileo) ita BD ad DE. Ut autem AC ad CI, ita DE ad EF: ergo ut BA ad CI, ita BD ad EF » (MSS. Gal., P. V, T. II, fol. 136).

« Propositio XXXI, Problema VIII. — *Col medesimo strumento misurare la profondità CB, stando in C, e poi risalendo in D.* »

Proponendoci la figura 96, i principali tratti della soluzion del problema son segnati da Galileo con queste parole: « FE ad ED est ut DC ad CA. Ut autem ED ad EH, ita AC ad CB. Ergo ex aequali ut FE ad EH, ita DC ad CB. »

« Parti EH per EF, e tante volte quant' è l' avvenimento entra DC in CB » (ivi, fol. 137).

V.

I teoremi geometrici, rimasti fuor di luogo, nel condurre le dimostrazioni già pubblicate nel terzo e nel quarto dialogo delle due Scienze nuove, e i quali pensava Galileo negli ultimi anni della sua vita di salvar dall' oblio; si trovano autografi nel secondo tomo della parte quinta dei Manoscritti, dove son raccolte le bozze, e d' onde son ridotte a pulito per la stampa le principali proposizioni dei moti accelerati e dei proietti. Quanto ci abbiano giovato coteste carte, per ritrarre in storia il concetto, gli svolgimenti graduali, e le pene stesse del parto, ignorate dal pubblico, che solamente lo conobbe già esposto; lo possono sapere tutti coloro, i quali hanno letto il nostro pre-

cedente tomo, nei capitoli VI e IX, ma è da soggiungere che il presente argomento porge occasione a considerar meglio, insieme col fine, l' origine e il tempo di certi teoremi di Meccanica notati nel detto Manoscritto, i quali, accennando a un progresso del pensiero, ci mettono in gran curiosità di sapere perchè mai Galileo non gli riducesse nei loro luoghi più convenienti, per accrescer bellezza, e dar perfezione ai dialoghi da stamparsi.

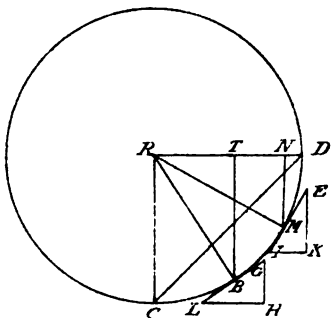
La questione, come s' intende bene, è della natura di altre già da noi risolute con dire che que' pensieri non occorsero in tempo, per inserirsi nella copia già consegnata nelle mani dell' Elzevirio: e come tale fu la sorte della proposizion che i momenti stanno in ragion composta delle distanze e dei pesi, e che la catena si dispone in una curva, non differente dalla parabola; tale è pur da dire essere stata la sorte di altre proposizioni, che ci occorrono a notare come un nuovo esempio dell' aver Galileo pensato già a promovere per sè stesso la sua propria scienza, nei medesimi modi, e anche prima che vi desse opera il Torricelli.

In un foglio del citato manoscritto, e sotto una figura, rappresentata nella nostra 97, si legge scritta questa nota: « Considera momentum in singulis circumferentiae quadrantis punctis imminui, pro ratione accessus puncti perpendicularis. ut T ad centrum » (MSS. Gal., P. V, T. II, fol. 131) e più sotto espressa in forma la proposizione seguente:

Figura 97.

« PROPOSITIO XXXII, THEOREMA XXIV. — *Momentum sub plano DC, ad totale momentum, est ut linea TR ad RD, ducta LB aequistante CD* » (ibid.).

La considerazione è bene antica nella storia della Scienza, non essendo sfuggita alla sagacia di Leonardo da Vinci, il quale, come forse si ricorderanno coloro, i quali hanno letto il nostro quarto tomo, a pag. 51, concludeva l' annunziata proposizione galileiana dall' osservar che la sfera tanto sta in equilibrio sostenuta da un filo, quanto posata in quella direzione sopra un piano inclinato. La cosa era affatto nuova però nella scienza pubblicata da Galileo, e come nuova apparve la prima volta in pubblico, nel lemma dopo la seconda proposizione del primo libro del Torricelli.

Una fra le eleganze della Meccanica torricelliana consiste nell' uso del semicerchio, per la invenzione delle medie proporzionali, di continuo maneggio per risolvere i problemi dei tempi relativamente agli spazi. Nè ci siamo poco maravigliati che Galileo non tenesse questa via compendiosa, e di così evidente eleganza: tanto più ripensando essere stato lui che, nella XXXIII del III dialogo, e nel Lemma alla X del IV, l' aveva aperta e additata allo stesso Torricelli. Dovremmo ora dire come si facesse quella maraviglia nell' animo nostro anche maggiore, quando prima ci abbattemmo a leggere, nel suddetto codice manoscritto, il problema XV del III dialogo, per risolvere il

quale, invocandosi il semicerchio, a mezzo quella prolissa dimostrazione stampata si sostituiva la snellezza del seguente processo:

« Propositio XXXIII, Problema IX. — *Quaeritur in AC* (fig. 98) *pars aequalis AB, quae conficiatur tempore aequali tempori AB.* »

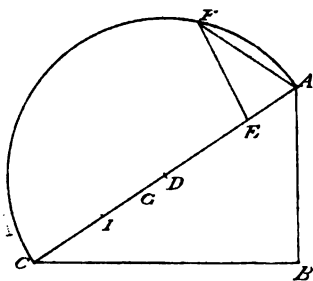



Figura 98.

« Ponatur AD aequalis AB, et circa AC semicirculus describatur, et ponatur AF aequalis dimidiae DC, et ab F demittatur perpendicularis FE, et EG ponatur aequalis AB. Dico EG, ex quiete in A, confici eodem tempore ac AB. »

« Media proportionalis inter CA, AG est AI, et CI, cui aequatur EF, media inter CA, AE.... » (ibid., fol. 55). E a questo punto è lasciata la dimostrazione interrotta, perchè doveva procedere da qui innanzi come dalla linea 23 della stampata a pag. 218 del tomo XIII nella edizion dell' Albèri.

L' uso del semicerchio rendeva facile e pronta a Galileo la soluzione di un altro problema, simile al precedente, e di cui sarebbesi potuta arricchire la raccolta delle proposizioni, lette nel terzo dialogo dal Salviati.

« Propositio XXXIV, Problema X. — *Quaeritur versus C* (fig. 99) *pars, quae conficiatur eodem tempore ac AD.* »

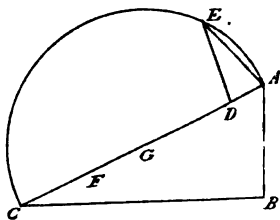
Figura 99.

« Sit tempus per AC, AC; tempus per AD erit AE. Ponatur GF aequalis AE, et ipsarum CA, AF tertia proportionalis sit AG. Dico GC esse quod quaeritur. »

« Cum enim tempus per totam AC sit AC, tempus per AG erit AF, media inter CA, AG, et reliqua FC erit tempus per GC. Est autem FC posita aequalis AE; ergo patet propositum » (ibid.).

Un corollario però, che immediatamente si soggiunge, par che riveli la fretta, dalla quale era frugato Galileo perchè non dovesse dimenticarsi la bella novità trovata: ed è a questa fretta da attribuir forse l' inconsideratezza delle seguenti parole, alle quali si riduce il detto corollario: « In qualibet latione spacium, quod conficitur versus finem eodem tempore, ac spacium versus principium, est medium proportionale inter totum lationis spatium, et ipsum spatium versus principium » (ibid). Ma la media proporzionale fra tutto lo spazio, e lo spazio verso il principio, è CF, la quale non rappresenta già lo spazio verso la fine, ma sì invece rappresenta il tempo, che il mobile impiega a percorrere lo spazio CG verso la fine.

La sollecitudine in ogni modo dello scrivere così, senza tornare sopra a considerare le cose scritte, è argomento che Galileo aspettava a farlo a miglior tempo, e quando si fosse al punto d' inserire i nuovi teoremi in una prossima aspettata ristampa delle due Scienze nuove. O forse pensava di rac-

coglierli nel dialogo novissimo, com' è certo che pensava di raccoglìervi il teorema dei momenti nelle varie parti della circonferenza, intorno a che troviamo il seguente frammento, fra le carte altre volte commemorate, e che dovettero servire per l' edizione del Bonaventuri :

« Sagredo. — Bellissima sopra le altre mi è sembrata la considerazione del nostro Accademico intorno al variar dei momenti nei singoli punti del quadrante di un circolo grande, mentre la sfera tocca il piano inclinato, sopra il quale sia obbligata a far la sua scesa, e perciò non vi dispiaccia, signor Salviati, di dimostrare secondo qual proporzione si succedano via via, dal contatto verticale all' orizontale su un piano, le dette variazioni di moto. »

« Salviati. — Immaginate che sia DBC (nella precedente figura 97) il quadrante, e B il punto del contatto sopra il piano LG, di cui sia GH l' altezza verticale. Sapete, per la Scienza meccanica posta dal nostro Amico a fondamento di queste sue nuove dottrine del moto, che l' impeto dello scendere in B sta all' impeto totale, come GH sta a GL. Ora, dal punto B conducete il raggio RB, e la BT perpendicolare all' orizontale RD : vedrete facilmente come il triangolo rettangolo RBT sia simile al triangolo rettangolo LGH, per cui l' impeto, o il momento totale, che si diceva stare al parziale in B come LG a GH, starà pure come RB, ossia RD, a RT sopra la medesima lunghezza del raggio orizontale. Passiamo a considerare un altro punto qualunque M, a contatto col piano IE, il quale sia lungo quanto LG, e alto quanto EK. Fatta la medesima costruzione, e il medesimo ragionamento che abbiamo fatto di sopra, troveremo essere il momento totale al parziale in M come RD a RN, e di qui si conclude che i momenti, nei punti B, M del quadrante, stanno come le porzioni RT, RN. Ora, perchè il discorso si applica a tutti e singoli i punti, compresi tra il contatto con la verticale in D, e il contatto con la orizontale in C; può dunque concludersi in generale che il momento nei singoli punti della circonferenza del quadrante diminuisce a proporzione dell' accostamento del punto perpendicolare, come T o N, al centro del circolo grande o della sfera. »

I riferiti esempi, che vengono ora ad aggiungersi ai parecchi altri, notati da noi nel corso di questa storia della Meccanica, ci attestano, non solo che Galileo si dava ogni sollecitudine di perfezionare i suoi trattati delle Scienze nuove, ma che sarebbero que' perfezionamenti in non poche parti riusciti tali, da rendere inutile l' opera de' suoi stessi discepoli. L' attestazione però non ci viene altro che per incidenza, in mezzo al proposito nostro presente, qual' è di raccogliere quelle preparazioni geometriche, che servirono a Galileo, per dimostrar nelle varie parti della Meccanica i più difficili teoremi. E che propriamente non sian queste altro che preparazioni, lo dice il titolo di *lemma,* scritto a molte in principio, come nella seguente, l' enunciazion della quale è preceduta dalle parole *redacta est res ad hoc lemma.*

E O A N B

Figura 100.

« Propositio XXXV, Theorema XXV. — *Sit EB* (fig. 100) *utcumque secta in A, et*

inter EB, BA media sit BO, et ut EB ad BA, ita sit OB ad BN. Dico EB, BO, BA, BN esse continuae proportionales. »

« Quia enim, ut EB ad BO, ita BO ad BA, ratio EB ad BA erit dupla rationis OB ad BA. Et quia, ut EB ad BA, ita OB ad BN (est autem ratio BE ad BA dupla rationis OB ad BA) erit quoque ratio OB ad BN dupla rationis BO ad BA. Verum ipsa ratio OB ad BN componitur ex rationibus OB ad BA, et AB ad BN; ergo ratio AB ad BN est eadem cum ratione OB ad BA. Ergo patet propositum » (MSS. Gal., P. V, T. II, fol. 62).

« Propositio XXXVI, Theorema XXVI. — *Sit linea AC* (fig. 101) *maior ipsa DF, et habeat AB ad BC maiorem rationem quam DE ad EF. Dico AB ipsa DE maiorem esse.* »

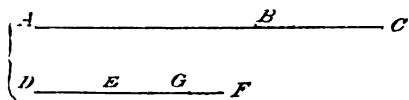



Figura 101.

« Quia enim AB ad BC maiorem rationem habet, quam DE ad EF; quam rationem habet AB ad BC hanc habebit DE ad minorem quam EF. Sit EG: et quia AB ad BC est ut DE ad EG, erit, ut CA ad AB, ita GD ad DE. Est autem CA maior DG; ergo et BA ipsa DE maior erit » (ibid., fol. 185).

« Propositio XXXVII, Theorema XXVII. — *Secta CA* (fig. 102) *utcumque in D, pars vero CD bifarium in I, dico quod, si fiat ut tota AC ad CI, ita ID ad DG, erit ut CA ad AI, ita IA ad AG* » (ibid., fol. 84 ad terg.).

C I G D A

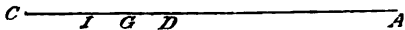



Figura 102.

Galileo dimostra la proposizione in due modi: il primo de' quali è indiretto, e consiste nel ridurre, così, l' ipotesi a tesi: Sia dunque, come si vuol dimostrare, CA : AI = IA : AG: dividendo, avremo CA — AI : AI = IA — AG : AG, ossia CI : AI = IG : AG, e per metastasi CI : IG = AI : AG. Da questa, con la prima data, si ottiene CA : CI = AI : IG, e perchè AI = AC — IC, IG = ID — DG, sarà CA : CI = AC — IC : ID — DG: ossia, moltiplicando gli estremi, ed eguagliandone il prodotto al prodotto dei medii, CA . ID — CA . DG = CI . AC — CI^2. Ora, essendo CI = ID, rimane CA . DG = CI^2, ossia AC : CI = CI : DG, o, sostituendo all' antecedente CI della prima ragione il suo uguale DI, AC : CI = DI : IG. Ma così era fatto, dunque il fatto era vero.

« Si totum CA, così propriamente dice Galileo, ad totum AI est ut ablatum IA, ad ablatum AG, erit reliquum CI, ad reliquum IG, idest reliquum DI, ad reliquum IG, ut totum CA ad AI, seu IA ad AG. Et per conversionem rationis ut AC ad CI, ita ID ad DG. Sed ita factum est, ergo etc. » (ibid.).

In altro modo diretto così Galileo dimostra la medesima proposizione: Essendo dato ID : DG = AC : CI, dividendo, avremo ID — DG : ID = AC — CI : AC, ossia IG : ID = AI : AC, e per essere DI = IC, e convertendo, CA : AI = IC : IG. Se poi si sostituiscono alle IC, IG le loro uguali CA — AI, AI — AG, avremo CA : AI = CA — AI : AI — AG,

e ragguagliando il prodotto degli estremi con quello dei medii, avremo AI . CA — AC . AG = AI . CA — AI², d' onde, riducendo, AC . AG = AI², ossia CA : AI = IA : AG, ch' è quello appunto, che dovevasi dimostrare.

« Quia ID ad DG, dice Galileo, est ut AC ad CI, erit per conversionem rationis ut CA ad AI, ita DI ad IG, seu IC ad IG. Cum itaque sit ut totum CA, ad totum AI, ita ablatum CI ad ablatum IG, erit ut reliqua IA, ad reliqua AG, ut totum CA, ad totum AI, quod erat ostendendum » (ibid.).

« PROPOSITIO XXXVIII, PROBLEMA XI. — *Faciendum ut AI ad IG* (nella medesima figura 102) *ita ID ad GD* » (ibid., fol. 84).

È dato AC : CI = ID : DG, e dividendo AC : AC — CI = ID : ID — DG. Fatte le sostituzioni, e ponendo IC in luogo di ID, avremo AC : AI = CI : GI. Prendendo, invece di tutte le AC, AI, le loro parti, sarà AC + CI : AG + IG = CI : GI, e fatto il prodotto degli estremi e de' medii, e riducendo, AI . GI = CI . AG, d' onde AI : AG = CI : GI, o, per essere CI = DI, AI : AG = DI : GI. Dividendo, sarà in ultimo AI : AI — AG = DI : DI — GI, e, dopo la sostituzione, AI : GI = DI : DG, come dovavasi fare. Ma ascoltiamo le parole proprie di Galileo.

« Ponatur IC aequalis ID, et fiat ut AC ad CI, ita ID ad DG. Erit, per conversionem rationis, ut CA ad AI, ita DI ad IG, seu CI ad IG. Et cum totum CA, ad totum AI, ita ablatum CI ad ablatum IG; erit reliqua IA, ad reliquum AG, ut ablatum CI, seu DI, ad IG. Et, per conversionem rationis, ut AI ad IG, ita ID ad DG » (ibid.).

PROPOSITIO XXXIX, THEOREMA XXVIII. — *Sia l' angolo retto AXC* (fig. 103), *comunque diviso dalla XM, alla quale si conduca da A una per-*

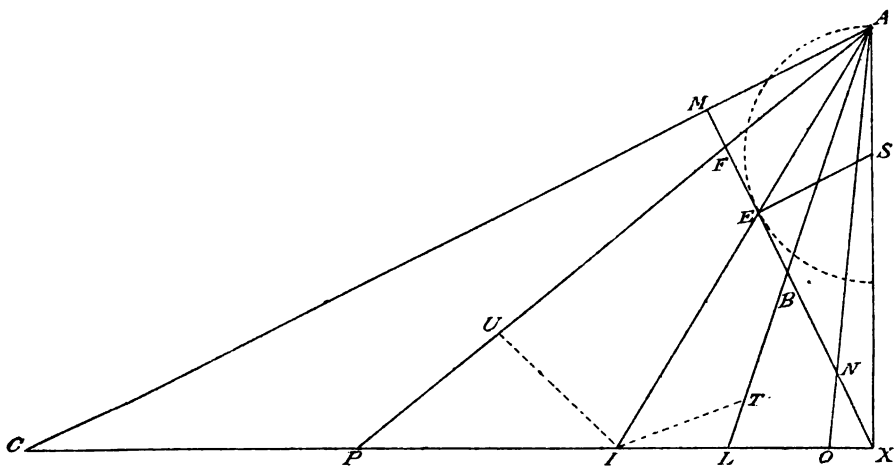



Figura 103.

pendicolare, che la seghi in M, e si prolunghi infino all' incontro della XC in C. Sia poi diviso l' angolo CAX dalla AI in due parti uguali, e di qua

e di là da essa AI si conducano linee a piacere AL, AO, AP, ecc., le quali tutte saranno intersecate dalla XM. Dico che il rettangolo sotto la linea AI, e sotto la sua intersezione dalla parte dell' angolo A, sarà il minore di tutti gli altri rettangoli sotto le altre linee, e le loro intersezioni dalla medesima parte.

« Rectangulum IAE esse omnium minimum LAB, OAN, PAE, etc., cum angulus CAX bifariam sectus sit, pendet ex eo, quod angulus AEM trianguli AEM est aequalis angulo AIX trianguli AIX, et, quod consequens est, minor omnium ALX, AOX, etc., et maior omnium API, ACI, etc. »

« Probabitur ergo sic rectangulum IAE minus esse rectangulo LAB: Cum enim angulus AME sit aequalis angulo AXI, et angulus MAE aequalis angulo XAI (est enim angulus A bifariam sectus) ergo reliquus MEA reliquo XIA aequabitur. Sed angulus AEM maior est angulo ABE, ergo angulus AIL est maior angulo EBA. Si igitur fiat angulus AIT angulo ABE aequalis, erit, ob triangulorum similitudinem, ut IA ad AT, ita BA ad AE, et rectangulum IAE rectangulo TAB aequale. Ergo rectangulum IAE est minus rectangulo LAB. »

« Similiter ostendetur esse quoque minus rectangulo PAF. Cum enim angulus AEF, idest AIL, sit maius angulo API, erit reliquus AFE minor reliquo AIP. Si igitur constituatur AIU angulo ipsi AFE aequalis, erit rectangulum UAF rectangulo IAE aequale, ex quo patet propositum. »

« *Coroll. I.* — Demonstrabitur etiam quod rectangula talia, quae a lineis ex A ad lineam CX ductis, et a linea XM sectis, ea, quae fiunt a lineis vicinioribus ipsi AEI, semper minora sunt illis, quae a remotioribus describuntur lineis. »

« *Coroll. II.* — Constat insuper quod media inter IAE est omnium mediarum minima, quae cadunt inter PAF, LAB, etc. » (ibid., fol. 30 ad tergum).

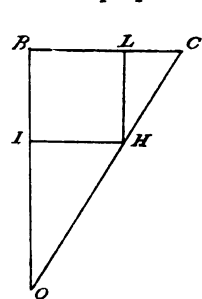
Accenna Galildo in fine al manoscritto a un' altra dimostrazione dello stesso teorema, che, per mezzo della descrizione di un semicerchio, e dietro le note proprietà delle tangenti e delle recanti di lui, riesce assai più breve.

« Aliter brevius: Posito angulo AES aequale angulo EAM erit linea ES parallela AM. Ergo perpendicularis ad MX: eritque aequalis SA. Quare, centro S et intervallo SE, circulus tanget MX in E, unde patet propositum » (ibid., fol. 130 ad tergum).

Figura 104.

PROPOSITIO XL, PROBLEMA XII. — *Nel triangolo OBC (fig. 104) rettangolo in B, divisa l' ipotenusa CO in parti date, e data la distanza dal punto H della divisione al cateto BO; trovare la lunghezza di esso cateto.*

Condotta dal punto H la LH, parallela a BI, ecco come Galileo risolve il facile problema: « Detur IH, dabitur IO, per ablationem quadrati IH ex quadrato HO. Deinde, ablata IH ex BC, datur LC, cuius quadratum, ablatum ex quadrato CH dato, dat quadratum LH, et ipsam LH, idest BI. Ergo dabitur tota BO (ibid., fol. 132 ad t.).

PROPOSITIO XLI, THEOREMA XXIX. — *Alle estremità del diametro AF* (fig. 105) *condotte le tangenti AB, FE, e la secante BE,* « *si ut EB ad BD, ita est DB ad BC, erit ita ED ad DC: et quia EB est dupla BC, erit quadratum ED duplum quadrati DC* » (idid., fol. 158).

Figura 105.

Se EB : BD = BD : BC, dividendo avremo EB — BD : BD = BD — BC : BC, ossia ED : BD = DC : BC, e per metastasi ED : DC = BD : BC, dalla quale e dalla prima s' ha EB : BD = ED : DC. Da questa, che conferma la verità della prima parte del teorema, inalzata a quadrato, ed osservando che BD^2 = EB . BC, se ne deduce EB^2 : EB . BC = ED^2 : DC^2, ossia EB : BC = ED^2 : DC^2, che conferma la verità dell' altra parte dello stesso teorema, perch' essendo EB il doppio di BC, anche ED^2 sarà il doppio di DC^2.

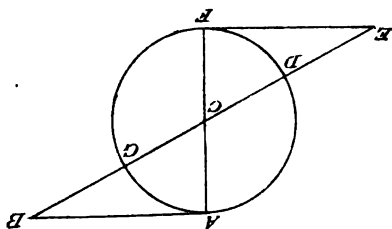
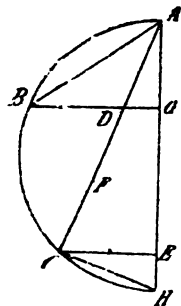



Figura 106.

PROPOSITIO XLII, THEOREMA XXX. — *Nel semicircolo ABC* (fig. 106) *sia condotta la corda AB, e dalla estremità di lei la BG perpendicolare al diametro: condotta un' altra corda qualunque, come AC, la quale tagli in D quella stessa perpendicolare, dico che il quadrato di AB è uguale al rettangolo di AC in AD.*

Il quadrato di AB è uguale ad AH . AG. Ma condotta la corda CH i triangoli simili ACH, ADG danno AH : AD = AC : AG, dunque AH . AG è uguale ad AD . AC, e perciò il quadrato di AB è uguale al rettangolo di AC in AD, come Galileo dimostra con queste brevi parole: « AB est media inter CA, AD: nam rectangulus CAD aequatur rectangulo HAG. Si enim ducatur HG, erit triangulus ACH simile triangulo ADG » (ibid., fol. 35).

« PROPOSITIO, XLIII, THEOREMA XXXI. — *Sit IC* (fig. 107) *perpendicularis ad diametrum circuli AB, ductaque a puncto A quacumque linea, circumferentiae et perpendiculari CI occurrens, ut AID, AD, ADI, dico rectangulum DAI rectangulo BAC esse aequale* »

« Si enim iungatur recta DB, erit angulus in semicirculo, ad punctum D, rectus, estque angulus C quoque rectus, communis autem angulus ad A. Ergo triangulorum aequiangulorum DAB, CAI latera erunt proportionalia, utque BA ad AD, ita IA ad AC. Ergo patet propositum » (ibid.).

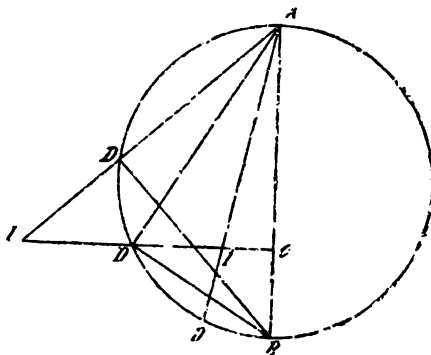



Figura 107

Propositio XLIV, Theorema XXXII. — *Sit circulus, cuius diameter AB* (fig. 108) *et ipsi parallela tangens CE, et ex termino B quaelibet linea BO in circulo applicetur. Dico perpendiculares, quae a termino B et O ipsi BO accommodantur, protractas, de linea CE partem diametro circuli aequalem semper intercipere.* »

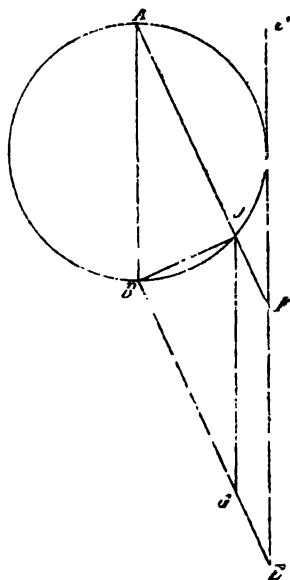



Figura 108.

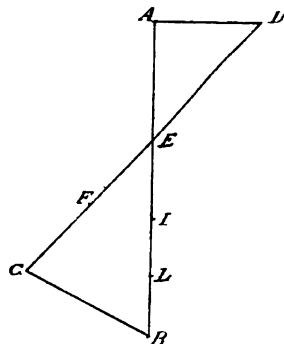
« Iungantur enim A, O, et extendatur ad tangentem in F, quae ad BO erit perpendicularis, cui ex B parallela sit BE: demonstrandum FE diametro circuli esse aequalem. Id autem constat, quia in parallelogrammo ABEF latera AB, FE opposita aequalia sunt, ex Elementis. »

« Vel dicas quod ducta, ex O, OG parallela ipsi AB, et BG perpendiculari ad BO, abscindet semper OG aequalis diametro circuli, quod patet ex triangulis AOB, OBG similibus et aequalibus » (ibid., fol. 68).

« Propositio XLV, Theorema XXXIII. — *Est LI ad IE* (fig. 109) *ut IA ad AE*; *CF autem ad FE, ut FD ad DE, et sunt EF, EI aequales: probandum est LE maiorem esse quam CE* » (ibid., fol. 61).

Abbiamo $\frac{IE}{EA} > \frac{FE}{ED}$ perch' essendo i numeratori uguali per supposizione. EA è minore del denominatore ED. Componendo, sarà $\frac{IE + EA}{EA} > \frac{FE + ED}{ED}$, ossia $\frac{AI}{EA} > \frac{FD}{ED}$. Son dati $\frac{IA}{AE} = \frac{LI}{IE}$, $\frac{FD}{DE} = \frac{CF}{FE}$; dunque $\frac{LI}{IE} > \frac{CF}{FE}$, e componendo, $\frac{LE}{EI} > \frac{CE}{EF}$. Ma $EI = EF$, dunque $LE > CE$, come dimostra Galileo con discorso simile a questo nella sostanza, benchè alquanto differente nella forma.

Figura 109.

« Quia EA minor est ED, IE ad EA maiorem habet rationem, quam FE ad ED. Et, componendo, IA ad AE maiorem rationem habet quam FD ad DE. Verum, ut IA ad AE, ita est LI ad IE. Ut autem FD ad DE, ita CF ad FE. Ergo LI ad IE maiorem rationem habet, quam CF ad FE. Et, componendo, LE ad EI maiorem habet rationem, quam CE ad EF. Sunt autem EF, EI aequales; ergo LE maior est quam CE » (ibid.).

« Propositio XLVI, Theorema XXXIV. — *Fiat ut BA* (fig. 110), *cum dupla AC, ad AC, ita CA ad AE, et ut BA ad AC, ita EA ad AR, et*

ab R ducatur perpendicularis RX. Dico CR, ER, RA esse proportionales et amplius EA, XA aequales. »

« Quia enim ut BA, cum dupla AC, ad AC, ita CA ad AE, dividendo erit ut BA cum AC ad AC, ita CE ad EA. Et quia ut BA ad AC, ita EA ad AR, erit componendo ut BA, cum AC, ad AC, ita ER ad RA. Sed ut BA, cum AC, ad AC, ita CE ad EA, ergo ut CE ad EA, ita ER ad RA, et ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe CR ad RE. Sunt itaque CR, ER, RA proportionales » (ibid., fol. 69).

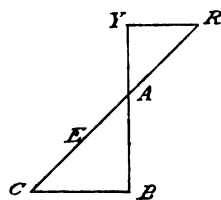



Figura 110.

Dalla CE : ER = EA : RA abbiamo componendo CE + ER : ER = EA + RA : RA, ossia CR : ER = ER : AR.

« Et amplius: quia ut BA ad AC, ita positum est EA ad AR, et, propter similitudinem triangulorum, ut BA ad AC, ita XA ad AR; ergo ut EA ad AR, ita XA ad AR. Sunt itaque EA, XA aequales » (ibid.).

PROPOSITIO XLVII, THEOREMA XXXV. — *Nel quadrante AEB* (fig. 111) *tirata la corda AB, e la secante AC, sopra la quale si costituisca il punto S, in modo che AS sia terza proporzionale fra AC, AE; dico che AB ad AS è come il cubo di BA al cubo di AE.*

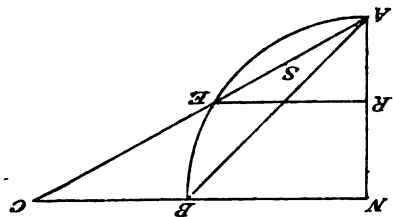



Figura 111.

Si suppone da Galileo il primo Lemma alla proposizione XXXVI del terzo dialogo delle due Scienze nuove, in cui si dimostra che il quadrato di AB è uguale al rettangolo di CA in AE, d'onde $AB^2 : AE = AC : 1$, ossia $AB^2 : AE^2 = AC : AE$. E perchè AS è terza proporzionale dopo AC, AE avremo $AB^2 : AE^2 = AC : AE = AE : AS$. Ma per le note proprietà geometriche è, chiamato D il diametro di tutto intero il cerchio, $AC^2 = D . AN$, $AE^2 = D . AR$, dunque $AB^2 : AE^2 = AE : AS = AN : AR$. Moltiplicando la proporzione $AB^2 : AE^2 = AE : AS$ per l'identica $BA : AE = BA : AE$, se ne conclude all'ultimo $AB^3 : AE^3 = BA . AE : AS . AE = BA : AS$, ch' è la proposta di Galileo, da lui stesso dimostrata con queste parole, che trascriviamo.

« Ut CA ad AB, ita AB ad AE. Ergo ut quadratum CA, ad quadratum BA, vel quadratum BA, ad quadratum AE, ita CA ad AE, vel AE ad AS. Fiet autem hoc, si ipsarum CA, AE accipiatur tertia proportionalis AS. At quadratum BA, ad quadratum AE, est ut rectangulum ex diametro in AN, ad rectangulum ex diametro in AR, quibus sunt aequalia; ergo ut EA ad AS, ita NA ad RA, idest altitudo lineae BA, ad altitudinem lineae AE. Linea ergo BA ad AS est ut cubus BA ad cubum AE » (ibid., fol. 188).

« PROPOSITIO XLVIII, THEOREMA XXXVI. — *Productis lateribus AB, AC* (fig. 112) *versus D, E, et erectis perpendicularibus CG, BF, ponatur AN aequalis AC, et ut AB ad BN, ita fiat AL ad LC, et ipsi AL sece-*

tur aequalis AI, ipsarumque AC, IB tertia proportionalis sit CE. Et diametro AE semicirculus ducatur, secans CG in G, ductaque per E parallela ED, occurrenti AB protractae in D, alter semicirculus describatur secans perpendiculum BF in F, et iungatur FA. »

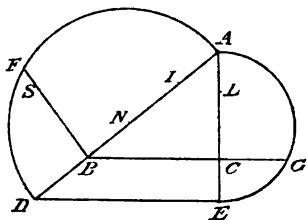



Figura 112.

« Primo, constat ut AB ad BD, ita esse AC ad CE, et mediam BF, ad mediam CG, ut AB ad AC » (ibid., fol. 55).

Consta la prima parte dall'essere BC, DE parallele, per cui le due linee AD, AE son tagliate in modo, da dare la proporzione $AB : BD = AC : CE$, d'onde $BD = \frac{AB \cdot CE}{AC}$, $CE = \frac{BD \cdot AC}{AB}$. Le due medie poi BF, CG ne' semicerchi danno $BF : CG = \sqrt{AB \cdot BD} : \sqrt{AC \cdot CE}$, d'onde, sostituiti i valori di BD, CE, consta la verità della seconda parte dell'asserto, che cioè $BF : CG = AB : AC$.

« Secundo, constat insuper IB esse aequale CG » (ibid.).

È infatti $IB^2 = AC \cdot CE$, per costruzione, ma anche $CG^2 = AC \cdot CE$, per le note proprietà del circolo, dunque $IB = CG$.

« Tertio, cumque FB maior sit CG, ponatur BS ipsi CG aequalis. Et quia ut BA ad AC, seu AN, ita FB ad CG, seu BS, erit, ut AB ad BN, hoc est AL, ad LC, ita BF ad FS: et rectangulum sub FB, LC erit aequale rectangulo sub AL, FS, seu sub AI, FS » (ibid.).

Ci è constato in primo luogo $AB : AC = FB : CG$, ossia $AB : AN = FB : CG$. Dividendo e sostituendo, avremo $AB : BN = FB : FS = AE : LC$, d'onde $FB \cdot LC = AL \cdot FS = AI \cdot FS$, in conformità con l'ultima conclusione pronunziata da Galileo. Che poi fossero così fatte conclusioni geometriche preparate per dimostrare la XXXIV proposizione meccanica, scritta nel terzo dialogo delle due Scienze nuove, apparisce manifesto dalla lettura dello stesso Dialogo, e vien confermato dalla seguente nota, scritta in margine al foglio ultimamente citato: « Totum opus videtur esse tale: Secetur AN aequalis AC, et, ut AB ad BN, ita fiat AL ad LC, et ponatur AI aequalis AL, et, ut AC ad IB, ita fiat IB ad CE. Erit CE linea quaesita, nempe pars superior perpendiculi, ex qua mobile conficiet ipsam cum AB, tempore eodem ac solam AB. »

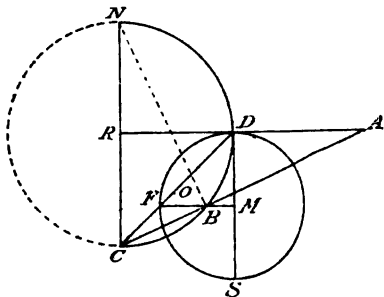



Figura 113.

Propositio XLIX, Theorema XXXVII. — *Sia il cerchio NDC* (fig. 113) *al diametro NC del quale sia condotto perpendicolare il raggio RD, che prolungato venga preciso in A dalla secante CBA. Dal punto D si conduca DS parallela al detto diametro, e dal punto M, metà della stessa*

DS, si alzi la perpendicolare MF, che incontrerà in F la corda CD. Essendo l' angolo FDM semiretto, sarà DM uguale a FM, e col centro in M, intervallo DM, si descriva la circonferenza DFS. Fatto ciò, Galileo nota le tre seguenti proprietà geometriche, che conseguono da una tal costruzione:

« I. — Rectangulum CDF aequatur rectangulo RC, DS; rectangulum ACB aequatur rectangulo RCN; ergo rectangulum CDF, ad rectangulum ACB, est ut diameter DS ad diametrum NC » (ibid., fol. 149 ad terg.).

Infatti i triangoli simili RDC, DFS danno RC : DF = CD : DS, d'onde DF . CD = RC . DS. E condotta la NB, i triangoli simili NBC, RAC danno AC : CN = RC : CB, d'onde AC . CB = CN . RC. E perciò avremo DF . CD : AC . CB = RC . DS : RC . CN, ossia DF . CD : AC . CB = DS : CN, com' aveva concluso Galileo.

« II. — Ut autem CN ad DS ita CD ad DF, ob similitudinem portionum DBC et DF » (ibid.).

Dall' essere infatti $NC^2 = 2\,DC^2$, $DS^2 = 2\,DF^2$, ne consegue CN : DS = DC : DF.

« III. — Ut autem CD ad DF, ita quadratum CO ad quadratum OF » (ibid.).

È stato fatto tacitamente CD : DO = DO ; DF. Dividendo, avremo CD — DO : DO = DO — DF : DF. Sostituendo e trasponendo, CO : OF = DO : DF, la quale equazione inalzata a quadrato dà $CO^2 : OF^2 = DO^2 : DF^2$. Ma $DO^2 = CD . DF$, per la prima, dunque $CO^2 : OF^2 = CD . DF : DF^2$, ossia $CO^2 : OF^2 = CD : DF$, che conferma la verità dell' ultima conclusione di Galileo.

PROPOSITIO L, THEOREMA XXXVIII. — *Abbiansi nel circolo EIC* (fig. 114) *le tangenti ED, BC parallele, e la secante DB disposta in modo che, inalzatale sopra, da A centro, una perpendicolare, questa incontri in F la ED prolungata, cosicchè, descritta col raggio FA la circonferenza AOP, la parte esterna OD torni uguale alla ID. Dico che la somma delle linee DF, FA, alla somma delle DA, AE sta come il quadrato di AD, o di AB, al quadrato di ED o di BC.*

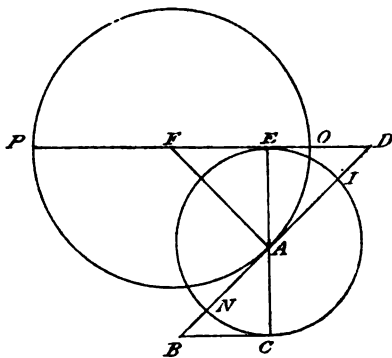



Figura 114.

Essendo, per la XXXVI del terzo di Euclide, $PD . DO = AD^2$, $ND . DI = ED^2$, avremo dunque, rammemorandoci che DO, DI sono uguali, $PD : ND = AD^2 : ED^2$. Ma PD = DF + FA, ND = EA + AD, e AD, ED sono uguali ad AB, BC: dunque $DF + FA : EA + AD = AD^2 : ED^2 = AB^2 : BC^2$; come in modo simile Galileo stesso dimostra col seguente discorso, che la brevità del nostro renderà forse più chiaro:

« Si excessus OD aequatur DI, rectangulum PDO, idest quadratum DA,

ad rectangulum NDI, idest ad quadratum DE, erit ut linea PD ad DN. Quadratum autem DA, ad quadratum DE, est ut quadratum AB, ad quadratum BC; ergo faciendum est ut PD ad ND sit ut quadratum AB, ad quadratum BC. PD autem componitur ex duobus mediis DF, FA, et ND constat ex duabus EA, AD, ita ut duae DF, FA, ad duas DA, AE, sint ut quadratum AB, ad quadratum BC » (ibid., fol. 99).

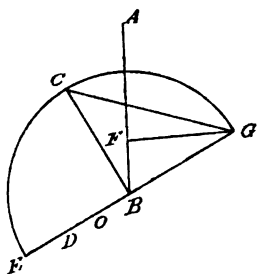



Figura 115

« Propositio LI, Problema XIII. — *Dato perpendiculo AB* (fig. 115) *et inflexa EBG, cui perpendicularis sit BC; oportet semicirculum per E describere ita ut excessus mediae inter EG, GB, quae est GC, seu GD, una cum perpendiculo BF, secto a perpendiculari GF, sint aequales mediae inter EB, BG, nempe BC.* »

« Sit factum. Si CB aequatur DB, BF, posita communi BG, duae CB, BG, erunt aequales duabus DG, BF; idest CG, BF » (ibid., fol. 97 ad tergum).

Se CB = DB + BF, aggiunta la comune BG, sarà BG + CB = DB + BF + BG = DG + BF, d'onde CB = DG + BF — BG, e perciò BG è l'eccesso cercato.

Propositio LII, Theorema XXXIX. — *Nel quadrante TCN* (fig. 116) *prendasi una porzione TCD, dall'estremità D della quale si abbassi la DX perpendicolare al diametro TM, e condotta la DF, ad esso diametro parallela, se le descriva sopra il mezzo cerchio DCF. Condotta la corda DT, e la DC prolungata in S, infino all'incontro con la tangente TS, presa poi la DE media proporzionale fra DS, DC, se si congiungano con E i punti S, B, C, dico che EB sarà bissettrice dell'angolo SEC.*

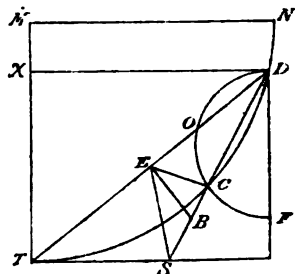



Figura 116.

Galileo stette a principio incerto se ciò fosse vero, e in capo a un primo tentativo di dimostrazione scriveva: *Credo angulum SEC bifariam esse sectum per EB* (ibid., fol. 129), incominciando a ragionare, per veder se la cosa riusciva, in questo modo:

« Angulus TDS duabus circumferentiis OC, CT insistit; ergo illae sunt similes, et circumferentia DO similis est DCT. Ergo, ut linea DO ad OC, ita DT ad TC. Et quia rectangulum DSC aequatur quadrato ST, ergo, ut DS ad ST, ita TS ad SC. Ergo triangula DST, TSC similia sunt, quibus et triangula ODC, ICB similia sunt.... » (ibid.).

Trovatosi da un tal discorso aggirato, Galileo lasciò la dimostrazione interrotta, e poco di poi tornatoci sopra, ebbe dalle seguenti brevi considerazioni la desiderata conferma della propria opinione. Se DS : DE = DE : DC, dunque i triangoli SDE, DEC son simili. Ed essendo fatta DE = DB, da

DS : DB = DB : DC avremo, dividendo, SD — BD : SD = DB — DC : DE, d' onde, per sostituzione e per trasposizione, SD : DE = SB : BC. Ma, per i detti triangoli simili, SD : DE = SE : EC, dunque SE : EC = SB : BC, ond' è, per la terza del Sesto, EB veramente bissettrice.

« Quia est, scrive Galileo, ut SD ad DE, ita DE ad DC, ergo triangulus SDE similis ert triangulo DEC, et, ut SE ad EC, ita SD ad DE, et ita est SB ad BC: ergo angulus CES bifariam secatur a linea EB » (ibid.).

A queste proposizioni di Geometria elementare si può aggiungere la seguente, che solamente annunziamo per essere stata già trascritta dall' autografo galileiano, a pag. 450 del nostro Tomo quarto:

« PROPOSITIO LIII, THEOREMA XL. — *Sit parabola parallelogrammo inscripta: dico parallelogrammum parabolae esse sesquialter; hoc est esse triplum reliqui spacii extra parabolam* » (ibid., fol. 102 ad tergum).

D' altri teoremi di Geometria superiore non ci sono occorsi, nell' esame dei manoscritti, gli esempi, e dall' altra parte, nella terza giornata dei Massimi sistemi, e nella terza Lettera solare può vedersi come Galileo risolva per le lunghe i triangoli, calcolandone le funzioni trigonometriche dei lati, senza l' uso dei logaritmi. Di qui lo studio di lui di ridurre, quanto fosse possibile, la Trigonometria alla Geometria semplice, come potrebbe mostrarsi dal comparare il seguente incominciato esercizio manoscritto con quel che leggesi stampato nella terza Lettera al Velsero (Alb. III, pag. 479-83), per dimostrare le incongruenze, che nascerebbero nelle proporzioni dei moti tra il Sole e le sue macchie, quando queste si ponessero non aderenti alla superficie, ma rivolgentisi in una sfera, concentrica col globo dello stesso Sole.

Riferendoci alla figura, impressa in ordine la V, nella Tavola X alligata infine al Tomo citato dell'Albèri, son disposti in una tavoletta i seguenti valori: IO = 1000, ID = 974, DO = 227, DA = 500, AE = 2203, DL = 866. Di contro alla quale tavoletta sta scritto:

« Sian CA, AB, AD note: sarà nota anco DE e BF. E perchè DH è nota, sendo uguale a DE, ed essendo il triangolo HID simile al noto FBC, sarà noto DI, ed è nota DL, che sono i sini degli archi HN, MN, li quali però saranno noti, e le loro proporzioni. »

« Sia il globo solare, il cui semidiametro AB, e sia l' arco BL gr. 30: sarà la linea LD 866, di quali AB è 1000. Prima è manifesto che due punti B, L, posti nella superficie, passeranno i sini LD, BA nell' istesso tempo. È inoltre chiaro che, ponendogli nelle linee DE, AC, prolungate in infinito, i punti E, C traverserebbono le medesime linee BA, BD in tempi proporzionali ad esse, sicchè, non si dando tal distanza infinita, i transiti per BA, LD si faranno in tempi, che fra di loro haranno minor proporzione, che non ha la linea BA alla DL. E perchè, sendo DL 866, AB è 1000, et il tempo per LD, al tempo per BA, deve essere come 7 a 8; facciasi come 7 a 8, così 866 a un altro, che sia DI: sarà 947, e la rimanente IG sarà 53. Adattisi la IO uguale a GD, e per A passi la parallela AE, che concorra con DC in E, e, centro A, facciasi il cerchio CEF.... » (ivi, fol. 133).

Ma perchè meglio possa darsi un' idea de' processi trigonometrici di Galileo, riferiremo la formula, per così dire, che servì ai calcoli del trovar le distanze assegnate, e da assegnarsi alla stella, della quale si tratta nei Massimi sistemi, verso il mezzo della terza giornata. Il problema, per risolvere il quale in tutti i casi si vuol trovar la regola dell' operazione, può rappresentarsi in questa forma:

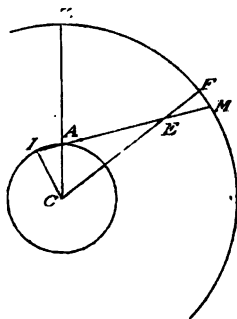
Propositio LIV, Problema XIV. — *Essendo dati gli angoli IAC, AEC* (fig. 117) *ed essendo il lato AC noto, notificare il lato EC.*

I canoni elementari della Trigonometria danno EC : AC = sen (180 — IAC): sen AEC = sen IAC : sen AEC, in conformità con quel che conclude Galileo nel seguente manoscritto, al quale è premessa una tale osservazione:

Figura 117.

« Qui sotto son notate alcune computazioni, per le quali si trova la lontananza della Stella dal centro, le quali computazioni son fatte sopra la parallasse delle altezze meridiane minime, e sopra la distanza veduta della Stella dal vertice. Il progresso dell' operazione è tale: »

« La distanza dal vertice MZ mi dà l' angolo IAC, e la parallasse data è l' angolo IEC. L' angolo A mi dà il sino IC, nelle parti delle quali il sino tutto AC è 100,000. E parimente l' angolo E mi dà il sino della medesima IC, nelle parti delle quali il sino tutto CE è 100,000. Ora, per la regola aurea, diremo: Se quando IC, come sino dell' angolo E, è tanto, la CE è 100,000; quando IC, come sino dell' angolo A, è tanto, quanto sarà CE? Moltiplica dunque il sino di A per 100,00, e parti l' avvenimento per il sino di E, et arai la distanza CE nelle parti, delle quali il semidiametro CA è 100,000. Onde, dividendo di nuovo il quoziente trovato per 100,000, avremo quanti semidiametri CA sono nella CE. E per fare l' operazione brevissima, senz' altre moltiplicazioni, basta partire il sino dell' angolo A per il sino dell' angolo E, ed il quoziente sarà il numero de' semidiametri CA contenuti nella distanza CE. Vegghiamo ora con tal regola quanta venga l' altezza della Stella, secondo tutte le osservazioni, cominciandoci da Ticone » (MSS. Gal., P. III, T II, fol. 14).

Qui termina dei *Problemi matematici* la promessa raccolta, l' intenzion della quale essendo, come si disse, non quella solamente di dare un' idea delle materie, che aveva Galileo da ridurre nel suo Dialogo novissimo, ma di servire alla storia intima del pensiero di lui, e della Scienza; se ci siamo in qualche parte riusciti è da attribuirlo all' aver noi per i primi, e con insolita diligenza, consultati i preziosi manoscritti. Anzi di quell' esame non abbiamo dato altro che un saggio, per provocare la diligenza altrui, che dovrebbe riuscire più fruttuosa della nostra, e di quella di certi novelli editori, che, copiando materialmente senza nulla curarsi d' intendere quel che leggono, riducono a stupidi enimmi i responsi dell' Oracolo venerato.

CAPITOLO V.

Del trattato dei Centri di gravità di Evangelista Torricelli

SOMMARIO

I. Dei primi esercizi giovanili intorno ai libri baricentrici di Archimede. — II. Dell' invenzione de centro di gravità nelle porzioni di parabola e di cerchio. — III. Di alcune nuove invenzioni baricentriche, per via degli indivisibili. — IV. Del centro di gravità degli archi di cerchio. e delle fallacie del Guldin intorno ai centri delle callotte, delle zone e de' settori sferici, notate dal Cavalieri, dietro le dimostrazioni avute dal Torricelli. — V. Della diversità del metodo del Keplero da quello del Cavalieri, e come fosse questo applicato dal Torricelli, per ritrovare in vario modo il centro di gravità del cono, e di altre figure. — VI. Del centro di gravità dei solidi scavati — VII. Del centro di gravità dei solidi vasiformi. — VIII. Del centro di gravità dei solidi conoidali. — IX. Del centro di gravità dei solidi cavalierani, e della cicloide.

I.

All' opera di ridurre alla maggior perfezione che fosse possibile i trattati delle nuove Scienze del moto, intorno a che abbiamo veduto le sollecite cure datesi negli ultimi anni della sua vita da Galileo, successe quel Torricelli, che abbiamo trovato in Arcetri a piè del letto, dove il vecchio maestro languiva, quasi rigoglioso rampollo dell' albero, che è già per cadere. L' eccellenza del successore si poteva fin d' allora giudicar dai due libri del moto dei gravi e dei proietti, i quali erano già stati scritti, e due anni dipoi, nel pubblicarli, si davano come una diligente respigolatura nel campo altrui. In fine al volume però prometteva l' Autore ai lettori, ai quali non fossero quelle cose dispiaciute, che avrebbe aggiunto un trattato dei centri di gravità delle superficie e dei solidi, come parti rimaste intatte nei libri del Commandino, del Valerio e dello stesso Galileo. Il Mersenno poi si profferse di far quel trattato stampare a Parigi, nè il Torricelli mostrò di ricusare il favore, rispon-

dendo alla liberale profferta così fatte parole: « Inventa mea geometrica mechanica, hoc est nugas illas, quas inveni, sed non digessi, circa centra gravitatis figurarum, Geometris, siquidem finita et in ordinem redacta habebo, fortasse favorem et diligentiam, quam mihi tanta liberalitate offers, non recusabo (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 76).

Si prometteva dunque dal Torricelli una cosa, che gli avrebbe dovuto accrescere di molto il merito e la gloria, perchè, dall' umile condizione di respigolatore nel capo altrui, veniva a sollevarsi all' altezza di cultore nel campo proprio. Ma pur egli confessa di andar languidamente a conquistare quel merito e quella gloria, distratto dagli esercizi dell' arte di formare i vetri per i Canocchiali, che venivano a lusingarlo con lodi molto più ambite, e a ricompensarlo con premi assai più grandi, *quandoquidem serenissimi Magni Ducis effusa et vere regia liberalitas magno auri pondere donatum me non semel voluit* (Op. geom., P. II cit., pag. 150). Ma non è già la sete dell' oro, sì piuttosto il gusto di avere a mano un ottimo Telescopio che, come del trattato dei centri di gravità, lo fa non curante di quell' altro delle proporzioni, in fine al proemio del quale così scriveva: « Interea praestat circa vitra ad usum Telescopii potius laborare, quae ab omnibus Europae partibus expetuntur, quam circa theorematum dispositionem figurarumque accuratam descriptionem excruciari: peracta scilicet inventione, quae sola voluptati esse potest » (MSS. Gal. Disc., T. XXVI, fol. 59).

L' invenzione, della quale il Torricelli qui e altrove tanto si compiace, consiste nell' essersi, com' egli dice, incontrato nella soluzione di quell' ottico problema *tamdiu perquisiti, cuius videlicet figurae esse debeant superficies vitrorum, quae ad usum Telescopii elaborantur* (Op. cit., pag. 150). Sarebbe la compiacenza stata più giusta, se avesse scoperta e dimostrata la legge delle rifrazioni, ciò ch' essendo rimasto a fare allo Snellio e al Cartesio, non aveva dunque il Torricelli propriamente risoluto un problema di scienza, ma di semplice arte vetraria, e per emulare un occhialaio di Napoli non si curò di disporre i suoi teoremi e di descrivere accuratamente le sue figure di Geometria. Giacciono infatti que' teoremi confusamente scritti nelle carte disperse, e abbandonati: le figure illustrative vi son neglette, e rimane appena nell' Autore una languida memoria di quelle, ch' erano vere invenzioni, e che gli avrebbero meritata appresso i posteri una vera gloria: cosicchè, invitato un giorno a discorrerne per lettera da Michelangiolo Ricci rispondeva in fretta di non saperlo fare *perchè aveva la testa piena di vetri* » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 88).

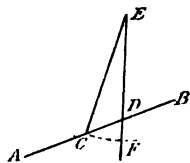
Quelle invenzioni, nelle quali non ebbero la fortuna d' incontrarsi nè l' antico Archimede, nè i moderni commentatori di lui, come il Commandino, il Valerio, il Galileo, consistevano nei centri di gravità della callotta, del settore e del frusto di sfera; della cicloide, e d' innumerevoli altre superficie e solidi, con metodi affatto nuovi: che se fosse stato tutto messo in ordine di trattato alla pubblica luce, la Meccanica avrebbe avuto dal Torricelli un libro non men compiuto, ma assai più bello di quel del Wallis. Ebbe non poca

parte a quella iattura la morte, e quando furono dati al Viviani, perchè si volevano in ogni modo stampare, gli scritti postumi del Torricelli, non furono le ultime cure rivolte ai centri di gravità, il libro de' quali pensava il Viviani stesso di distribuirlo nei quattro capitoli seguenti: I. De' piani, cioè del Settore del circolo, di alcuni piani e solidi, per gl' indivisibili; del triangolo, della parabola, dei frusti e porzioni di parabola. II. Delle superficie curve, cioè della superficie conica, della callotta e della zona sferica. III. Dei solidi sferali, cioè dell' emisferio, del settore e del frusto sferico. IV. Di vari altri solidi, cioè del cono, del segmento conico, del frusto parabolico, del solido cavalieriano, dei cilindri sbucati.

Può quest' ordinamento del Trattato torricelliano vedersi proposto nel primo foglio del *tomo XXXVI dei Discepoli,* in fine al quale è fedelmente eseguito in nitida copia sopr' altra copia men compiuta del Serenai. Si dice che quella copia più moderna fosse preparata per le stampe, per le quali ne fossero state già disegnate e incise le figure a parte, che perciò mancano ai luoghi loro ne' larghi margini bianchi del manoscritto. Fu bene che non avesse esecuzione il meditato disegno, perchè sarebbe stato per riuscire tale sconciatura, da non si credere che vi avesse avuto parte il Viviani, alla revision del quale non dovettero essere stati sottoposti que' fogli. Com' è credibile infatti ch' egli potesse dar licenza di stamparli, così com' erano mancanti, non solo delle aggiunte e delle illustrazioni fattevi da lui stesso con tanta diligenza, ma di alcuni dei lemmi preparati già dall' Autore, e senza i quali non era possibile che si avessero per ben dimostrate le più importanti fra quelle baricentriche proposizioni?

I manoscritti fornirebbero il materiale necessario a chi volesse costruire il trattato dei centri di gravità del Torricelli, il qual trattato altr' ordine prenderebbe alle mani di un semplice compilatore, o di un che vada raccogliendo quegli sparsi teoremi, per servirsene come documenti di storia. Tale essendo l' ufficio e l' intendimento nostro, non per questo saranno defraudati i Lettori di nessuna delle parti o principali o secondarie di quel trattato, in cui troveranno solamente la differenza che, in vece di veder succedersi le proposizioni via via secondo l' ordine logico, le vedranno succedersi secondo l' ordine cronologico: secondo il tempo cioè che le concepì la mente dell' Autore, sotto l' influsso di queste e di quelle tradizioni, le prime e più efficaci tra le quali son quelle derivate dai libri di Archimede *De aequiponderantibus,* e *De quadratura parabolae,* che il Torricelli studioso commentava con questi suoi primi giovanili esercizi.

Figura 118.

« SUPPOSIZIONI. — Supponghiamo che le grandezze, sospese da un punto libere, cioè che possano rivoltarsi e moversi, non si fermino mai, fintanto che il centro della gravità di essa magnitudine non sia nell' infimo punto del suo cerchio. Altrimenti la magnitudine si sosterrebbe da sè, potendo discendere, il che è inverosimile. Per esempio la magnitudine AB (fig. 118), di cui

centro della gravità sia C, intendasi attaccata col filo ED. È chiaro che la detta grandezza non potrà mai fermarsi, fintanto che il centro C non sarà giunto nel punto F, cioè nell'infimo di tutti i siti, che egli possa avere, il che sarà quando il punto C si sarà accomodato perpendicolarmente sotto il punto E della sospensione. »

« Supponghiamo ancora che le linee abbiano il centro della gravità, e forse non sarà maggiore assurdo il considerar le linee come gravi, che il considerar le superficie pesanti. Già in buona Geometria non si può dire che una linea sia minore di una superficie, ed io credo che tanto sia lontana dall'esser grave una linea, quanto una superficie. »

« Proposizione I. — *Il centro della gravità ne' triangoli sta in quella linea, che dalla metà di un lato si tira all'angolo opposto.* »

« Sia il triangolo ABC (fig. 119), di cui il lato AC sia diviso per mezzo in D, e tirata la BD, dico che il centro sta nella BD. Se è possibile non vi stia, ma pongasi essere E. Tirisi la linea IE parallela alla BD, ed attacchisi il triangolo con la linea immaginaria IE, ed accomodisi in maniera tale, che la IE sia perpendicolare all'orizonte. Dovrà dunque il triangolo star fermo, perchè il centro E sta nel perpendicolo. Ma producasi una linea HL parallela ad AC, e divisa per mezzo in Q, e fatto centro in I, ed intervallo IQ, facciasi un cerchio, del quale l'infimo punto sarà quello, che è nel perpendicolo IE, e però la HL sarà in stato violento, potendo il suo centro discendere ancor più. È così di tutte le altre linee parallele alla medesima base, le quali tutte faranno forza verso il perpendicolo, e però il triangolo non starà fermo. Adunque il punto E non è centro. »

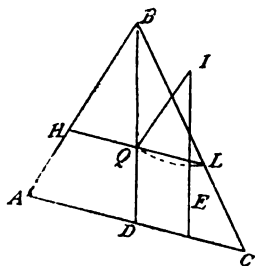



Figura 119.

« *Scolio.* — Nota che questa dimostrazione, come anche quelle di Archimede e di altri, le quali sono indirette, non hanno forza di provare che il centro della gravità sia nella linea BD, ma solo provano che non è fuori di essa. Che poi il centro sia nella detta linea è petizione, ed è la petizione che le grandezze abbiano il centro. »

« Proposizione II. — *Qualsivoglia figura, o sia piana o sia solida, o regolare ovvero anche irregolare, purchè si possa segar con linee, ovvero piani sempre paralleli, ed i centri delle sezioni siano tutti in linea retta; ha il centro della gravità nel diametro, se sia piana, o nell'asse, se sia solida.* »

« Sia la figura ABC (120), che intendasi attaccata dal punto B, ma però liberamente, sicchè si possa movere. È manifesto che la figura si volgerà, sino a tanto che il centro della gravità sia perpendicolarmente sotto al punto della sospensione B. Intendasi dunque la figura ridotta alla quiete, ed il perpendicolo sia la linea BE, nella quale sia il centro I. Dico che la linea

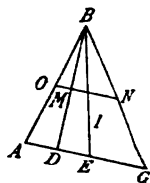



Figura 120.

BIE è diametro della figura. Poichè, se non è, sia diametro la BD, e, tirata la ordinatamente applicata NO, sarà il di lei centro M, il quale, per esser fuori del perpendicolo, potrà discendere e condursi all' infimo punto del suo giro, che è nel perpendicolo. Così di tutte le ordinatamente applicate. Però la figura non starà ferma, ma anderà da quella parte, verso la quale spingono tutte le applicate. Perciò il punto I non sarebbe centro, che è contro il supposto. »

« *Corollario.* — Perciò è manifesto che il centro della gravità del triangolo, parallelogrammo, cerchio, ellissi, siccome della sfera, sferoide, ecc., sta nel concorso dei diametri, cioè nel centro della figura. »

« PROPOSIZIONE III. — *In ogni figura solida, come prisma o parallelepipedo, ovvero cilindro, il centro della gravità sta in quella linea, che congiunge i centri delle basi opposte.* »

« Sia un prisma, o parallelepipedo ovvero cilindro, ovvero altro solido colonnare OI (fig. 121), e congiungansi i centri delle basi opposte con la retta OI. Se è possibile stia fuori, e facciasi la sospensione dal punto O. Adunque il centro della gravità si accomoderà nel perpendicolo sotto il punto O e la figura starà ferma. E però segando la figura con un piano AB, parallelo alle basi opposte, il centro della sezione fatta sarà fuori del perpendicolo, e però non sarà nell' infimo punto del suo giro. E così di tutte le sezioni possibili a farsi parallele alle basi opposte, e perciò tutte le dette sezioni premeranno per un verso, e la figura non starà ferma, che è contro il supposto. Adunque il centro non è fuori della linea OI, la quale congiunge i centri delle basi opposte, e di tutte le altre sezioni. Che poi il centro del solido divida per mezzo la linea OI è più chiaro di ogni prova, che se ne possa addurre. »

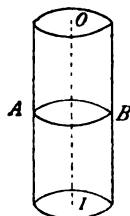



Figura 121.

« PROPOSIZIONE IV. — *Il cono, la piramide ed ogni figura conica e piramidale ha il centro della gravità in quella linea, la quale va dalla cima al centro della gravità della base opposta.* »

« Sia un cono, ovvero piramide, ed attacchisi dalla cima libero e s' intenda ridotto alla quiete. Sarà dunque il centro nel perpendicolo sotto il punto A (fig. 122). Dico che questo tal perpendicolo è la linea, che va dalla cima al centro della base opposta. Se non è, sia detta linea un' altra, come la AE. Adunque proverò che i centri di tutte le sezioni possibili parallele alla base sono nella linea AE. Poichè proverò, essendo cono, che il centro della sezione sta in AE, se è piramide proverò che nel triangolo della sezione la linea AE passa per un punto, il quale sta nella retta, che vien dall' angolo alla metà di un lato, e la divide in proporzione dupla: e potendo tutti discendere, la figura non starà ferma, che è contro il supposto » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, 5-8).

Figura 122.

Ai giovanili esercizi intorno ai centri di gravità appartengono quest' altre proposizioni, per dimostrar le quali si suppone dal Torricelli *congruentium*

figurarum centra gravitatis congruere: item uniuscumque figurae unicum esse centrum gravitatis.

« Proposizione V. — *Quodlibet parallelogrammum habet centrum gravitatis in recta, quae bifariam secat opposita latera.* »

« Esto parallelogrammum ABCD (fig. 123): recta bisecans opposita latera sit EF. Dico in EF esse centrum gravitatis parallelogrammi. Nisi enim sit in EF, esto illud G, et producatur AB in H, DC in I, FE in L. Esto parallelogrammum BI aequale ipsi AC. Supposita ergo recta BC super AD, anguloque HBC super angulo BAD, congruet parallelogrammum BI cum parallelogrammo AC, et recta EL cum FE, punctumque aliquod M in parallelogrammo EI congruet cum puncto G. Cumque G sit centrum parallelogrammi AC, erit M centrum parallelogrammi congruentis BI. »

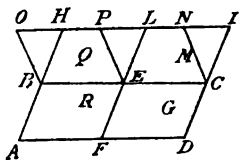



Figura 123.

« Invertatur iam parallelogrammum BI super eadem basi BC, ita ut angulus HBC, mutato loco, sit NCB; angulus vero ICB, mutato loco, sit ipse OBC, recta vero EL, mutata positione, sit eadem ac ipsa EP. Punctum vero M idem sit ac ipsum Q. Inclinato iam parallelogrammo BONC super parallelogrammo BADC, ita ut latus BC commune maneat, congruent, congruentque parallelogrammum BP ipsi BF, et punctum Q cum aliquo puncto R in parallelogrammo BF. Cum autem punctum Q centrum sit parallelogrammi BONC, erit R centrum gravitatis parallelogrammi congruentis BADC. Sed eiusdem centrum gravitatis erat G, ergo etc. » (idid., fol. 20).

« Proposizione VI. — *Cuiuscumque figurae, ex duobus semiparabolis compositae, ita ut diametros aequales et in directum habeant, basim vero communem, centrum gravitatis est in basi.* »

« Sint duae semiparabolae ABC, CBD (fig. 124), quarum diametri aequales et in directum sint AC, CD, basis vero communis CB. Dico huiusmodi figurae centrum gravitatis esse in basi communi CB. Producatur basis BC in E, ut sint aequales BC. CE: tum utraque parabola perficiatur. Eritque altera alteri eadem parabola, et congruent mutuo. Secta deinde BC bifariam in F, ducatur GH parallela ipsi AD, iunctisque AB, BD erunt GM, NH diametri parabolarum AGB, BHD et erunt aequales inter se. Sint I, L centra gravitatis parabolarum AGB, BHD, eruntque aequales IM, NL. Sed etiam MF, FN sunt aequales, ergo totae IF, FL aequales erunt. Sunt autem aequales semiparabolae ABC, CBD cum utraque aequalis sit semiparabolae EDC, ipsa enim ABC cum EDC eadem est et congruit, ipsa vero CBD cum EDC a diametro bifariam dividitur. Demptis itaque aequalibus triangulis erunt aequales parabolae AGB, DBH, et punctum F erit earum centrum gravitatis. Etiam trianguli ABD centrum gravitatis est in BC, ergo et totius figurae, quod erat demonstrandum » (ibid., fol. 26).

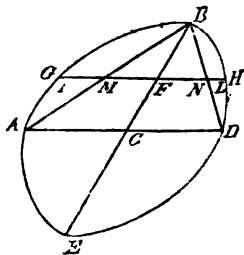



Figura 124.

« PROPOSIZIONE VII. — *Cuiuscumque semiparabolae centrum gravitatis est in linea basi aequidistante, et per centrum totius producta.* »

A questa è premesso un lemma, che fu poi scritto in ordine l' XI nel libro *De dimensione parabolae,* dove può chi vuole leggerlo stampato sotto una tal forma: « Omnis semiparabola aequiponderat ex puncto basis, in quo sic ea dividitur ut pars ad curvam terminatam sit ad reliquam ut quinque ad tria » (Op. geom., P. II cit., pag. 33). Dietro ciò così procede nel manoscritto la dimostrazione della proposta:

« Esto parabola ABC (fig. 125), cuius diameter BD. Centrum gravitatis totius sit E, ductaque EG parallela ipsi basi DC, dico centrum gravitatis semiparabolae DBC esse in recta EG. Sit enim si possibile est extra, puta I, iunctaque et producta IE, transibit ipsa IE per centrum gravitatis alterius semiparabolae, per lemma primum VIIIae primi Aequiponderantium. Esto illud F ductisque IL, FH, diametro parallelis, erunt aequales DH, DL, sunt enim utraeque, per lemma praeced., $^3/_5$ aequalium DA, DC. Ideo aequales erunt etiam FE, EI, et propterea semiparabolae aequales erunt. Producatur BD in N, ita ut sint aequales BD, DN, et per puncta A, N, C transeat parabola circa diametrum ND, eritque penitus eadem cum parabola ABC. Nam superpositae invicem congruent. Jam producta IL, ut LM sit aequalis ipsi LI, erit M centrum semiparabolae CDN, et ideo M congruet cum centro F, eruntque aequales FH, LM, et ideo etiam FH, LI, eruntque parallelae HL, FI quod est impossibile » (ibid., fol. 27).

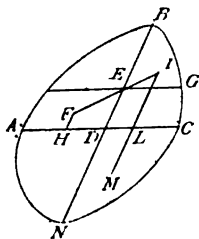



Figura 125.

II.

Dopo Archimede la Baricentrica era stata promossa da Federigo Commandino e da Luca Valerio, ai trattati dei quali, se Galileo da una parte faceva il commento, porgeva anche dall' altra, come vedremo, gli argomenti a nuove dimostrazioni. In generale però sembrava che fosse ogni invenzione esaurita in que' libri, e Galileo stesso confessava di aver desistito dall' opera, perchè vedeva di non poterci far altro che ricalcar l' orme segnate già dal Valerio.

Nel 1632 un gesuita spagnolo, Giovanni Della Faille, pubblicava un libro di teoremi *De centro gravitatis partium circuli et ellipsis,* cosa affatto nuova nella Scienza, avendone taciuto Archimede, e il Commandino e il Valerio contentandosi di dimostrare, ciò che dall' altra parte avrebbe ognuno consentito assai facilmente, che convengono nello stesso punto i centri delle due figure. Narrava il Della Faille, nel proemio ai lettori, donde gli fossero derivate le tradizioni alla sua invenzione, e diceva che, come Archimede, ritrovatone il centro di gravità, aveva facilmente conclusa la quadratura della pa-

rabola; così egli sperava che, ritrovato il centro di gravità di una porzione di cerchio, gli verrebbe fatto di quadrare quella stessa porzione, e perciò il cerchio intero. La nuova quadratura meccanica riuscì, al dir di un giudice competente qual era Antonio Nardi, *con arte maravigliosa,* ciò ch' efficacemente conferì a diffondere la fama e i libri del Matematico straniero in Italia. Il Torricelli perciò ritrovava, nel nuovo trattato dei centri di gravità delle porzioni di circolo e di ellisse, un nuovo impulso, e un indirizzo nuovo ai suoi studi, primo frutto de' quali fu l' invenzione del centro di gravità nelle porzioni di parabola, invenzione forse meno strepitosa di quell' altra simile del padre Della Faille, ma non però meno nuova.

« Proposizione VIII. — *Ostendemus centrum gravitatis portionis parabolae qua sit in linea, et in quo ipsius puncto.* »

« Esto portio parabolae ABCD (fig. 126), secta per lineam CD utcumque, sive sit ad diametrum parallela, sive non. Secetur bifariam AC in E, et, ducta diametro EB, sit F centrum parabolae ABC, et H centrum trianguli ACD, iunctaque F, H, in FH erit centrum portionis. Jungatur BD, eritque triangulum ABC ad triangulum ADC, in eadem basi, ut altitudines BX, DY, sive ut BI, ID per similitudinem triangulorum rectangulorum BXI, IYD, et per IV Sexti. »

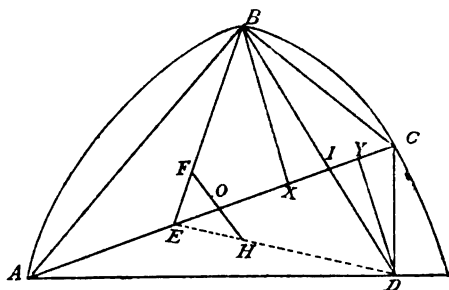
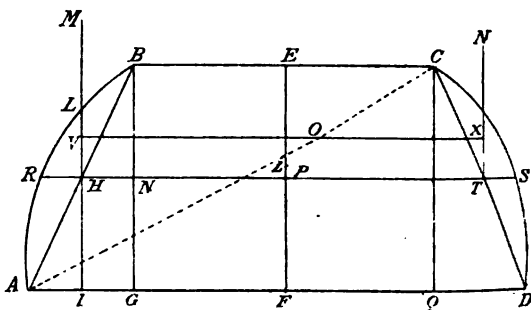



Figura 126.

« Jam parabola ABC, ad triangulum ABC, est ut $^4/_3$ rectae BI ad BI: triangulum vero ABC ad ADC est ut BI ad ID, ergo ex aequo parabola ABC ad triangulum ADC est ut $^4/_3$ rectae BI ad ID, sive, sumptis subsesquitertiis, ut recta BI ad $^3/_4$ ID. Fiat igitur ut BI ad $^3/_4$ ID, ita reciproce HO ad OF et erit O centrum gravitatis portionis » (ibid., fol. 30).

Proposizione IX. — *Dato il frusto di parabola ABCD* (fig. 127), *con le sue basi parallele AD, BC, e con la sua altezza EF corrispondente all' asse della figura; trovare sopra esso asse dove gravita il centro.*

Figura 127.

Questo bello e importante problema non è così proposto, nè direttamente risoluto nel manoscritto torricelliano fatto copiar per la stampa, dove solamente si leggono due teoremi, che apparirebbero fuor di luogo e insignificanti, quando non s' intendessero,

secondo che deve avere avuto in mente l'Autore, come lemmi preparati o come principii già posti per riuscire alla desiderata soluzione. Ciò sempre più conferma che dev' essere stata preparata la detta copia per le stampe senza l' approvazion del Viviani, il quale non è credibile non avesse compreso che i due teoremi erano stati dimostrati per ritrovare il centro di gravità nel frusto della parabola, tanto più che il Viviani stesso aveva già svolti gli argomenti, ossia aveva fatto i calcoli per dimostrar che tornano le conclusioni pronunziate dal Torricelli.

E perchè sui materiali, che ci son rimasti in qualche parte finiti e in qualche altra abbozzati, non è difficile, conforme al disegno che ne fece l' artista, costruir l' edifizio; si congiungano i punti B, C, con A, D, e tornerà dalle linee AB, CD la superficie del frusto divisa in due segmenti parabolici e in un trapezio. Sia l' asse EF segato nel mezzo in P dalla linea RS parallela alle basi, la quale, segando pure nel mezzo in H e in T le AB, CD, saranno HL, NT, che si conducono paralleli all' asse per comodità della dimostrazione, i diametri delle due parabole. Se dunque si prenda HV due quinti di HL, sarà per l' VIII del secondo degli Equiponderanti, in V il centro dalla parabola ARB, come in X sarà il centro della parabola CSD, per la medesima proposizion di Archimede. Congiungansi V, X, e sarà in O il centro delle due stesse parabole. Sia poi per la XV del primo degli Equiponderanti in K il centro di gravità del trapezio: è manifesto che s' avrà risoluto il problema, quando si sappia a qual punto riman dell' asse il centro O, e qual sia la proporzione delle parabole al trapezio, perchè, chiamato T questo e P quelle, se faremo come T a P così reciprocamente OZ a ZK, sarà in Z il centro di gravità del frusto.

Le due proposizioni inserite nel manoscritto torricelliano dimostrano dove il punto O sia da segnarsi sull' asse, e quale abbiano ragioni fra loro le dette superficie. Ma perchè colui che ordinò quelle proposizioni non ne intese il fine, anche male le intitolò e le dispose, e, quasi fosse un tal fine principalmente quello di determinar sull' asse il centro delle due parabole, volle a questa dimostrazione premettere come lemma quell' altra delle proporzioni tra il trapezio e le due parabole adiacenti. Notato ciò, non per altro che per avvertire il Lettore com' avendo così fallato gli altri in tanto lubriche materie non ci assicuriamo di aver fallato o qui o altrove anche noi; ecco in qual modo compendiosamente dimostri il Torricelli dove sull' asse del frusto si trovi il centro delle due parabole, che ne fanno parte.

Condotte le LI, BG, CQ parallele al detto asse, si premette dal Torricelli la seguente, per servir di lemma a ciò che vuol dimostrare: « Ostendendum ita esse DG, ad GI ut IH ad HL. »

« Recta IH ad GB est ut IA ad AG, sive, sumpta communi altitudine, ut rectangulum sub IA, GD ad rectangulum AGD. Recta vero GB ad IL est ut rectangulum AGD ad AID. Ergo ex aequo IH ad IL erit ut rectangulum sub IA, GD, ad rectangulum AID, nempe ut recta GD ad DI. Ergo, dividendo, DG ad GI erit ut IH ad HL » (ibid., fol. 28).

Ciò premesso, così conclude il Torricelli essere il punto O talmente situato sull' asse, che EO ad OF abbia quella medesima proporzione che due basi maggiori del frusto con tre delle minori hanno a tre basi maggiori con due delle minori.

« Est centrum duarum parabolarum O. Ergo PO erit duae quintae ipsius HL, et ideo FP ad PO, sive EP ad PO, erit ut DG ad $^2/_5$ GI, sive ut DG ad $^1/_5$ GA. Sumptisque quintuplis, erit EP ad PO ut DG quinquies ad GA semel. Factisque argumentis, erit EO ad OF ut DG quater, cum GQ semel, ad DG quinquies, una cum GA semel. Nempe ut duae bases maiores, cum tribus minoribus, ad tres maiores, cum duabus minoribus » (ibid.).

La division dell' asse nella proporzione di $4\,DG + GQ$ a $5\,DG + GA$, si dimostra così assai facilmente: In virtù del Lemma già dimostrato è $IH : HL = DG : GI$. Ma $IH = PF = EP$, per costruzione, e perciò, moltiplicati i conseguenti per $^2/_5$, e osservando che $PO = HV = {}^2/_5\,HL$; avremo $EP : PO = DG : {}^2/_5\,GI$, ossia $EP : PO = 5\,DG : AG$. Dividendo e componendo, questa si riduce alle due seguenti $EP - PO : PO = 5\,DG - AG : AG$; $EP + PO : PO = 5\,DG + AG : AG$, onde $EO : FO = 5\,DG - AG : 5\,DG + AG$. Ma $5\,DG - AG = 4\,DG + DG - AG = 4\,DG + DG - QD = 4\,DG + QG$, dunque $EO : FO = 4\,DG + QG : 5\,DG + AG$.

Resta ora a provare come $4\,DG + GQ$ sia uguale a $2\,AD + 3\,QG$, e come $5\,DG + AG$ sia uguale a $3\,AD + 2\,QG$, ciò che faremo prima di tutto osservando che $4\,GD + GQ = 4\,GD + GQ + 2\,GQ - 2\,GQ = 4\,GD - 2\,GQ + 3\,GQ$. Ma $4\,GD - 2\,GQ = 4\,(AD - AG) - 2\,GQ = 4\,AD - 4\,AG - 2\,GQ = 4\,AD - (2\,AG + 2\,QD + 2\,QG) = 4\,AD - 2\,AD = 2\,AD$, dunque $4\,GD + GQ = 2\,AD + 3\,QG$. L' altra parte poi vien provata con facilità dalle seguenti equazioni: $5\,DG + AG = 3\,DG + 2\,DG + GA + 3\,GA - 3\,GA = 3\,(DG + AG) + 2\,(DG - AG) = 3\,AD + 2\,QG$. E perciò $EO : OF = 2\,AD + 3\,QG : 3\,AD + 2\,QG$: « nempe, come diceva il Torricelli, ut duae bases maiores, cum tribus minoribus, ad tres maiores, cum duobus minoribus. »

Il Viviani illustrava la proposizione, così procedendo nel calcolo, in modo poco differente dal nostro, che per l' uso dell' analisi ci siamo studiati di render più chiaro: « Come EP a PO, così cinque DG ad una GA, *et sumptis antecedentibus duplis,* come EF a PO, così dieci DG ad una GA. E perchè EP a PO sta come cinque DG, ad una GA; sarà, componendo, FO ad OP come cinque DG, con una GA, ad una GA. *Et per conversionem rationis,* sarà PO ad OF, come una GA a cinque DG, con una GA. Ma stava come EF a PO, così dieci DG ad una GA, ed ora sta PO ad FO, come una GA a cinque DG, con una GA; ergo *ex aequo* EF ad FO starà come dieci DG e cinque DG, con una GH, ovvero con una DQ. E, dividendo, EO ad OF starà come quattro DG, con una GQ, a cinque DG, con una GA. Ma in questa DG con una GQ ci sono cinque GQ e quattro DQ, siccome in due DA, con tre BC, vi sono cinque GQ, con quattro DQ; adunque quattro DG, con una GQ, sono uguali a due DA con tre BC. »

« Inoltre, in cinque DG, con una GA, ci sono cinque GQ e sei GA: siccome ancora, in tre DA con due BC, cioè due GQ, ci sono cinque GQ e sei GA. Adunque cinque DG, con una GA, sono uguali a tre DA, con due BC. Ma sopra abbiamo provato che EO ad OF sta come quattro DG, con una GQ, a cinque DG, con una GA, ed ora si è dimostrato che quattro DG, con una GQ, sono uguali a due basi maggiori DA, con tre basi minori BC, e che cinque DG, con una GA, sono uguali a due basi minori BC, cou tre maggiori AD; adunque BO ad OF starà come due basi maggiori, con tre minori, a due minori, con tre maggiori » (ivi, T. XXXV, fol. 138).

Determinata e confermata, per i calcoli fatti, la posizione del punto O, baricentro delle due parabole sopra l'asse, ed essendo in K, come si disse, il baricentro del trapezio; non rimane a far altro che dimostrare in qual proporzione stiano quelle stesse parti fra loro, ciò che il Torricelli fa proponendo, e dimostrando il teorema seguente: « Trapetium inscriptum, ad reliquas parabolas frusti, ita est, ut quadratum DG, ad tertiam partem quadrati GA. »

« Producatur iam diameter HL parabolae ALB usque in M, ita ut MH sesquitertia sit diametro HL: erit triangulum, altitudine MH, basi vero dupla HN, aequale parabolae ALB. Triangulum BAC ad parabolam ALB, sive ad triangulum praedictum, rationem habebit compositam ex ratione altitudinum BG ad HM, sive IH ad duas tertias HL, sive DG ad duas tertias GI; et ex ratione basium BE ad HN, sive FG ad GI. Ergo triangulum BAC. ad parabolam ALB, erit ut rectangulum DGF, ad rectangulum sub IG, et sub duabus tertiis IG: nempe ad duas tertias quadrati GI, praedicta enim rectangula ex iisdem rationibus componuntur. Triangulum vero ACD ad BAC est ut DA ad BC, vel ut DF ad FG, sive ut rectangulum FDG ad FGD. Ergo, ex aequo, triangulum ACD, ad parabolam ALB, erit ut rectangulum FDG ad $^2/_3$ quadrati GI, et, per XXIV quinti, trapetium ad parabolam ut quadratum DG ad $^2/_3$ quadrati GI. Duplicando consequentia, erit idem trapetium, ad duas parabolas residuas, ut quadratum DG ad $^4/_3$ quadrati GI, sive ad $^1/_3$ quadrati GA, quod volebam ostendere. » (ibid.).

Se faremo dunque, in ultima conclusion del discorso, $OZ : ZK = DG^2 : {}^4/_3\, GI^2$, sarà nel punto Z il centro di gravità del frusto parabolico, che si cercava.

Ripensando a queste nuove cose dimostrate e risolute, si compiaceva il Torricelli di avere emulato il Della Faille, ma pure si trovava costretto di confessare che le invenzioni di lui erano di maggior conseguenza delle sue proprie. Dicemmo che si riducevano quelle invenzioni al centro di gravità di una porzion di cerchio e di ellisse, e ora soggiungiamo più particolarmente che, dopo aver premesse XXXIII proposizioni, si veniva a concluder dall'Autore che il centro di gravità di un settore di cerchio si trova sopra il raggio, che lo divide nel mezzo, a una distanza tale dal centro, che sia quarta proporzionale dopo l'arco, dopo due terzi della corda, e dopo il raggio stesso. « Dato quolibet sectore circuli, e centro bifariam diviso, si fiat ut sectoris

arcus, ad duas tertias partes rectae subtendentis arcum, ita semidiameter ad quartam quamdam lineam e centro sumendam, in ea quae sectorem bifariam secat; eius terminus erit centrum gravitatis sectoris propositi » (Theoremata de centro grav., Antuerpiae 1632, pag. 36).

Si veniva di qui a porger facile il modo di ritrovare il centro del segmento circolare, che è uguale al settore diminuito del triangolo inscritto, e nell'ultime parti del libro si dimostrava come, nella medesima proporzione che nel cerchio, sia segato l'asse dal centro di gravità nel segmento e nel settore di ellisse, intorno a che pose l'Autore i due teoremi seguenti in questa forma: « Si duo segmenta data fuerint unum ellipsis, alterum circuli, et quam proportionem habet segmentum ellipsis, ad totam ellipsim, eamdem habeat segmentum circuli, ad totum circulum; centra gravitatis in eamdem proportionem divident earum diametros. — Si fuerint duo sectores unus ellipttcus, alter circularis, dimidiis suis figuris minores, aequales vel maiores, et quam proportionem habet unus sector ad suam figuram, eamdem habeat alter sector ad suam; centrum gravitatis ipsorum in eamdem rationem dividet semidiametros illas, quae sectores bifariam secant » (ibid., pag. 49, 51).

Erano anche questi due teoremi una conseguenza, e posti come un'appendice del XXIX, dove il Della Faille aveva dimostrato il modo di ritrovare il baricentro del settore di cerchio. La dimostrazione procedeva secondo il metodo antico degli inscritti, che menava necessariamente per le lunghe, cosicchè, per preparare i principii, dai quali si potesse dedurre con rigoroso discorso geometrico la conseguenza desiderata, si trovò costretto l'Autore a scrivere un libro intero. Il Torricelli credè che ci dovesse essere una via più breve, e mettendosi a cercarla la trovò, e la rifiorì delle sue proprie eleganze, ma in sostanza rimaneva la stessa già battuta da tutti gli altri, aiutandosi anch'egli di quegli inscritti e circoscritti, ai quali erano in simili bisogni ricorsi sempre i Matematici antichi. Non fu perciò possibile che la brevità raggiungesse quel grado, che si prometteva, e che poi si conseguì con i metodi nuovi, come potranno giudicare i Lettori da ciò che ora siam per trascrivere dal manoscrito torricelliano, in cui non si giunge a concludere il proposito, se non che per la via di dieci lemmi.

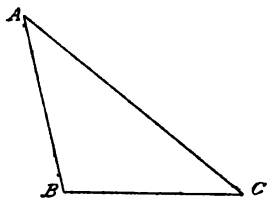



Figura 128.

« *Lemma I.* — Si quadrata duorum laterum trianguli, simul sumpta, minora sint reliqui lateris quadrato; angulus, ab illis duobus lateribus comprehensus, obtusus erit. »

« Esto triangulum ABC (fig. 128), sintque quadrata AB, BC, simul sumpta, reliquo quadrato AC minora: dico angulum B esse obtusum. Nisi enim B sit obtusus, erit certe vel rectus vel acutus. Rectus esse non potest, nam quadrata AB, BC essent, per XLVII Primi, aequalia quadrato AC. Acutus esse non potest, quoniam quadrata AB, BC simul maiora essent quadrato AC, per XIII Secundi. Superest igitur quod angulus B sit, obtusus, quod erat propositum. »

« *Scholium.* — Omitte, si lubet, hoc primum Lemma, tamquam satis notum ex XIII Secundi Elementorum. »

« *Lemma II.* — Si fuerit circuli sector quadrante minor, perpendicularis in triangulo, ad reliquam sagittam, magis quam dupla erit. »

« Esto circuli sector ABCD (fig. 129), quadrante minor, cuius chorda sit AC, et ex centro D demissa perpendicularis DE ad AC: dico DE, ad reliquam sagittam EB, magis quam duplam esse. Dupla enim esse non potest, quoniam, si ponatur DE dupla reliqua EB, erit BD, sive CD. ad DE, ut 3 ad 2. Ergo quadratum CD ad DB erit ut 9 ad 4. Quadratum vero idem DC, per conversionem rationis, ad CE erit ut 9 ad 6, et duo simul quadrata CD, DA, ad quadratum AO, erunt ut 18 ad 20. Propterea, per Lemma praec., angulus ADC obtusus, quod est contra suppositum. »

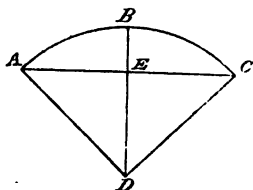



Figura 129.

« Maius quam dupla non potest esse. Quoniam, si ponatur DE minus quam dupla reliquae EB, erit composita BD, sive CD, magis quam sesquialtera ipsius DE. Qualium igitur partium CD est 3, ipsa DB est minus quam 2. Qualium vero partium quadratum CD est 9, talium quadratum DE minus erit quam 4, et talium CE quadratum erit magis quam 5. Qualium itaque partium quadrata simul CD, DA sunt 18, talium quadratum AC est magis quam 20. Ergo, per Lemma praec., angulus ADC est obtusus, quod est contra suppositum. Superest igitur quod recta DE, ad reliquam EB, sit magis quam dupla, quod erat propositum demonstrare. »

« *Lemma III.* — Quilibet circuli sector, sive quaelibet figura rectilinea, vel intra vèl circa ipsum per continuam arcus bisectionem descripta, centrum gravitatis habet in axe: hoc est in recta, quae bifariam secat angulum, qui ad centrum est. »

Il lemma fa riscontro esatto con la XX del Della Faille, ma vedasi quanto il processo dimostrativo ne sia diverso, supposto con Archimede che delle figure congruenti i centri di gravità convengano insieme.

« Esto circuli sector, vel figura plana qualis dicta fuit, ABCD (fig. 130), linea vero bisecans angulum ADC sit DB: dico in recta BD esse centrum totius figurae. Supponamus enim centra partium esse quaelibet puncta E et F, ducaturque recta EF. Superpositis itaque invicem figurae partibus BAD, BCD, ipsae partes congruent, ob aequalitatem omnium angulorum, omniumque laterum. Centra igitur E et F, per suppositionem praemissam ex Archimede, congruent, quare recta E, I congruet cum IF, aequalesque erunt EI, IF. Sunt autem et magnitudines, quarum centra E et F, aequales inter se. Ergo magnitudinis, ex utrisque magnitudinibus compositae, centrum gravitatis erit punctum I: punctum videlicet

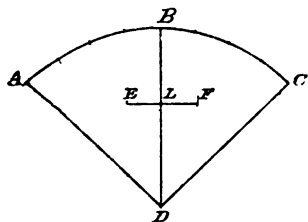



Figura 130.

medium librae EF. Ergo centrum gravitatis est in axe BD, quod erat propositum. »

« *Lemma IV.* — Centrum gravitatis sectoris circuli, quadrante minoris, est inter centra triangulorum, quorum alterum inscriptum sit, alterum vero ipsi sectori circumscriptum. »

« Esto sector ABCD (fig. 131), quadrante minor, triangulum vero inscriptum sit ACD, circumscriptum EFD. Patet quod perpendicularis DG magis quam dupla erit ad reliquam GB. Sit ergo DI dupla ad IB, et DO dupla ad OG, eruntque puncta I et O centra gravitatis triangulorum EFD, ACD. Dico inter puncta O et I esse centrum gravitatis sectoris ABCD. Sit enim, si esse potest, centrum gravitatis sectoris punctum I. Cum ergo I sit centrum totius, hoc est trianguli EFD et partis unius, nempe sectoris ABCD; erit necessario centrum gravitatis etiam partis alterius, nempe trilineorum EAB, BCF, quod est absurdum. Sit, si esse potest, O. Cum ergo O sit centrum gravitatis totius magnitudinis, nempe sectoris, partisque unius, nempe trianguli ACD; erit omnino centrum etiam partis alterius, nempe segmenti ABC, quod est absurdum: Sit si esse potest V. Cum ergo I sit centrum totius magnitudinis, hoc est trianguli EFD, V vero centrum partis unius, nempe sectoris; erit centrum alterius partis, nempe trilineorum EAB, BCF omnino versus D, quod est impossibile. Sit denique, si esse potest, R. Cum ergo R sit centrum totius, nempe sectoris ABCD, punctum autem O partis unius, hoc est trianguli ADC; erit centrum alterius partis, nempe segmenti ABC, omnino ulterius versus D, quod est absurdum. Superest ergo quod centrum gravitatis sectoris sit inter puncta I et O, quod erat propositum demonstrare. »

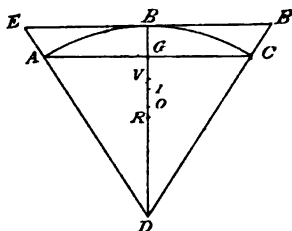



Figura 131.

« *Lemma V.* — Si figura quaelibet ABCD (fig. 132) in duas figuras congruentes secta fuerit a linea BD, dummodo congruentium figurarum aequales anguli sint ad easdem partes, et supposito centro gravitatis semifigurae BAD, quod sit E: si ex E ducatur EI perpendicularis ad BD, dico I esse centrum gravitatis totius figurae ABCD. Producatur enim EI, ita ut IO sit aequalis ipsi IE, eritque centrum reliquae semifigurae punctum O. Nam, superpositis figuris, puncta E et O congruent, cum rectae IE, et OI perpendiculares sint ad BD, per constructionem, et aequales inter se. Propterea centrum magnitudinis, ex utrisque magnitudinibus compositae, erit punctum I, quod erat propositum demonstrare. »

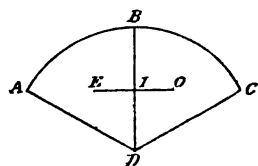



Figura 132.

« *Lemma VI.* — Si in sectore semicirculo minore figura rectilinea inscribatur, per continuam arcuum bisectionem, et circa eumdem altera similis figura circumscribatur; erit centrum gravitatis sectoris inter centra praedictarum figurarum. »

« Esto sector circuli semicirculo minor ABCD (fig. 133), in quo, per continuam arcuum bisectionem, figura rectilinea inscribatur AEBFC, et circa eumdem altera similis figura circumscribatur GHILM. Reperiantur centra triangulorum AED, GHD quae sint N et O: inter puncta N, O erit omnino, per lemma IV, centrum gravitatis sectoris AED. Esto illud P. Ductisque ex punctis N, P, O, ad rectam DE, perpendicularibus NQ, PS, OR, erunt puncta Q, S, R, per lemma V, centra gravitatis: nempe Q trapetii AEBD, R vero trapetii GHID, et S sectoris AEDB. Est autem S inter Q et R, alias duae parallelae coinciderent, quod esse non potest. Ductis iterum ex Q, S, R ad DB perpendicularibus QT, SX, RV, erunt puncta T, X, V (per lemma V) centra gravitatis: nempe T figurae AEBFCD, V vero figurae alterius GHILMD, X denique sectoris ABCD. Estque X inter T et V, alias duae parallelae convenirent, quod esse non potest, propterea centrum gravitatis sectoris est inter centra figurarum, inscriptae scilicet et circumscriptae, quod erat demonstrandum. »

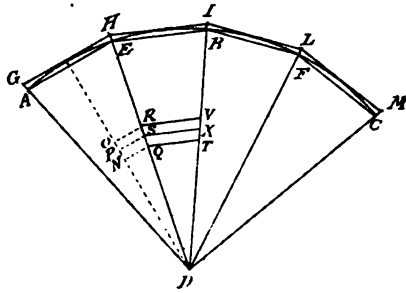



Figura 133.

« *Lemma VII.* — Si fuerit sector ABCD (fig. 134), minor semicirculo, ipsique altera figura inscribatur, et altera circumscribatur, per continuam arcus bisectionem; dico ita esse perimetrum unius AEBFC, ad chordam suam AC, ut est perimeter alterius GHILM, ad chordam suam GM. »

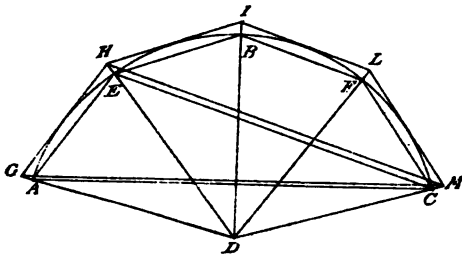
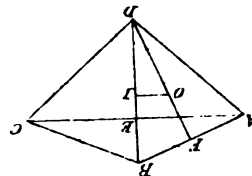



Figura 134.

« Facto enim centro D, intervallo DG, describi potest circulus, qui transibit per omnia puncta G, H, I, L, M. Ideo anguli ACE, GMH, ad peripheriam constituti, aequales erunt inter se, cum sint, per XX Tertii, subdupli eiusdem anguli ad centrum ADE. Eadem ratione anguli EAC, HGM aequales erunt inter se, et triangula EAC, HGM aequiangula. »

« Jam perimeter AEBFG ad AE est ut perimeter GHILM ad GH, cum sint earumdem aequimultiplices. AE vero ad AC, per IV Sexti, est ut GH ad GM: ergo ex aequo perimeter AEBFC, ad chordam suam AC, est ut perimeter GHILM, ad chordam suam GM, quod erat ostendendum. »

Figura 135.

« *Lemma VIII.* — Si fuerit trapetium ABCD (fig. 135), constans ex duobus triangulis isoscelibus ADB, BDC, quorum et latera et bases AB, BC sint aequales, ductaque AC fiat ut AB ad $^2/_3$ ipsius

AE, ita perpendicularis DF ad DI; dico I esse centrum gravitatis trapetii ABCD. »

« Ducatur ex I recta IO perpendicularis ad BD, eruntque duo triangula orthogonia ODI, et BDF aequiangula, cum habeant communem angulum BDF. Sed eadem ratione triangula orthogonia ABE, BDF sunt aequiangula, ergo ODI, et ABE aequiangula erunt. »

« Jam sic: BA ad $^2/_3$ ipsius AE, per constructionem, est ut FD ad DI. Sed $^2/_3$ ipsius AE, ad $^2/_3$ ipsius AB, per IV Sexti, est ut ID ad DO; ergo ex aequo AB, ad $^2/_3$ AB, est ut FD ad DO. Propterea FD sesquialtera est ipsius DO. Ergo O est centrum trianguli ADB. Sed recta OI perpendicularis est ad BD, ergo I, per lemma V, est centrum ipsius trapetii, quod erat propositum. »

« *Lemma IX.* — Si fuerint quotcumque triangula deinceps isoscelia, quorum et latera et bases aequales sint ABF, BCF, CDF (fig. 136), et reliqua quae sequntur, dummodo eorum numerus sit in progressione numerorum duplorum ab unitate 1, 2, 4, 8, 16, etc.: fiat autem ut aggregatum omnium basium AEG, ad $^2/_3$ chordae AG, ita FS, catetus unius trianguli, ad aliam sumendam ex F versus E; dico terminum huius quartae proportionalis esse centrum gravitatis figurae universae, ex praedictis triangulis compositae. »

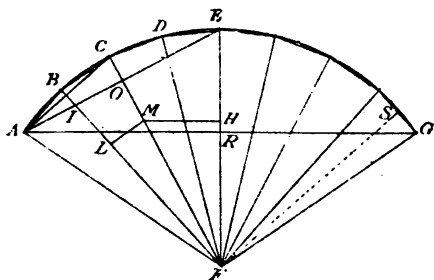



Figura 136.

« Esto punctum L, iuxta lemma VIII, centrum trapetii ABCF, et, ducta LM perpendiculari ad CF, erit punctum M, per lemma V, centrum figurae ABCDEF. Ducta vero MH perpendiculari ad EF, erit H, per lemma V, centrum totius figurae AEGF. »

« In primis angulus CAO, per XX Tertii, subduplus est anguli CFE, et ideo aequalis angulo EFM, et propterea triangula orthogona AOC, FML sunt aequiangula. Eadem ratione triangula ARE, FHM sunt aequiangula. »

« Jam, per lemma VIII, sive per constructionem, catetus FS ad FL est ut BA ad $^2/_3$ ipsius AI, sive ut AB, BC simul ad $^2/_3$ AC. Verum LF ad FM, per IV Sexti, est ut $^2/_3$ ipsius CA, ad $^2/_3$ AO. Ergo ex aequo catetus FS, ad FM, est ut AB, BC simul ad $^2/_3$ ipsius AO, nempe ut ABCDE simul ad $^2/_3$ ipsius AE. »

« Amplius FM, per IV Sexti, ad FH, est ut $^2/_3$ AE ad $^2/_3$ AR: ergo iterum, ex aequo, catetus FS, ad FH, est ut ABCDE ad $^2/_3$ ipsius AR, sive ut omnes simul bases AEG, ad $^2/_3$ chordae AG, quod erat propositum etc. »

« *Lemma X.* — Si fuerint tres magnitudines A, B, C, aliaeque ipsis aequales numero D, E, F, quae binae in maiore ratione sumantur, sitque perturbata earum proportio, nempe sit ratio A ad B maior ratione E ad F,

et B ad C maior sit ratione D ad E; dico A ad C maiorem habere rationem quam D ad F. »

« Ponatur ut A ad B, ita E ad H, eritque, per X Quinti, magnitudo H minor quam F. Ponatur etiam ut B ad C, ita G ad E, oritque, per eamdem, G maior quam D. »

« Jam A ad C erit, per XXIII Quinti, ut G ad H. Ergo necessario A ad C, per VIII Quinti, maiorem rationem habebit quam D ad H: multoque etiam maiorem quam D ad F, quod erat propositum. »

« PROPOSIZIONE X. — *Sifuerit circuli sector minor semicirculo, fiatque ut arcus sectoris, ad $^2/_3$ chordae eiusdem, ita semidiameter, ad aliam sumendam ex centro; terminus assumptae in axe erit centrum gravitatis sectoris.* »

« Esto circuli sector ABCD (fig. 137), minor semicirculo, fiatque ut arcus ABC, ad $^2/_3$ suae chordae AC, ita radius BD ad DE. Dico E punctum esse centrum gravitatis sectoris. Si enim possibile est non sit E: sit ergo centrum gravitatis sectoris vel supra, vel infra punctum E. Esto primo F, et sectori ABCD duae figurae rectilineae, altera inscribatur, altera vero circumscribatur per continuam arcus bisectionem, ita ut latus circumscriptae LM, ad latus inscriptae OC, per IV *De sphaera et cylindro,* minorem habeat rationem, quam ED ad DF: fiatque ut perimeter rectilineus ANBOC, ad $^2/_3$ chordae AC, ita catetus VD, ad rectam Q: dico primum Q maiorem esse quam DF. »

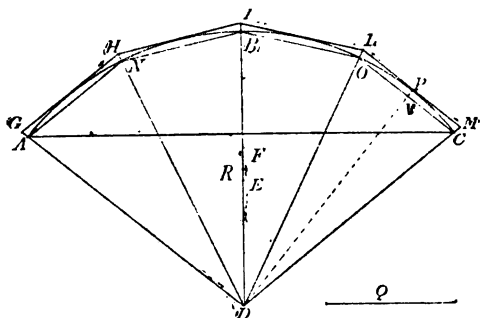



Figura 137.

« Nam BD ad DE est ut arcus ABC, ad $^2/_3$ chordae AC: ergo ratio BD ad BE, per XIII Quinti, maior est ratione perimetri rectilinaei ANBOC ad $^2/_3$ chordae AC, sive maior est, ob constructionem, ratione VD ad Q. Amplius, ratio ED ad DF, per constructionem, maior est ratione LM ad OC, sive, per IV Sexti, LD ad DO, sive ratione PD ad DV. Propterea BD ad DF, per lemma X, maiorem rationem habebit quam PD ad Q. Maior ergo, per X Quinti, est DF quam ipsa Q. »

« Secetur DR aequalis ipsi Q, et erit R, per lemma IX, et ob constructionem, centrum figurae inscriptae ANBOCD. Centrum vero circumscriptae adhuc ulterius erit versus B, et intèr utrumque debet esse centrum gravitatis sectoris. Ergo centrum gravitatis sectoris non est F. »

« Esto deinde centrum gravitatis sectoris, si fieri potest, infra punctum E, sitque illud F (fig. 138). Inscribatur in sectore figurà multilatera, atque altera circumscribatur, qer continuam arcuum bisectionem, ita ut GH latus, ad latus AN, per IV *De Sphaera et Cylindro,* minorem habeat rationem

quam FD ad DE. Eritque ratio arcus AN ad chordam AN multo minor ratione FD ad DE. »

« Fiat, ut perimeter rectilineus GHILM ad $^2/_3$ chordae GM, ita BD, catetus figurae circumscriptae, ad P. Dico primum P minorem esse quam DF. Nam arcus ABC, ad $^2/_3$ chordae AC, est ut BD ad DE, per suppositam constructionem ab initio, sed $^2/_3$ chordae AC, ad perimetrum ANBOC, per lemma VII, est ut $^2/_3$ chordae GM, ad perimetrum GHILM, sive ut P ad BD; ergo, per perturbatam, erit ut arcus ABC, ad perimetrum ANBOC, ita P ad DE. Sed FD ad DE, ob constructionem, maiorem habet rationem quam arcus ABC ad perimetrum ANBOC. Necesse igitur est, per X Quinti, quod P maior sit quam DF. Secetur ergo DT aequalis ipsi P, eritque T, per lemma IX et ob constructionem, centrum figurae circumscriptae GHILMD. Centrum autem inscriptae adhuc inferius est versus D, et inter utrumque debet esse centrum gravitatis sectoris ABCD. Propterea punctum F non erit centrum gravitatis sectoris, sed ipsum erit E, cum demonstratum sit sectoris centrum esse non posse neque supra E, neque infra. »

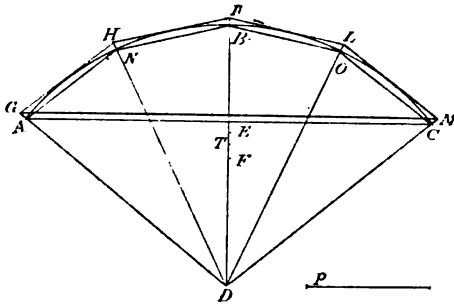



Figura 138.

« *Corollarium.* — In quolibet circuli sectore, etiamsi semicirculo maior sit, si fiat ut arcus ad $^2/_3$ chordae, ita semidiameter ad aliam sumendam in axe ex centro circuli; terminus huius assumptae erit centrum gravitatis ipsius sectoris. »

« Esto sector circuli ABCE (fig. 139) semicirculo maior, cuius chorda AC, sectusque sit in duas partes aequales ab axe BEM. Erunt ergo sectores ADBE, et BCE, uterque semicirculo minores. Esto sectoris ADBE axis ED, fiatque ut arcus ADB, ad $^2/_3$ chordae AB, ita DE ad EI, eritque I, per theorema praec., centrum gravitatis sectoris ADBE. Ductaque IO perpendiculari ad BE, erit O, per lemma V, centrum totius sectoris semicirculo maioris ABCE. »

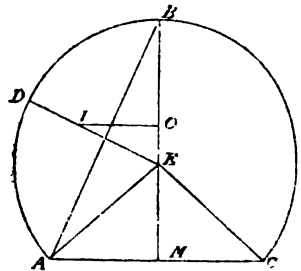



Figura 139.

« Jam triangula orthogonia IOE, ABM sunt aequiangula, nam angulus IEO, ad centrum constitutus, insistit arcui DB. Angulus vero BAM ad peripheriam insistit arcui duplo, nempe ipsi BC. Ergo anguli aequales sunt. Propterea, ut arcus ADB ad $^2/_3$ chordae AB, ita BE ad EI, per constructionem. Ut autem $^2/_3$ AB, ad $^2/_3$ AM, ita, per IV Sexti, IE ad EO. Ergo ex aequo ut arcus ADB, ad $^2/_3$ AM, sive ut arcus ABC, ad $^2/_3$ chordae AC, ita DE,

sive BE, ad EO, quae quidem est inter centrum gravitatis sectoris, et centrum circuli, quod erat demonstrandum » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVII, fol. 13-23).

III.

La superiorità di questo processo dimostrativo, paragonato con quello del padre Della Faille, non consiste in altro che in aver ridotti a maggiore facilità i metodi antichi, e ornatigli di eleganze nuove. Del resto, benchè il Torricelli si compiacesse col Cavalieri di aver dimostrato in meno di un foglio quel che al Matematico gesuita era, per far lo stesso, bisognato un libro; e benchè tenesse i suoi lemmi e le loro applicazioni per cose tanto acute, da non credere che il Guldino ci fosse potuto arrivare; nonostante troppo ben comprendeva che, a correre l'alto e profondo oceano della Baricentrica, quelli erano troppo deboli remi, e che poco era da dilungarsi dal lido, se non fosse alla navicella sovvenuto altro più valido argomento. Alla Geometria era già felicemente incontrata questa fortuna, per la nuova invenzione del metodo degl' indivisibili, e alcuni tooremi, specialmente i primi fra quelli dimostrati nel suo terzo libro dal Cavalieri, sembrava che si porgessero d' assai facile applicazione alla ricerca del centro di gravità nei cilindri scavati da una sfera inscritta o da un cono. Vedremo di quali conseguenze fossero nella mente del Torricelli fecondi così fatti teoremi, ma intanto che il germe s' incubava latente ne andava discorrendo con gli amici, fra i quali Antonio Nardi, che s' era incontrato in que' medesimi pensieri, e che, essendo per stampare un libro di Geometria, aveva dato intenzione di trattarvi del modo di applicare gl' indivisibili ai baricentri. Significava il Torricelli stesso queste intenzioni dell' amico e sue al Cavalieri, il quale rispondeva da Bologna, il dì 30 Ottobre 1641, così, dop' aver discorso di Giovanni Beugrand venuto di Parigi a ridestar nuove scintille di scienza dall' ingegno dei Matematici italiani:

« Detto Beugrand poi, al quale molto piacque questa maniera nuova degli indivisibili, aveva pensiero di praticarla in materia dei centri di gravità, poichè mi domandava se l' avevo usata io, e me ne richiedeva qualche esempio. Onde, se il signor Nardi vuole stampare quello che dice per gli indivisibili, avrà campo ancora, se non l' ha fatto, di aggiungere quello dei centri di gravità, quando ci abbia gusto » (MSS. Gal. Disc., T. XLI, fol. 114).

Ma intanto che si facevano discorsi, volle il Torricelli venire ai fatti, il primo dei quali si fu quello di applicare gl' indivisibili a dimostrare il centro di gravità della parabola, in quel modo che fu poi stampato nel libro della sua *Quadratura* (Op. geom., P. II cit., pag. 74, 75). La nuova applicazione fu come saggio sottoposta al giudizio del Cavalieri, a cui si domandava anche insieme consiglio, e nella incerta via intrapresa qualche più sicuro in-

dirizzo. La risposta fu data in una lettera del dì 29 Ottobre 1642, in questa forma:

« Ho vista la sua maniera di trovare il centro della parabola, la quale mi è piaciuta assaissimo, e credo non si possi migliorare. Gli confesso nondimeno ciò che mi è passato per la fantasia, dopo che io ebbi la lettera in materia di trovare il centro di gravità di alcune figure per gl' indivisibili, da non compararsi però nella facilità alla sua. E per dargli un poco di saggio del mio pensiero apporterò per esempio il triangolo ed il conoide parabolico, dai quali potrà intendere come questa maniera si possa anco applicare ad altre figure. »

« E prima non tralascerò, per il triangolo, di dire che mi pare che gl' indivisibili arrechino molta facilità per ritrovare il di lui centro, poichè, essendo il centro di gravità d' ogni proposta linea retta, e terminata, nel mezzo di essa; facilmente proveremo essere il centro del triangolo, per esempio ABD (fig. 140), nella AC, che divide ugualmente BD in C, poichè i centri di tutte le linee parallele a BD, cioè il centro di tutto il triangolo ABD, sono nella AC, il che pur anco si verificherà di qual si voglia figura intorno al diametro, cioè che sarà nell' istesso diametro. Onde, se tireremo la BE che tagli AD egualmente in E, e la AC in O, sarà O il centro, e sarà AO doppia di OC, poichè i triangoli ABE, DBE sono uguali, come anco AOE, DOE, e però ABO, BOD saranno uguali, cioè ABC sarà doppia di OBD, onde AO sarà doppia di OC. »

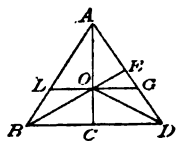



Figura 140.

« Ora vengo all' altro modo, e siccome si prova facilmente che i momenti dei gravi appesi in una bilancia hanno tra loro la proporzione composta delle moli, supponendoli ugualmente gravi in specie, e delle distanze dal sostegno; così, invece di corpi attaccandovi linee o superficie piane supposte come gravi, riceverò per provato che pure i momenti delle prefate linee avranno la detta proporzione composta. »

« Venendo ora all' applicazione, sia il medesimo triangolo che sopra ADB, nel quale sia divisa BD ugualmente in C, e tirata la AC, quale sia divisa in O, sicchè AO sia doppia di OC; dico il centro essere O del triangolo ABD » (ivi, fol. 135). E tirata la LG parallela alla BD, ciò si conclude dopo aver dimostrato che il momento di tutte le linee del trapezio LD è uguale al momento di tutte le linee del triangolo LAG, cosicchè conglobate queste insieme in T, e quelle in P, sia il momento T . TO uguale al momento P . PO, d' onde T : P = PO : TO, che vuol dire essere O, nella bilancia AC, il centro dell' equilibrio.

« Intenda ora DAB, nella medesima figura, prosegue a scrivere il Cavalieri, per l' ambito della parabola, che passa per l' asse AC del conoide sopra il circolo DB, al quale ella supponga perpendicolare AC, e ciò per non fare altra figura. Si proverà dunque che il momento di tutti i circoli del conoide ALG è uguale al momento di tutti i circoli del frusto LBDC, e perciò sarà O centro » (ivi, fol. 137).

La dimostrazione però dell' uguaglianza dei momenti delle linee, nel triangolo, e dei momenti de' cerchi nel conoide riusciva assai laboriosa e complicata, di che troppo bene accortosi il Cavalieri così concludeva: « La fretta è cagione che io non mi possi spiegare abbastanza, ma supplirà il suo valore al mio mancamento. Mi favorisca del suo parere circa questa maniera, veramente difficile, e però da non farne molto capitale. Vedrà almeno come riescono ancora in questa parte gl' indivisibili assai fecondi, poichè, trasformando i momenti in rettangoli o parallelepipedi o altri solidi, possiamo rintracciare i centri ancora, credo, d' altre figure » (ivi, fol. 138).

Coloro, che hanno letto il nostro secondo capitolo scritto nel tomo IV, riconoscono qui facilmente il metodo usato dal Rocca per dimostrare in qual proporzione stiano fra loro il fuso parabolico e il cilindro circoscritto. Ma in verità il computo dei momenti rendeva difficile il processo dimostrativo, e benchè non in modo da non farne capitale, come per modestia diceva il Cavalieri, certo da non si dover preferire in tutti i casi agli stessi metodi antichi. Scorto il Torricelli però da quella sua sagacia geometrica ben conobbe che il metodo nuovo si poteva rendere molto più semplice e più spedito, intendendo i pesi concentrati direttamente nel loro punto d' appoggio, e non a quelle distanze che si facevano dal Cavalieri e dal Rocca entrare nel computo dei momenti.

Nel conoide parabolico, per esempio, tutti i cerchi, come quelli di raggio AE, BF (fig. 141) si possono riguardar concentrati in A, B, e ivi ponderare direttamente sull' asse OG, preso per libbra. E il sapere per le dimostrazioni altrui che una tal libbra ha il suo centro distante dal vertice O per due terzi di tutto l' asse, dove pur cascherebbe il centro del triangolo inscritto, fece al Torricelli sovvenire un bel modo e facilissimo di dimostrare il centro dello stesso conoide, supponendolo ignoto. La libbra OG infatti si può per una parte considerar gravata degl' infiniti cerchi del solido parabolico, e per l' altra delle infinite linee della superficie triangolare, nei quali due tessuti le fila hanno uguale spessore, e sono in gravità proporzionali, perchè il triangolo dà $OA : OB = AC : BD$, e la parabola $OA : OB = AE^2 : BF^2$, onde $AC : BD = \pi AE^2 : \pi BF^2$, e così di tutte le altre infinite linee del triangolo si dimostra la proporzionalità ai corrispondenti cerchi del conoideo.

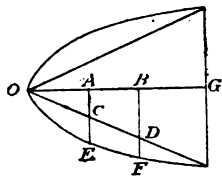



Figura 141.

Veniva di qui facilmente suggerita una proposizione statica, la verità della quale non fu difficile a dimostrarsi in quel modo, che poi si vide stampato per servir di lemma alle quadrature della Parabola: lemma, che in ordine è il XXII del libro, messo dal Torricelli stesso in questa forma: « Si magnitudines quotcumque ad libram appensae fuerint, ex quibuscumque punctis, totidemque magnitudines alterius ordinis ex iisdem punctis pendeant, pariter cum praedictis magnitudinibus proportionales; erit unum idemque librae punctum centrum aequilibrii utriusque ordinis magnitudinum » (Op.

geom., P. II cit., pag. 61). Applicato il qual lemma, ecco in un brevissimo tratto dal Torricelli condotta la dimostrazione del centro di gravità del conoide parabolico, che aveva dianzi aggirato il Cavalieri per così lungo e faticoso viaggio.

« Proposizione XI. — *Il centro del conoide parabolico sega l'asse nella proporzione di due a uno, provato per via del triangolo inscritto.* »

« Poichè, sia libbra orizzontale OG (nella medesima figura 141). Il circolo di AE al circolo di BF sta come la retta AC alla BD. Perciò i centri divideranno la libbra nell' istesso luogo » (MSS. Gal., T. XXXVI, fol. 56 a tergo).

La prova, così ben riuscita nel conoide parabolico, invogliò il Torricelli a tentarla anche in quell' altro esempio addotto dal Cavalieri, cioè nel triangolo, dentro cui, supposto che il centro di gravità si trovi sopra qualche punto della bissettrice, si potesse questa riguardar quale una bilancia, concentrativi sopra i pesi delle infinite linee, di che s' intesse la detta triangolar superficie. Posto ciò, nient' altro rimaneva a sapere e a dimostrare, per modo di lemma, se non che dove riesca il punto dell' equilibrio sopra una bilancia gravata per tutta la sua lunghezza da pesi, che scemino ugualmente a proporzione delle distanze uguali. Ma il lemma era stato dimostrato già da Galileo, e posto per la prima proposizione nel suo trattato dei centri di gravità, sotto questa forma: « Si magnitudines quotcumque sese aequaliter excedentes, et quarum excessus earum minimae sint aequales, ita in libra disponantur, ut ex distantiis aequalibus pendeant: centrum gravitatis omnium libram ita demonstratur dividere, ut pars versus minores reliquae sit dupla » (Alb. XIII, 267).

E in tali condizioni si trovano per l' appunto le infinite linee del triangolo ACB (fig. 142) parallele ad AB, e pendenti pel loro mezzo dalla libbra CE, la quale dunque sarà segata dal centro di gravità D in modo, che la parte verso i pesi minori, ossia CD, sia a DE doppia.

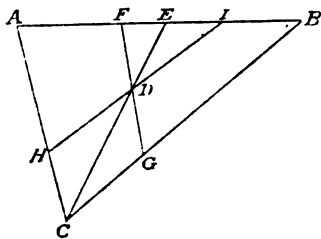



Figura 142.

A ridurre la conclusione assoluta rimaneva dunque solamente a dimostrare il supposto, che cioè il centro di gravità del triangolo si trova sopra un punto della linea, la quale sia da un vertice fatta scendere sul mezzo del lato opposto, ciò che si proponeva di fare il Torricelli, dietro lo stesso principio di Galileo, intitolando così la sua proposizione: *Centrum gravitatis trianguli, supposito Galilei principio.*

Nel medesimo triangolo dianzi figurato sia D il centro preso sopra la CE, la quale si vuol dimostrare essere bissettrice. Si consideri AB libbra, d' onde pendano le infinite linee ponderose parallele a CB, le quali crescendo da B verso A, a proporzione delle distanze, faranno che il centro I divida essa libbra in modo, che la parte AI verso i pesi minori sia doppia della IB. In

simil guisa considerando la medesima libbra come gravata dalle infinite linee parallele ad AC, queste da A scemando col detto ordine verso B concentreranno i loro pesi in F, punto dallo stesso B distante il doppio che da A. Condotta dunque da I la IH parallela a BC e da F la FG parallela ad AC, dovendosi nella loro intersezione trovare il centro del triangolo passeranno ambedue per D e la costruzione, che di qui nasce, dà facile modo a dimostrare l' intento, che cioè sia in E il lato AB segato nel mezzo.

Dall' essere infatti, per le cose ora dette, BI = 2 AI, AF = 2 FB, viene AI : IB = FB : FA, e, componendo, AB : IB = AB : FA, dunque IB = FA. La similitudine dei triangoli dall' altra parte dà AF : FE = CD : DE = BI : IE, dunque EF = IE e perciò AE = EB, che è la conclusione desiderata, in proporre e in dimostrar la quale così propriamente procede il Torricelli.

« PROPOSIZIONE XII. — *Esto triangulum ABC, cuius gravitatis centrum sit D, et ducta EDC, dico CE secare bifariam AB.* »

« Ducatur, per D, FDG parallela ad AC, et IDH parallela ad BC. Quoniam AB est libra et ad singula ipsius puncta magnitudines pendent, nempe lineae parallelae ad latus BC, habentque ipsae magnitudines inter se, ob IV Sexti, eamdem rationem quam distantiae ab extremo librae puncto A, et omnium centrum per suppositionem est in IH una ipsarum : item quoniam AB est libra, et ex singulis ipsius punctis magnitudines pendent, nempe lineae parallelae ad latus AC, habentque magnitudines eamdem rationem quam distantiae ab extremo librae puncto B, et omnium centrum est in FG per suppositionem; erit libra AB secta in eadem ratione, nempe, ut AI ad IB, ita BF ad FA. Et componendo, AB ad BI ut BA ad AF. Quare aequales sunt AF, IB. Quoniam vero AF ad FE est ut CD ad DE, sive ut BI ad IE, erunt aequales etiam FE, EI. Ergo aequales AE, EB quod erat demonstrandum » (ibid., fol. 21).

Questa maniera di applicare gl' indivisibili alla ricerca del centro di gravità, ne' due esempi del conoide parabolico, e del triangolo, parve al Torricelli tanto più facile e più spedito, e da preferirsi anche in altri casi più complicati a quello propostogli dal Cavalieri, che non potè tenersi dal fargliene qualche motto: a che il Cavalieri stesso rispondeva il dì 23 Dicembre del detto anno 1642: « La stima poi, che ella mostra di fare delle mie debolezze, è da me ricevuta dall' abbondanza del suo affetto, e non dal merito di quelle, poichè sono di niuno momento, massime in comparazione di qe' suoi sottilissimi trovati, come stimo deva essere il modo che mi accenna di ritrovare il centro di gravità per gl' indivisibili, intorno al quale non mancherò di dire come il signor Giann' Antonio Rocca, gentiluomo reggiano, ingegno vivacissimo e versatissimo nelle Matematiche, altre volte da me credo nominato, mi mandò un altro modo assai facile di ritrovare i centri di gravità per gl' indivisibili, quale ora non ho alle mani, ma sta rivolto fra' miei scartafacci, e forse potriano riscontrarsi insieme » (ivi, T. XLI, fol. 140).

Sarebbe per questa nuova storia delle Matematiche applicate alla scienza del moto assai importante il sapere se il Rocca, mettendo a varie prove

quella sua maniera di misurare il gravitar delle linee e delle superficie dai loro momenti, e trovandola complicata, s' incontrasse, per renderla più semplice, in quell' altra maniera usata dal Torricelli, e l' eccellenza della quale principalmente consisteva nel misurare il peso degli elementi infinetisimi assolutamente in sè sulla lunghezza della libbra, e non moltiplicato per la distanza laterale dal punto d' appoggio. Così si riducevano i rettangoli, presi per la misura dei momenti, a semplici linee, e i parallelepipedi a quadrati, il baricentro dei quali è manifestamente il medesimo che dei circoli inscritti o circoscritti. Sarebbe importante, ripetiamo, saper se si fosse in questo stesso pensiero incontrato anche il Rocca, ma perchè a noi mancano i documenti, unico o almen principale autore di questa applicazione degl' indivisibili alla Baricentrica non possiamo non riconoscere il Torricelli, del quale, dopo i saggi fatti sul conoide e sul triangolo, è da veder quali fossero, in così fatte esercitazioni, i progressi. Ebbero questi non leggero impulso dal ripensare alle proposizioni già dimostrate intorno al centro di gravità del settore di circolo: proposizioni, le quali benchè fossero ridotte assai più semplici e a minor numero di quelle che bisognarono al Della Faille per dimostrare il medesimo; il metodo degli indivisibili nonostante prometteva, nell' ordinarle e nel condurle, d' alleviare e d' abbreviare anche di più la faticosa lunghezza del viaggio, perchè si potrebbe, dietro gli esempi del triangolo, riguardare il settore intessuto degli infiniti archi concentrici decrescenti con sempre egual proporzione, via via che si dilungano dalla maggiore circonferenza, concentrando sopra il raggio, che tutti gli divide nel mezzo, come sopra una libbra, i loro pesi.

Gettiamo uno sguardo sul settore ABCD (fig. 143) segato nel mezzo dal raggio DB. Se si sapesse il centro di gravità degli archi che lo compongono, dal primo che sia per esempio E, infino all' ultimo D, è manifesto che l' invenzione del centro di esso settore caderebbe sotto quella del triangolo isoscele, che avesse per sua altezza DE. Tutto dunque si riduce, per procedere in questa nuova via sicuri, e con buona speranza di riuscita, a determinare sull' asse il punto estremo E della libbra, o il centro di gravità dell' arco. Il Torricelli, che non aveva potuto ancora leggere la Centrobarica del Guldino, credè che fosse il problema intatto, e si dette all' opera, la quale felicemente riuscì, ponendo la ritrovata soluzione per lemma preparatorio alla ricerca del centro di gravità del settore di circolo, per via degli indivisibili, intorno a che distese quell' altro trattatello, che qui appresso ricopiamo dal manoscritto.[1]

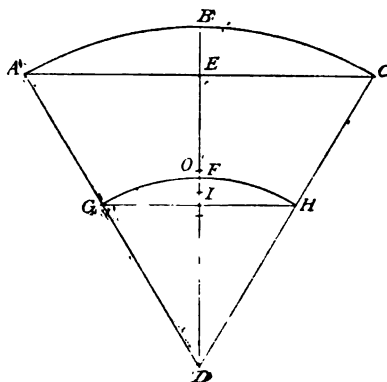



Figura 143.

« *Supponimus* primo: Cuiuscumque rectae lineae terminatae gravitatis centrum esse punctum, quod ipsam bifariam dividit. Secundo: Congruentium perimetrorum centra gravitatis congruere. »

« *Lemma XI.* — Si aliqua figura plana ABCD (fig. 144) in duas congruentes figuras BAD, BCD secta fuerit ab axe BD, dummodo aequales et sibi respondentes anguli ad easdem partes sint, sumanturque BA, BC aequales utrimque perimetri partes, et supposito E centro gravitatis perimetri AB; si ex E ducatur EO perpendicularis ad BD, dico punctum O esse centrum gravitatis perimetri ABC. »

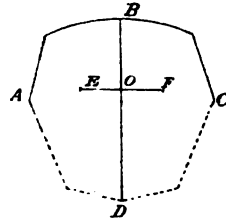



Figura 144.

« Producatur EO in F, ita ut OF aequalis sit ipsi EO. Supposita deinde semifigura BAD super BCD, congruent figurae per suppositionem, et perimeter BA congruet cum aequali BC, punctumque E congruet cum puncto F. Sunt enim aequales EO, OF, et angulos rectos faciunt cum BD. Sed E ponitur centrum gravitatis perimetri BA, ergo F centrum gravitatis erit perimetri BC. Cum autem BA, BC sint aequales, erit centrum gravitatis, per secundam suppositionem, commune punctum O, medium scilicet punctum librae EF. Patet ergo quod erat propositum. »

« *Corollarium.* — Hinc manifestum est cuiuscumque perimetri ABC, sive ex curvis, sive ex rectis lineis componatur, centrum gravitatis esse in axe eius BD, nempe in recta, quae secat ipsum perimetrum in duas partes congruentes ad angulos aequales. »

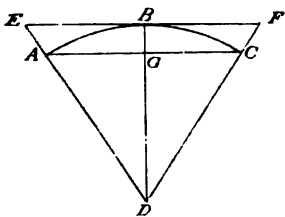
« *Lemma XII.* — Cuiuscumque arcus circuli centrum gravitatis est inter centra rectarum, quarum una sit ipsius chorda, altera tangens chordae parallela. »

« Manifestum est hoc. Esto enim arcus ABC (fig. 145), cuius circuli centrum D, linea vero bisecans angulum arcumque sit BD. In ipsa BD erit, per corollarium lemmatis praecedentis, centrum gravitatis arcus ABC. Esto chorda AC, tangens vero EF, parallela chordae AC: eritque G centrum gravitatis rectae AC, et B erit centrum gravitatis EF. »

Figura 145.

« Jam centrum gravitatis arcus non potest esse neque B, neque G: suspenso enim arcu ex B, sive ex G, aequiponderaret, quod est absurdum, cum latus sit ad easdem partes. Tanto minus potest esse extra puncta B, G, ob eamdem causam. Quare patet quod fuerat propositum. »

« *Lemma XIII.* — Si intra arcum circuli coaptatae fuerint quotcumque rectae lineae aequales, per continuam arcus bisectionem, totidemque fuerint tangentes ipsis coaptatis aequidistantes; erit centrum gravitatis arcus inter centra omnium coaptatarum, et omnium tangentium. »

« Esto arcus ABC (fig. 146), cuius circuli centrum D. Coaptatae, per

continuam arcus bisectionem, sint rectae aequales AE, EB, BF, FC. His vero aequidistent totidem tangentes GH, HI, IL, LM, et producta DN ad contactum N, erunt N et P, per primam suppositionem, centra gravitatis rectarum GH, AE. Centrum vero arcus ANE est, per lemma XII, inter puncta N et P. Ponatur illud esse O. Ductisque PQ, OR, NS perpendicularibus ad HD, erunt puncta Q, R, S centra gravitatis: nempe Q rectarum AE, EB, G tangentium GH, HI, R vero arcus AEB. Iterum productis QT, RV, SX perpendicularibus ad ID, erit V, centrum gravitatis totius arcus ABC, inter puncta T et X, alias enim duae parallelae convenirent: videlicet inter centrum omnium coaptatarum, et omnium tangentium, quod erat propositum. »

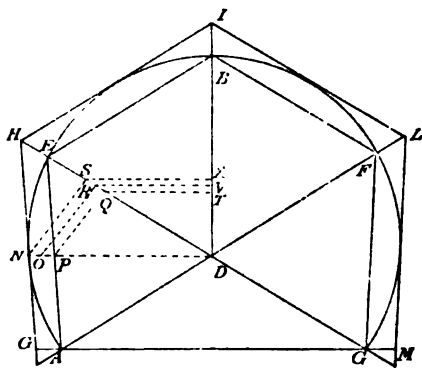



Figura 146.

« *Lemma XIV.* — Si arcui circuli ABC (fig. 147), per continuam eiusdem arcus bisectionem, quotcumque rectae lineae aequales coaptatae fuerint AE, EF, FG, GB, BH, HI, IL, LC, fiatque, ut omnes coaptatae lineae ad chordam AC, ita D, catetus unius coaptatae, ad aliam sumendam ex centro D, in axe BD; dico terminum huius assumptae esse centrum gravitatis omnium praedictarum linearum. »

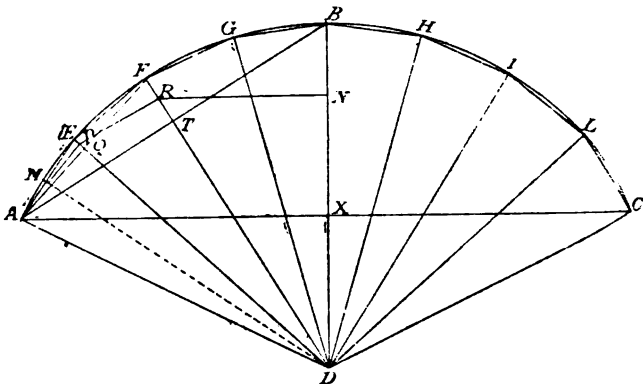



Figura 147.

« Ducatur ex M, puncto medio rectae AE, perpendicularis MP ad ipsam ED, eritque P, per corollarium lemmatis XI, centrum gravitatis duarum rectarum AE, EF. Ducta vero ex P recta PR perpendiculariter ad FD, erit R, per corollarium lemmatis XI, centrum gravitatis quatuor rectarum AE, EF, FG, GB. Ducta iterum ex R recta RN perpendiculariter ad BD, erit N, per dictum corollarium, centrum gravitatis rectarum AE, EF, FG, GB, BH, HI, IL, LC. »

« Jam aequiangula triangula sunt, per VIII Sexti, EMP, PME. Item aequiangula FAT, PDR, nec non BAX, RDN, demonstraturque hoc ut in lemmate IX factum est. »

« Quoniam MD ad DP est ut EM ad MP, sive ut EA ad AQ, sive ut FEA ad AF, sed PD, ad DR, per IV Sexti, est ut FA ad AT; erit ex aequo MD ad DR ut FEA ad AT, sive ut BGFEA ad AB: DR denique ad DN, per eamdem, est ut BA ad AX. Ergo ex aequo omnes rectae BG, GF, FE, EA ad AX, sive omnes AE, EF, FG, GB, BH, HI, IL, LC, ad AC, sunt ut MD ad DN. Unde patet quod propositum fuerat. »

« PROPOSIZIONE XIII. — *Centrum gravitatis cuiuscumque arcus circuli est in axe eiusdem ita secto, ut integer axis, ad partem quae versus centrum circuli est, ita sit ut arcus ad chordam.* »

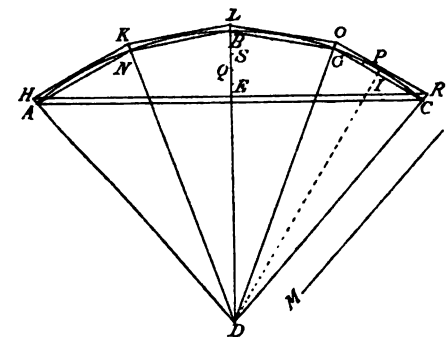
« Esto arcus ABC (fig. 148), cuius chorda AC, axis BD, fiatque, ut arcus ABC ad chordam AC, ita axis BD ad DE: dico E esse centrum gravitatis arcus ABC. Nisi enim centrum gravitatis sit punctum E, erit utique aliud punctum vel supra, vel infra punctum. »

Figura 148.

« Esto primum, si possibile est, F, ipsique sectori duae figurae, per continuam arcuum bisectionem, altera quidem circumscribatur, altera vero inseribatur ea lege, per IV libri I *De sphaera et cylindro,* ut latus OR circumscriptae, ad latus CG inscriptae, minorem rationem habeat quam ED ad DF. Deinde fiat ut omnes rectae AN, NB, BG, GC ad chordam AC, ita catetus DI ad M. Ostendo primum M esse maiorem quam DF. »

« Nam BD ad DE est ut arcus ABC ad chordam AC, ergo BD ad DE maiorem habet rationem, quam perimeter ANBGC ad AC: hoc est quam DI ad M. Ipsa vero DE ad DF maiorem habet rationem, quam PD ad M; erit itaque M maior quam DF. Ponatur DQ aequalis ipsi M, et erit Q, per lemma XIV et per constructionem, centrùm gravitatis perimetri ANBGD. Centrum vero gravitatis perimetri HKLOR adhuc ulterius est versus L, et inter utrumque debet esse centrum gravitatis arcus, ergo centrum gravitatis arcus non est F. »

Figura 149.

« Esto deinde, si fieri potest, centrum gravitatis arcus punctum S (fig. 149), ipsique arcui duae figurae, per continuam arcus bisectionem, altera quidem circumscribatur, altera vero inscribatur ea conditione, per IV libri I

De sphaera et cylindro, ut latus circumscriptae OR, ad latus inscriptae GC, minorem rationem habeat quam SD ad DE. Tunc enim sine dubio ratio arcus GPC, ad rectam GC, sive arcus ABC, ad perimetrum ANBGC, multo minor erit quam sit ratio SD ad DE. »

« Fiat, ut perimeter HKLOR ad HR, ita catetus PD ad M: dico primum M minorem esse quam DS. Nam arcus ABC, ad AC, est ut BD ad DE, ipsa vero AC, ad perimetrum ANBGC, per lemma VII, est ut HR ad HKLOR, sive ut M ad DP. Ergo, per XXIII Quinti, arcus ABC, ad perimetrum ANBGC, est ut M ad DE. Sed ratio SD ad DE maior est ratione perimetri ANBGC ad AC; ergo ratio SD ad DE maior est ratione M ad DE. Maior itaque est SD quam recta M. »

« Ponatur DQ aequalis ipsi M, eritque Q, per lemma XIV et per constructionem, centrum gravitatis perimetri HKLOR. Centrum vero perimetri ANBGC adhuc inferius est versus D, et inter utrumque est omnino centrum gravitatis arcus. Quamobrem centrum gravitatis arcus non est S. Cum itaque ostensum sit non esse neque supra neque infra E, superest quod centrum gravitatis arcus ABC sit punctum E, quod erat propositum. »

« Proposizione XIV. — *Centrum gravitatis sectoris circuli est in axe eiusdem ita secto, ut totus axis, ad partem quae est versus circuli centrum, sit ut arcus sectoris ad $^2/_3$ chordae eiusdem.* »

« Esto sector ABCD (fig. 150), cuius chorda AC, axis vero BD, fiatque, ut arcus ABC ad AC, ita BD ad DE. Et erit E, per propositionem praecedentem, centrum gravitatis arcus ABC. Sumpto iam in recta BD quolibet puncto F, agatur centro D, intervallo DF, arcus GFH, et fiat, ut arcus GFH ad GH, ita FD ad DI, eritque punctum I, per eamdem, centrum gravitatis arcus GFH. »

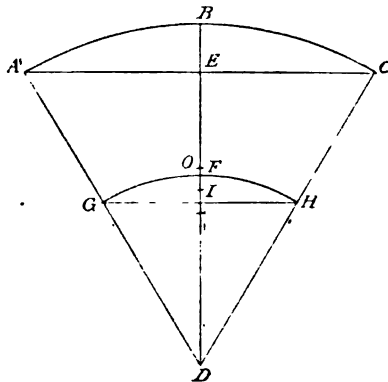



Figura 150.

« Quoniam, ut arcus ABC ad arcum GFH, ita semidiameter AD ad DG, sive, per IV Sexti, AC ad GH; erit, permutando, ut AHC ad AC, ita GFH ad GH. »

« Jam BD ad DE est ut ABC ad AC, sive, ut GFH ad GH, vel ut FD ad DI. Permutando igitur erit BD ad DF ut ED ad DI, et etiam ABC ad GFH erit ut ED ad DI. »

« Est itaque DE libra, ex cuius punctis singulis magnitudines quaedam appensae sunt, quarum duae sunt arcus ABC, GFH, reliquae vero sunt arcus praedictis concentrici, habentque magnitudines, ut demonstratum est, illam inter se rationem, quam illarum distantiae ED, DI ab extremo puncto librae D, quemadmodum etiam habent lineae alicuius trianguli. Ergo libra CE, ad quam applicatae sunt praedictae magnitudines, ita secabitur a centro gravi-

tatis omnium magnitudinum, ut secatur axis alicuius trianguli a centro gravitatis eiusdem, nempe ea conditione, ut pars, ad extremum D terminata versus magnitudines decrescentes, sit, ad reliquam quae terminatur in E, centro gravitatis maximae magnitudinis ABC, in proportione dupla. »

« Secetur ergo libra DE in O, ita ut DO ad OE sit dupla, et erit O centrum gravitatis omnium simul arcuum concentricorum, nempe ipsius sectoris. Erit ergo arcus ABC, ad AC, ut BD ad DE. Ipsa vero AC, ad $^2/_3$ ipsius AC, erit ut ED ad DO. Quare ex aequo arcus ABC, ad $^2/_3$ ipsius AC, erit ut BD ad DO, nempe ut axis sectoris ad illam, quae interiicitur inter centrum circuli, et centrum gravitatis eiusdem sectoris, quod erat propositum » (ibid., T. XXXVII, fol. 25-31).

La felice riuscita di questo nuovo metodo, applicato alla ricerca del centro di gravità nel settore di circolo, incorò nel Torricelli una dolce speranza di dovere anche più oltre promovere la Baricentrica da quel punto, a cui l'aveva già condotta il padre Della Faille con tanta fatica. Forse, incominciò il Nostro a pensare, la medesima analogia, che nelle porzioni del cerchio, corre nelle porzioni della sfera: e benchè sia stato dimostrato ormai il centro di gravità nel settore circolare e nell'emiciclo, nessuno sa però ancora dove stia sull'asse quello del settore sferico, desunto da quello del centro dell'emisfero. Sia questo emisfero BGC (fig. 151), e si riguardi, nella medesima maniera, come composto delle infinite superficie concentriche intorno ad A: si rappresentava alla mente del Torricelli che, come dianzi dal centro di gravità degli archi era stato facilmente condotto a risolvere un problema già reso noto; così ora, dal centro di gravità delle callotte sarebbe, per vie simili, condotto a risolvere quest'altro problema in una maniera del tutto nuova.

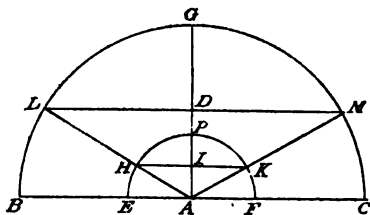



Figura 151.

Sia infatti il centro di gravità della superficie emisferica BGC il punto D, per il quale passi la LM perpendicolare all'asse AG. Descrivasi qualunque altra delle infinite superficie consentriche EPF, per il baricentro I della quale si conduca la HK parallela a LM, e si compia il triangolo LMA. Avremo $BGC : EPF = AL^2 : AH^2 = LD^2 : HI^2 = \pi LD^2 : \pi HI^2$, e così sempre, intantochè sopra la libbra AD si possono intendere applicate, ne' medesimi punti, due vari ordini di grandezze proporzionali, e aventi ambedue perciò sopr'essa libbra il medesimo centro: gl'infiniti circoli cioè, e le infinite callotte. E perchè di queste si compone l'emisfero, e di quelle il cono; dal centro di gravità noto nell'un solido, si renderà manifesto il centro di gravità nell'altro.

Tutto il forte sta dunque nel sapere dove la volta emisferica, o qualunque altra minore callotta o *berrettino,* come popolarmente il Torricelli la chiamava, ha sull'asse il suo baricentro. E perchè, ricercando ne' libri dei Matematici antichi e dei moderni, ritrovò che nessuno ancora l'aveva inse-

gnato, si dette il Nostro, con trepidante sollecitudine, all' opera, la quale mostrava di dover rendersi assai spedita, specialmente dop' essersi preparati alcuni lemmi geometrici, conclusi dal teorema noto che cioè, rivolgendosi gli archi EB, AB (fig. 152) intorno al diametro BD descrivono due callotte proporzionali ai quadrati delle suttese. Stando infatti le dette callotte, che chiameremo C, C', in ragion composta delle altezze, e della circonferenza di un circolo grande, o del suo diametro, avremo $C : C' = BF . BD : BG . BD = EB^2 : AB^2$. Dietro ciò dimostrava il Torricelli che « se nella sfera ABCD siano applicate *utcumque* EF, AG, sarà il berrettino EBH, all' ABC, come BF alla BG. »

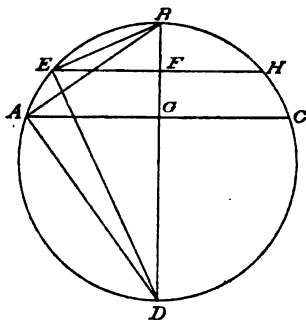



Figura 152.

« Tirinsi ED, AD, EB, AB. Il quadrato EB al BD sta come la retta BF alla BD. Ma il quadrato BD al BA sta come la retta DB alla BG; *ergo ex aequo* il quadrato EB al BA sta come la retta BF alla BG. Ma come il quadrato BE al BA, così l' un berrettino all' altro. Ergo etc. » (ivi, T. XXXVI, fol. 32).

Di qui, cioè da $ABC : EBH = BG : BF$, dividendo, abbiamo $ABC - EBH : EBH = BG - BF : BF$, ossia che la zona AEHC sta alla EBH come l'altezza FG di quella sta all' altezza FB di questa, e così per tutte le altre porzioni intercette sulla sfera fra piani paralleli, le quali dunque saranno uguali, quando siano le relative altezze fra loro uguali.

Se ora si prendano quelle altezze infinitamente piccole, ragionava il Torricelli, le zonule infinite intercette essendo uguali gràviteranno ugualmente co' loro centri sopra la libbra BG, la quale per conseguenza avrà nel mezzo il punto dell' equilibrio, ond' è che il baricentro della callotta, per esempio ABC, taglierà nel mezzo la BG sua saetta. Così essendo, l' invenzione del centro di gravità dell' emisfero era ovvia, perchè, se nella figura 151 qui poco addietro, D è il mezzo di AG, l' altezza del cono è DA, la quale essendo divisa, a partir dal vertice, in quattro parti uguali; in P, dove si dica tornar la terza divisione, sarà il centro cercato. Che se anche GD similmente sia quadripartito, è manifesto che GD conterrà cinque delle parti, delle quali PA ne contiene tre sole. Se poi BGC sia minore di una mezza circonferenza, per avere il centro di gravità del settore, basta divider nel mezzo, per esempio in X, la saetta, la quale prolungata infino a incontrare in A il centro della sfera, da A risalendo su per la AX per tre quarti della sua intera lunghezza, ivi giunti troveremo il luogo, dove il settore stesso concentra il suo peso.

Così annunziate aveva il Torricelli distese le sue proposizioni, la verità delle quali dipendendo tutta dalla verità del teorema che cioè le callotte hanno il baricentro nel mezzo della saetta, ne dava, comè di cosa nuova e importantissima avviso al Cavalieri. Poi confermò questi autorevolmente nella XXXIV della sua quinta Esercitazione geometrica il teorema torricelliano, ma intanto rispondeva non saperne per ora altro, se non che il Guldino, nella

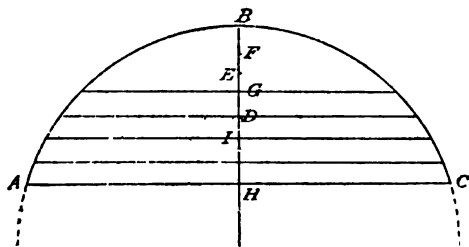
Centrobarica, era venuto a una conclusione molto diversa, dicendo che il centro di gravità della cupola emisferica è il medesimo che quel del circolo fatto passare attraverso all' asse di lei.

Il Guldino s' era senza dubbio ingannato, ma l' inganno di lui, non confermato ancora da altre simili fallacie notate nel suo libro, aveva messo il Torricelli in gran sospetto che non si fosse invece ingannato egli stesso, forse, per non averci bene applicati gl' indivisibili, o per altre ragioni: tanto più che queste gli pareva venissero avvalorate dal saper che il Nardi e il Ricci avevano trovato il centro di gravità del settore sferico segar l' asse in altre proporzioni, da quelle ch' egli aveva concluse. Si volse allora a risolvere il problema baricentrico delle superficie sferiche per altre vie, scansando gl' indivisibili, e attenendosi ai metodi antichi, per star ne' quali maggiormente sicuro imitò il processo tenuto da Archimede nello Scolio alla IX proposizione del primo degli Equiponderanti, per dimostrar che il centro di gravità del parallelogrammo sta nella linea retta, dalla quale due lati opposti sian segati nel mezzo (Opera cit., pag. 172). La dimostrazion nonostante, che qui trascriviamo, confermava la verità di quel che aveva concluso per via degli indivisibili, star sempre cioè il centro di gravità della callotta sferica nel mezzo della saetta.

« Suppongo in primo luogo che, se molte grandezze averanno li centri di gravità nella retta AB, tutti fra li punti A, B; che il centro comune di tutte sia fra li punti A, B. Suppongo in secondo luogo che, se una linea retta sarà divisa in parti uguali, e di numero pari, ed in ciascuna parte di essa sia il centro di gravità di altrettante grandezze uguali; che il centro di tutte stia in una delle linee di mezzo. Suppongo, terzo, che il berrettino e le zone sferiche abbiano il centro loro di gravità nella saetta, e suppongo in ultimo quel che ho già dimostrato che cioè i berrettini stanno come le saette, e che perciò le zone, comprese fra piani equidistanti e paralleli, sempre sono tra loro uguali. »

« Proposizione XV. — *Il centro del berrettino sferico sempre sta nel mezzo della saetta.* »

Figura 153.

« Sia il berrettino sferico ABC (fig. 153), e mezzo della saetta D; dico ecc. Se non è D sia per esempio, se può, E, e divisa BD bifariam in F e poi DF bifariam in G, finchè resti DG minore di DE, seghisi tutta BH in parti uguali alla DG, e tirinsi perpendicolari alla saetta. Saranno dunque i berrettini come le saette, cioè in proporzione aritmetica *ab unitate,* e però tutte le zone saranno uguali al minor berrettino e fra di loro. Ed avendo ciascuna il centro nel suo asse, ed essendo tutte uguali, il centro di tutte dovrà essere fra il centro delle due

medie, cioè dovrà essere nella linea IG. Ma è fuori di essa, essendo supposto E, ergo etc. » (ivi, fol. 32).

È cosa veramente singolare che nemmeno questa dimostrazione valesse ad assicurare il Torricelli, il quale avrebbe potuto dall' altra parte confermarsi nella verità della sua conclusione dalle proposizioni XVIII e XIX del primo libro dei Solidi sferali. Se è vero infatti, per la detta prima (Op. geom. cit., pag. 28), che la superficie dell' emisfero descritto dal quadrante ADH (fig. 154) è uguale alla superficie esterna del cilindro descritto dal rettangolo FB, rivolgentesi intorno al medesimo asse HB; e se è vero, per la seconda (ivi, pag. 30), che le superficie della callotta HD e della zona DA sono uguali alle curve superficie cilindriche descritte da FC e da EB; essendo manifesto de' cilindri che il loro centro sega l' asse nel mezzo, sarà pur manifesto che son segate nel mezzo le saette de' berrettini e le altezze delle zone.

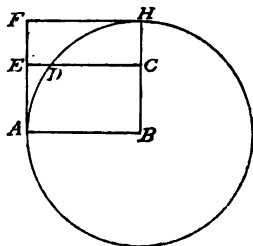



Figura 154.

O che non avesse il Torricelli ancora dimostrate quelle sue proposizioni sferali, o che non gli sovvenisse di applicarle opportunamente alla Baricentrica, è un fatto che ne rimase il vantaggio al Wallis, il quale rendeva generalissimi così i teoremi torricelliani: « Si semicircumferentiae circuli, vel arcui minori, circumponatur ex continuis rectis, quae mediis suis punctis peripheriam contingant, conflata linea, quae ab hac linea composita circa istius circuli diametrum quamvis, quae illam non secet, conversa, describitur superficies curva; aequatur superficiei curvae cylindri recti aeque alti, basim habentis exposito circulo aequalem » (De motu, P. II, Londini 1670, pag. 203). Di qui si deduceva, per semplice corollario immediato, il centro di gravità delle superficie sferiche star nel mezzo dell' asse, con quella sicurezza venuta a mancare nel Torricelli, che pur avrebbe potuto, trent' anni prima, così utilmente valersi di quel medesimo argomento. E che rimanesse veramente esso Torricelli in timore di essersi ingannato, anche dopo aver ritrovato quella così perfetta corrispondenza tra i resultati del metodo antico e degli indivisibili; resulta dalla seguente lettera, scritta il dì 28 Marzo 1643 da Firenze al Cavalieri:

« . . . . . . Le scrissi che il centro delle superficie sferiche stava nel mezzo dell' asse corrispondente: glie ne darò un cenno, per timore di essermi ingannato, senza indivisibili, mentre s' abbia a contendere con genti, che non gli accettano. Le premesse, che son pedanterie meccaniche e geometriche, son tali: 1.° Suppongo che i predetti centri sieno nell' asse. 2.° Suppongo che, se alquante grandezze avranno il centro di gravità nella retta AB, il centro comune di tutte sia fra i punti A, B estremi. 3.° Suppongo che, se una sfera sarà segata con piani paralleli, le superficie delle zone intercette, ed anco de' segamenti estremi, siano fra di loro come le porzioni degli assi corrispondenti. 4.° Se una linea retta AB (fig. 155) sarà segata in quante parti un

vuole, eguali e di numero pari, e che ciascuna di esse sia il centro di gravità di altrettante grandezze uguali fra di loro; suppongo che il centro comune di tutte sia in una delle sezioni di mezzo CE, ED, e lo provo così: Siano i centri di grandezze uguali i punti F, G, H' I, N, M, L, O, ciascuno dei quali sia in uno dei segamenti della linea *utcumque*. Perchè dunque le grandezze, delle quali esse son centri, si suppongono uguali, sarà il centro comune delle due grandazze F, O il punto medio della retta FO. Ma il punto medio della retta FO sta nella retta CD; così anco il centro della coppia G, M sta nella retta CD, ed il centro delle altre due coppie H, L ed I, N sta nella CD; adunque il centro comune di tutte sta nella CD, per la seconda supposizione. »

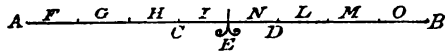



Figura 155.

« Sia la superficie di un segmento o frusto sferico, di cui sia asse BH, nella medesima figura 153 qui poco addietro rappresentata, e segata per mezzo BH in D, dico che D sarà centro di gravità. Se non è D, sia un altro per esempio E, e seghisi per mezzo BD in F, e di nuovo FD seghisi per mezzo in G, e così sempre, fin che s'arrivi ad una sezione DG, minore della retta DE. Seghisi poi tutto l'asse in parti uguali alla DG, e per i punti dei segamenti passino piani perpendicolari all'asse. Non è dubbio che tutte le superficie dei frusti e del segamento ultimo saranno uguali. Anzi ognuna di esse averà il centro di gravità in un segamento della saetta BH, divisa in parti uguali. Dunque il centro comune di tutte le grandezze sarà in una delle due sezioni di mezzo DG, DI. Dunque il centro di tutte non è M, ma necessariamente sarà D, dimostrandosi che niun altro punto della retta BH può essere centro di gravità della predetta superficie sferica, di segamento o di frusto che ella sia » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 127).

Il Cavalieri non potè non approvare il processo dimostrativo e la verità della conclusione, la quale fu, per essere ordinata con l'altre nel trattato dei centri di gravità, messa dallo stesso Torricelli in questa forma:

« Proposizione XVI. — *Centrum gravitatis zonae sphaericae, sive superficiei curvae segmenti sphaerici, est in medio axis ipsius zonae.*

La dimostrazione, che si legge manoscritta al fol. 33 del solito tomo XXXVI crediamo di poterla tralasciare, non essendo differente da quella mandata per lettera al Cavalieri, che nella forma esteriore della lingua latina. E come messe in ordine questa e la precedente, così messe in ordine le proposizioni, che ne conseguivano, relative ai baricentri delle porzioni di sfera, tanto più che in sostanza ebbe a ritrovar che anche il Nardi e il Ricci concordavano seco nell'ammettere la verità così pronunziata:

« Proposizione XVII. — *Centrum gravitatis hemisphaerii secat axem ita, ut pars ad verticem sit ad reliquam sesquipartiens tertias.* »

Ma prima di trascriver la dimostrazione vogliamo osservare che il Torricelli suppone il seguente lemma: Se una libbra sia per tutta la sua lunghezza gravata da pesi, via via crescenti come i quadrati delle distanze, il

punto dell' equilibrio la segherà in modo, che la parte verso i pesi minori sia tripla della rimanente. Anzi scrive in parentesi, per modo di nota: *questo bisogna premetterlo e cavarlo dal cono.* In questo solido infatti gl' infiniti circoli che lo compongono si possono riguardar ponderanti sopra l' asse come sopra una libbra, ed essi circoli stanno come i quadrati dei raggi FH, DE (fig. 156), o delle distanze AH, AE. E perchè il centro dell' equilibrio si sa che è sull' asse a tre quarti di distanza dal vertice A; par che ne volesse di qui concludere il Torricelli che il centro di gravità nella libbra è come si è detto sopra nel lemma. Sarebbe stato meglio però dimostrare direttamente il principio statico, e di lì concluderne il centro di gravità del cono, come dianzi dal principio statico di Galileo aveva concluso il centro di gravità del triangolo, ma la dimostrazione dipendeva da più alti principii, de' quali faremo cenno in altro proposito. Forse nella medesima statica galileiana sarà andato il Torricelli ricercando qualche cosa, che facesse al presente suo particolare bisogno, con intenzion di scrivere in fronte al teorema *Centrum gravitatis coni, supposito principio Galilei,* ma ebbe questo principio a trovarlo formulato molto diversamente da quel che s' aspettava, perchè, nella sesta proposizione, scritta nell'Appendice ai dialoghi delle Scienze nuove, supposta una libbra nelle condizioni già dette, si dimostra che « centrum aequilibrii libram dividit, ut pars versus minores magnitudines reliquae sit maior quam tripla » (Alb. XIII, 280). Or qui bisognerebbe dire o che è falsa la proposizione di Galileo, o è falso il centro di gravità del cono, come tutti l' hanno insegnato, o è falsa l' applicazione voluta farsi degl' indivisibili in questo caso. E perchè il Torricelli prosegue pure con gl' indivisibili, e conferma il centro di gravità del cono segar l' asse in modo, che la parte verso il vertice sia precisamente tripla, e non già più che tripla della rimanente; lasciamo ai nostri decidere in giudizio, per passare a leggere nel manoscritto la dimostrazione di ciò, che s' è di sopra annunziato.

Figura 156.

« Hemisphaerium sit ABC (fig. 157), cuius axis BD secetur bifariam in E: eritque E centrum superficiei ABC. Sumatur punctum quodvis F, et dividatur bifariam FD in I, eritque I centrum superficiei GFH. »

« Superficies autem ABC, ad superficiem GFH, est ut quadratum BD ad DF, sive, sumptis subquadruplis, ut quadratum ED, ad DI. Est ergo ED libra, in qua sunt centra gravitatis infinitarum magnitudinum, quarum maxima habet centrum in E, minima in D, suntque magnitudines inter se in duplicata ratione distantiarum ab extremo librae D. Ergo centrum omnium erit O: sumpta scilicet EO $^1/_4$ totius ED. Quare BO ad OD erit ut 5 ad 3, quod erat demonstrandum. »

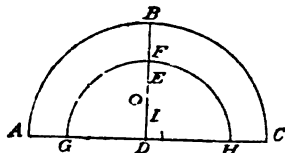



Figura 157.

« Proposizione XVIII. — *Esto solidus sphaerae sector ABCD* (fig. 158),

constans ex cono ADC, et ex segmento ABC, sectaque DF bifariam in E, et ED in quatuor partes aequales, quarum una sit EO; dico centrum gravitatis sectoris solidi esse O. »

Figura 158.

« Sumatur quodvis punctum in recta BD, puta I, et per illud agatur superficies sphaerica HIL, bisectaque IM in N, erit N centrum superficiei HIL, sicut et E est centrum superficiei ABC. »

« Jam tota BD, ad totam ID, est, ob aequalitatem, ut AD ad DH, sive, per IV Sexti, ut FD ablata ad ablatam DM. Quare tota BD, ad totam DI, erit ut reliqua BF ad IM, sive, sumptis subduplis, ut BE ad IN. Et permutando, et per conversionem rationis, erit BD ad DE ut ID ad DN. Et permutando BD ad DI ut ED ad DN. Superficies vero ABC, ad superficiem HIL, est ut quadratum BD ad quadratum DI, sive ut quadratum ED ad DN, et hoc modo semper. »

« Pendent ergo ex libra ED magnitudines, quarum maxima centrum habet E, minima vero D. Suntque magnitudines inter se in duplicata ratione distantiarum ab extremo librae puncto, nempe sunt inter se ut circuli alicuius coni. Propterea centrum omnium dividet libram DE in eadem ratione cum centro coni, nempe ita ut pars ad D reliquae sit tripla. Est itaque centrum O, quod erat demonstrandum. »

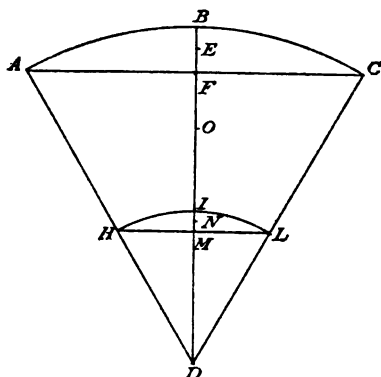
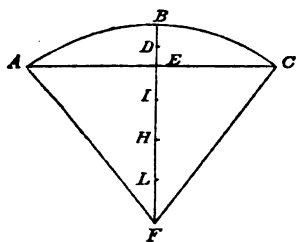



Figura 159.

« PROPOSIZIONE XIX. — *Centram gravitatis solidi sectoris sphaerici est in axe, distans a centro sphaerae per $^3/_4$ axis coni, et $^3/_8$ sagittae segmenti.* »

« Esto solidus sector sphaerae ABCF (fig. 159) cuius axis BF, sectaque sagitta BE bifariam in D, et reliqua DF quadrifariam in punctis I, H, L, erit, per praecedentem, centrum sectoris I. Dico FI constare ex $^3/_4$ rectae FE, et ex $^3/_8$ rectae EB. Quod patet: tota enim DF constat ex tota FE, et ex dimidia BE, nempe constat ex $^4/_4$ rectae FE, et ex $^4/_8$ rectae EB. Ergo subquadrupla recta FL, constabit ex $^1/_4$ rectae FE et $^1/_8$ rectae EB. Ipsa ergo FI, tripla FL, composita erit ex $^3/_4$ FE, et $^3/_8$ rectae EB, quod erat demonstrandum » (ibid., fol. 94, 95).

IV.

Rivolgendo il Torricelli il pensiero sopra queste proposizioni, si compiaceva tutto fra sè e con gli amici di Roma, di aver fatto tant' oltre progredire la Baricentrica, che il libro del p. Della Faille, appetto a suoi pochi fogli scritti, pareva ben assai misera cosa. Mentre infatti gli sforzi del padre non erano riusciti che a dimostrare il centro di gravità del settore di circolo, egli aveva di più ritrovato il centro degli archi, delle callotte e delle zone; de' settori sferici e dello stesso emisfero. Quel che il Gesuita dall' altra parte diceva di aver cioè determinati i centri di gravità di molte altre figure, ciò che nessun altro aveva fatto prima di lui, e di aspettare a pubblicar le sue invenzioni *tum ut explorarem quis de his speculationibus doctorum virorum futurus sit sensus, tum quod antiquorum more librum uno subiecto constare debere existimem, quale sunt circulus et ellipsisi eiusdem omnino essentiae figurae;* pareva al Torricelli una iattanza, la vanità della quale era facilmente scoperta dallo stesso strano giudizio, che s' adduceva per ricoprirla.

Dopo il gesuita accademico di Madrid, nel 1642, quando il Torricelli attendeva a questi suoi studi, non si conosceva in Italia altro autore, che ne avesse trattato: ciò che fa maraviglia, perchè il Guldin, in Austria, aveva sette anni prima, cioè nel 1635, pubblicato il suo primo tomo della Centrobarica. La maraviglia cresce anzi di più, ripensando che il libro, con tanta curiosità ricercato, e non potuto vedere dai Discepoli di Galileo, se non che dopo tanto penare per alcuni, e per altri mai; par che fosse nelle mani del loro proprio maestro. Giovanni Pieroni infatti, il dì primo Marzo 1636 scriveva da Vienna, dove pochi mesi prima quel primo tomo era stato pubblicato, ad Arcetri, una lettera, che terminava con queste parole: « Il padre Guldini gesuita, amico di V. S., che la conobbe in Roma, e che è parziale suo, ha composto un libro *De centro gravitatis partium circuli,* e mi ha consegnato un esemplare, perchè io lo mandi a V. S., il che farò con presta occasione » (Alb. X, 142).

Potrebb' essere o che le promesse non fossero mantenute, o che il libro si fosse smarrito per via, o che pure recapitato non se ne facesse alcun conto, e si rimanesse perciò nella dimenticanza di tutti: fatto è che il Torricelli riposava tranquillo nella sua gloria, senza che nessuno ancora venisse a turbargliene i sogni. Ma quando nel 1641 si pubblicò della Centrobarica il tomo secondo, dove si censurava il metodo degli indivisibili, il Cavalieri divulgò la notizia dell' autore e dell' opera fra gli amici, dandola principalmente al Torricelli, le prime impressioni sull' animo del quale possono giudicarsi dal seguente estratto di lettera, scritta il dì 3 Febbraio 1642 al Michelini:

« . . . . . . V. paternità si compiacerà di ricevere una coppia di teoremi

geometrici nuovi, preconizzati dal miracoloso fra Bonaventura, sebbene uno di essi l'ha disgustato, per essere di un suo emulo, che gli ha stampato un libro contro. Quel teorema dell'emulo di fra Bonaventura, che è un tal p. Guldini gesuita, è la massima conclusione di tutte quante quelle, che io abbia mai sentito fino a questo giorno, ed è tale: Se qualsivoglia figura piana sia girata intorno a qualsivoglia asse, o sia l'asse congiunto con la figura o no, il solido rotondo descritto dalla figura sarà uguale ad un solido, la cui base sia la stessa figura genitrice, ma l'altezza poi sia uguale alla periferia, che nel girare sarà stata descritta dal centro di gravità della figura genitrice. »

« Di più: la superficie curva di quel solido rotondo, ancorchè irregolarissima, sarà sempre uguale ad un parallelogrammo rettangolo, un lato del quale sia uguale alla linea genitrice, e l'altro sia uguale alla periferia descritta parimente dal centro di gravità di essa linea genitrice nel girare. Un teorema poi così grande, che è verissimo, il buon padre non lo sa dimostrare: solo va provando che concorda con le dottrine di Archimede e del XII di Euclide. Ma fra Bonaventura ne ha la dimostrazione facilissima per via degli indivisibili.... » (MSS. Gal., T. XXVI, fol. 6).

Di qui apparisce che i primi pensieri del Torricelli furono serenamente rivolti a favorire l'amico: ma quando quest'amico, cioè il Cavalieri, gli soggiunse la notizia che, nel primo tomo dell'opera del Guldin, dove non entravano per niente gl'indivisibili, perchè ancora non erano conosciuti; l'Autore vi trattava profusamente dell'invenzione dei centri di gravità anche delle porzioni del circolo e della sfera: e allora il Torricelli rivolse il pensiero a sè medesimo, e trepidante che non fosse venuto l'incognito straniero a sfrondargli di sulla fronte gli allori, prese, il dì 21 di Febbraio 1643, la penna, per scrivere così allo stesso Cavalieri:

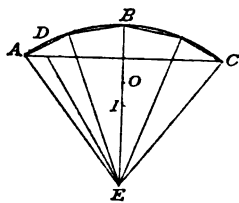
« Non ho potuto ritrovare quest'ultimo libro della Centrobarica: supplico V. P. ad avvisarmi se vi sia alcuna delle seguenti conclusioni: »

« I. Il solido settore della sfera, che è composto di un cono e di un segmento sferico, ha il centro di gravità sull'asse tanto lontano dal centro della sfera, quanto sono $^3/_4$ dell'asse del cono, e $^3/_8$ della saetta del segmento, il che abbraccia l'emisferio ancora. »

« II. La superficie sferica di qualunque segmento di sfera ha il centro di gravità nel mezzo della sua saetta. »

« III. Ogni zona di superficie sferica, tagliata con piani paralleli, ha il centro nel mezzo del segmento dell'asse intercetto tra i detti piani. »

Figura 160.

« IV. Se nel settore del circolo sarà inscritta una figura di molti lati uguali, mediante la continua bisezione dell'arco, se faremo come tutte le dette linee uguali ABC (fig. 160) alla corda AC, così il cateto della figura DE alla EO; il punto O sarà centro di tutte le linee rette uguali ABC. »

« V. Ma se faremo come tutte le rette ABC alli $^2/_3$ della corda AC, così il cateto DE alla EI, il punto I sarà centro della figura rettilinea ABCE. »

« VI. Facendosi poi come l'arco ABC alla corda AC, così il semidiametro BE alla EO, il punto O sarà centro dell'arco. »

« VII. E facendosi come l'arco ABC, alli $^2/_3$ della corda AC, così BE alla EI; il punto I sarà centro del settore. Quest'ultima è del padre Della Faille, dimostrata da lui con un libro di roba, ed io la dimostro con meno di un foglio, in due modi diversi, per gl'indivisibili e senza. »

« Temo che quell'autore della Centrobarica si sia incontrato in alcune di queste verità, il che mi dispiacerebbe, non tanto perchè ne resterei privo io, quanto perchè ne resterebbe padrone uno, che non è degno. Così mi pare di poter dire di uno, che biasima la dottrina degl'indivisibili, che è la vena e la miniera inesausta delle speculazioni belle, e delle dimostrazioni a priori » (ivi, T. XL, fol. 121).

Il Cavalieri rispose da Bologna, il dì 3 di Marzo, con una lettera, nella quale, dop'aver discorso d'altre cose analoghe all'argomento, così soggiungeva: « Circa poi le conclusioni mandatemi devo dirle che il padre Guldini le dimostra anch'esso, eccettuato che non torna il centro di gravità nè del solido settore della sfera, nè delle zone di essa o superficie delle porzioni. Solo dice di stimar probabile che il centro di esse superficie sia l'istesso che il centro di gravità delle figure genitrici delle porzioni di sfera, o delle porzioni comprese fra piani paralleli, provandolo *a simili,* poichè dice: siccome il centro della superficie conica, eccettuata la base, è l'istesso che del triangolo per l'asse; così accaderà in questi. Anzi così anco dice nelle porzioni di superficie dello sferoide, e conoide parabolico: onde credo che in questo inciampi, discordando dalle sue conclusioni, che veramente mi paiono bellissime, come anco l'altro modo nuovo, con il quale pure misura le porzioni di sfera, sferoidi, conoidi, etc. » (ivi, T. XLI, fol. 157).

Non appariva chiaro da queste prime parole se il Guldin, in dimostrare il centro di gravità dell'arco di cerchio, era proceduto a diritto o aveva anche in esso inciampato, ciò che principalmente premeva di sapere al Torricelli, il quale sarebbe volentieri tornato a far di ciò espressa domanda, se non avesse sperato d'aver presto dalla stessa lettura del libro la desiderata risposta. Era una tale speranza poi tanto più fondata, in quanto che fra i desiderosi di aver quel libro era il giovane principe Leopoldo de' Medici, che studiava allora le Matematiche sotto la direzione del Michelini, a cui vedemmo come fosse dianzi dato la notizia della grande Regola centrobarica: da che, aggiungendosi alla propria curiosità l'altrui comando, fu il Torricelli stesso mosso a scrivere così al Cavalieri: « Diedi nuova al p. Francesco delle Scuole pie, matematico del principe Leopoldo, del nuovo libro del Guldini, ed egli mi scrive che io procuri in tutti i modi di averne uno. Supplico V. P. d'avvisarmi se costì ve ne sarà, e almeno dov'è stampato, e quando la spera d'aver fornita e pubblicata la *Risposta* » (ivi, T. XL, fol. 123).

Chi ha letto il secondo capitolo dell'altro nostro tomo, già sa che l'ac-

cennata Risposta era quella, incominciata a farsi in dialogo, alle censure dello stesso Guldino, contro il quale il Torricelli sollecitava il Cavalieri a difendersi, mentr' egli intanto pensava colle offese d' attutir la baldanza del nemico. Un tale animo si rivela da ciò che dice esso Torricelli in una lettera scritta il dì 7 Marzo 1643, cioè una settimana dopo la precedente.

« Dopo che io ebbi la lettera di V. P., dimostrai, anco senza indivisibili, che il centro delle armille e zone sferiche sia nel mezzo della porzione d' asse, che gli corrisponde, e la dimostrazione è semplicissima, e quasi simile alla IX del primo *Degli equiponderanti.* Mi darebbe poi anche il cuore di dimostrare che il centro della superficie del conoide parabolico non è l' istesso che quello della parabola genitrice. Quanto allo sferoide ed iperbolico non ne so nulla, ma vedendo che egli si è ingannato in queste, posso credere che si sia ingannato anche in quelle. »

« Io non vorrei esser tanto prosuntuoso che ardissi di consigliarla, ma almeno antepongo al suo giudizio se ella stimerà bene toccargli questo punto nella *Risposta,* con mostrargli che egli finalmente adduce delle conclusioni false. Io quanto a me crederò che i metodi del Padre siano ottimi, e che quello degl' indivisibili di fra Bonaventura sia cattivo : so bene però per cosa certa che quegli ottimi deducono delle cose false, che tali si dimostrano, e che da quel cattivo non si cava se non conclusioni vere, quando si operi conforme alli precetti dell' arte, ed alle cose dimostrate negli Elementi. »

« Io non posso credere che quello sia grand' Uomo, mentre in cose tanto gelose si lascia trasportare ad argomentare *a simili.* Il parallelogrammo è doppio del triangolo : anco la porzione dell' asse alla cima è doppia di quella alla base del triangolo. Il parallelogrammo è sesquialtero della parabola : anco la porzion dell' asse è sesquialtera. Il cilindro è triplo del cono : anco la porzione dell' asse alla cima è tripla della rimanente. Il cilindro è doppio del conoide parabolico, ed anco la porzione dell' asse alla cima è dupla della rimanente. »

« Io dunque, che avrò più similitudini che non ha il Padre, seguiterò ad argomentare e dirò : il cilindro è sesquialtero dell' emisfero, dunque la porzione dell' asse dell' emisfero, che è dalla cima fino al centro della gravità, sarà sesquialtera della rimanente. Ma questo è falso, stando come cinque a tre » (ivi, fol. 124).

Dismesso il primo proposito di rispondere al Guldin in dialogo, non lasciò il Cavalieri di dare effetto al consiglio dell' amico nella fine del cap. XIV della terza Esercitazione geometrica, dove, con un esempio preso dalle inscrizioni e circoscrizioni delle superficie coniche, mostrava quant' era falso l' argomento *a simili* addotto nel cap. X alla V proposizion centrobarica, che cioè si corrispondono i centri di gravità delle dette superficie, e dei solidi rotondi (Ediz. cit., pag. 235-38). Ma la curiosità, che aveva il Torricelli di riscontrar da sè queste cose nel libro, non fu in lui sodisfatta, cosicchè, distratto dalla fabbrica dei vetri per i canocchiali, in che diceva di ritrovar tutto il suo diletto, non si curò più di decidere del primato intorno all' in-

venzione del baricentrico negli archi di cerchio. Abbiam veduto quant' egli avesse ambito prima a una tale invenzione, la quale, non solamente comunicò al Cavalieri, come apparisce dai documenti citati, ma a tutti i suoi amici di Roma, per mezzo di Michelangiolo Ricci pregato apposta a voler dare al Magiotti la nuova che « se sarà un settore di cerchio, e facciasi, come l'arco a tutta la corda, così l' asse a una quarta linea; nell' estremità di questa sarà il centro di gravità dell'arco » (ivi, fol. 100).

È rimasta fra le carte del Torricelli una scrittura, che avremo occasione di citar più volte, intitolata *Racconto di alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente tra i matematici di Francia e me, dall'anno 1640 in qua,* nel quale anno racconta come avendo contratta col p. Niceron una stretta amicizia in Roma, mandasse a lui in un foglio alcune sue invenzioni geometriche, accennando solo le enunciazioni, senza dimostrazione alcuna. « E feci questo, soggiunge, acciò non solo il suddetto padre vedesse quel compendio de' miei studi, ma anco lo conferisse ai matematici della Francia, e ne intendesse il loro giudizio » (ivi, T. XXXII, fol. 21).

Anche il baricentro dell' arco fu notato tra quelle invenzioni, e, come di questa, fu per i matematici francesi favorevole il giudizio delle altre proposizioni torricelliane, infin tanto che nel 1646 non insorsero col Roberval le famose controversie intorno a chi avesse prima dimostrato il centro di gravità, e definita la misura dei solidi generati dalla Cicloide. In mezzo a cotesta animosità, e per citar qualche altro esempio valevole a confermar nell' avversario l' accusa di plagio, andava esso Roberval dicendo che, benchè il Torricelli si fosse appropriata la dimostrazione del centro di gravità delle porzioni di circonferenza, il Guldin nonostante aveva già scritto il medesimo, e pubblicato nel primo libro della Centrobarica, dimostrando un' altra novità bellissima, che cioè la mezza circonferenza concentra il suo peso là dove la Quadratrice di Nicomede ha il termine del suo moto.

A questa prima notizia, con l' animo agitato da varie passioni, forse non comprese il Torricelli la relazion che passa fra il centro di gravità di un arco, e la famosa curva meccanica del Matematico antico. Ma poi, rivolgendo le *Collezioni matematiche* di Pappo, nel libro IV, dove si tratta della curva assunta da Dinostrato e da Nicomede per la quadratura del circolo, rivolse particolarmente la sua attenzione sul teorema XXIII così formulato: « Quadrato enim existente ABFC (fig. 161), et circumferentia BC, circa centrum A, et linea quadrante BE, facta sicuti dictum est; ostenditur, ut BC circumferentia, ad rectam lineam AB, ita esse AB, ad ipsam AE » (Bononiae 1660, pag. 89). D' ond' ebbe il Torricelli a concludere che il punto E, dove il moto della Quadratrice termina sull' asse, era veramente il centro di gravità della semicirconferenza BCD, com' egli stesso aveva concluso per vie tanto diverse. Allora incominciò a dubitar che il Guldino avesse argomentato di qui, e che

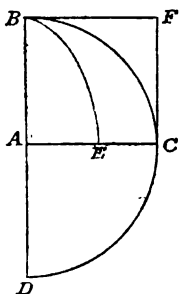



Figura 161.

fosse la sua invenzione una congettura o una supposizione, piuttosto che una dimostrazione condotta dai principii della Geometria. Questo gli premeva di saper con certezza, per rispondere al Roberval, ond'è che, dopo tre anni, cioè il dì 23 Marzo 1646, tornava a farne al Cavalieri, così, ma con più trepida sollecitudine, la domanda:

« Supplico V. P., se però ella se ne ricorda, a voler farmi grazia d'avvisarmi se quel padre gesuita della Centrobarica dimostri geometricamente che, facendosi come l'arco di cerchio ABC (fig. 162) alla sua corda AC, così il semidiametro BD alla DE, il punto E sia centro dell'arco ABC. Mi pare che V. P. mi scrivesse che egli diceva questo Teorema, ma non mi ricordo se ella mi dicesse se egli lo dimostrava, ovvero lo supponeva » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 130).

Figura 162.

Rispose il Cavalieri che il Guldin dimostrava, e non solamente supponeva il teorema, e nello stesso tempo avvertiva l'amico di ciò, che andava dicendo il Roberval, per quel che aveva risaputo dal Niceron di Parigi. A che il Torricelli subito replicava:

« Apposta domandai a V. P. se il Guldini dimostrava quella proprietà dell'arco, per poter rispondere a monsù Roberval. Mi dispiace che il Guldini la dimostri, perchè ancor io aveva, già sono quattro anni, quella dimostrazione. Io provai che, facendosi come tutti i lati uguali AE (fig. 163), EF, FG, GB, BH, HI, IL, LC, a due terzi della corda AC, così la retta BD *ad aliam sumendam ex centro,* il termine della presa sarebbe centro di gravità della figura rettilinea DABC. Ma, facendosi come i suddetti lati uguali alla corda AC, così la BD *ad aliam sumendam ex centro,* il termine sarebbe stato centro di tutte le rette AE EF, ecc. Dalla prima inferivo il centro del settore, *more veterum:* dalla seconda inferivo il centro dell'arco prima, e poi il centro del settore, per gl'indivisibili. Ma le dimostrazioni, con le quali applico il lemma, son tanto acute, che non pensavo che il Guldini ci fosse potuto arrivare. Giacchè V. P. ha inteso il mio mezzo termine, la supplico ad incomodarsi di nuovo ad avvisarmi se va per questa strada » (ivi, fol. 131).

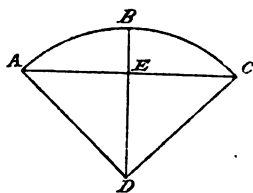
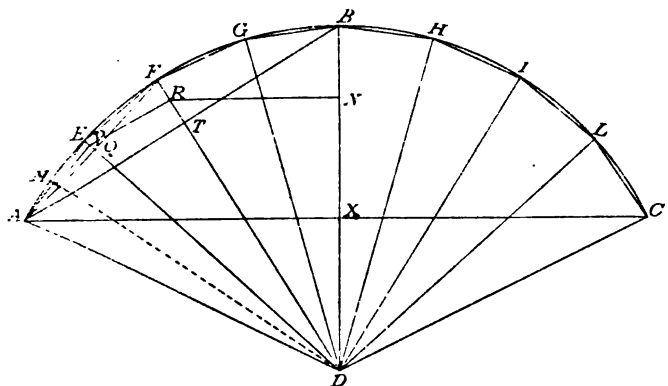



Figura 163.

Ma il Cavalieri, quasi stanco di far risposte di questo genere, pensò di mandare in prestito al requisitore, che ne aveva tanta passione, la sua propria copia della *Centrobarica,* ed ei se ne soddisfacesse a suo piacere leggendo. Di che fatto avvisato il Torricelli stesso rispondeva così, il dì 28 Aprile del detto anno 1646: « Rendo infinite grazie a V. P. che, in cambio di darmi solo un poco di ragguaglio intorno ai mezzi di una dimostrazione sola, si è compiaciuta di mandarmi tutto il libro del Guldini, quale procurerò di recuperar quanto prima » (ivi, fol. 133). E seguitando a scrivere non aveva ancora sigillata la lettera, che i volumi eran già sul suo banco di studio, dove, attendendo con curiosità frettolosa a sfogliare il primo, provava nell' animo quella impressione, e gli passavano per la mente que' pensieri, che noi vogliamo, come parte importantissima di quest' intima storia della Scienza, brevemente descrivere ai nostri Lettori.

Il volume è in folio, ma più della metà si spende in argomenti, che poco potevano importare al Torricelli. Nel cap. XII si tratta dell' invenzion meccanica dei centri di gravità, esplicando un luogo dei commentari sulla Sfera del Sacrobosco, dove il Clavio insegna a sospendere un corpo, sia pure irregolare quanto si voglia, e notar la linea della direzione del filo: fatto ciò, sospendeva il grave da un altro punto, e, notate le medesime cose, concludeva che là, dove le due direzioni s' incontrano, sarà il centro richiesto. Poi, segue, nella Centrobarica, una *Dissertazione fisico-matematica* superiore nel concetto alla mente di un Peripatetico, dimostrandovisi che, dovendo variare i corpi componenti il Globo di posizione, non può la Terra consistere nel medesimo punto, perchè, mutandosi il centro di gravità, necessariamente si muove. S' aggiungono in ultimo questioni arimmetiche, e le Tavole de' quadrati dei numeri e de' loro cubi dall' uno al diecimila.

Lasciate dunque indietro queste cose, e, nel trattato geometrico de' centri di gravità, le proposizioni, che vi si citano da altri Autori già dimostrate; ebbe il Torricelli a stupire vedendo che, nelle proposizioni V e VI del cap. III, il Guldino preparava i lemmi a quel modo, che aveva fatto egli stesso, ricercando il centro di gravità delle linee inscritte e circoscritte all' arco di cerchio, d' onde poi, nella seconda proposizione del cap. V, concludeva: « Fiat igitur, ut semiperipheria ad semisubtensam, ita semidiameter ad aliam quampiam, cui aequalis accipiatur AP, in semidiametro ex centro A; dico punctum P centrum esse quod quaeritur » (Centrobaricae, lib. I, Viennae Austriae 1635, pag. 59).

Parve al Torricelli però di vedere in queste guldiniane dimostrazioni una gran confusione, e un grande stento, paragonate alla elegante facilità delle sue, ma più che altro vedeva prelucervi la notizia della cosa da dimostrare: notizia che, seguitando a sfogliare il volume, indovinò aver avuto origine dalla Quadratrice, l' ultimo punto della quale, leggeva, *ipsum tamen centrum esse gravitatis semiperipheriae circuli nos primum mundo manifestamus* (ibid., pag. 67). Dimostra ciò, da Pappo, l' Autore della Centrobarica nella proposizione I del cap. VI, ma il corollario, in cui egli fa osservare che, dato il

centro di gravità, s' ha la quadratura, e data la quadratura s' ha il centro, è cosa del p. Della Faille, scritta ne' due primi corollari ai teoremi de' centri di gravità del circolo e dell' ellisse. Dal principale teorema ivi dimostrato, quale si è che l' arco sta a due terzi della corda, come il raggio a una quarta linea, indicatrice sull' asse del baricentrico del settore; ne conclude esso Della Faille che l' arco, e perciò anche tutta intera la circonferenza, poteva facilmente quadrarsi, ciò che pensò il Guldin di concludere con simili ragioni dal centro di gravità dell' arco, come di fatti fece nel detto corollario. Propostosi dunque l' altro principio che, datasi la quadratura è dato il baricentro, pensò di ricorrere alla Quadratrice antica, argomentando che il punto cercato era, di quella linea da lui chiamata *mirabile,* l' ultimo punto. L' argomento sapeva per verità di audacia, avendo argutamente Pappo, nel citato libro delle *Collezioni,* al problema terzo, fatto osservare che Nicomede e Dinostrato supponevan già quella proporzione tra la linea retta e la curva, che si voleva cercare: e nonostante la cosa riuscì al Guldino con tanta felicità, da prevenire in questo le sottili invenzioni del Torricelli, il quale in somma non ebbe il torto in sospettar che il suo emulo avesse a principio supposto quel che poi si studiò di dimostrare con quelle sue maniere stentate e confuse.

Costretto in ogni modo lo stesso Torricelli a dover cedere l' ambita primizia a chi egli diceva non esserne degno, e perduto l' argomento necessario a recidere le calunnie del Roberval dalla loro radice, non gli rimaneva altra gloria che di essere rimasto il primo inventore del centro di gravità delle callotte, delle zone, e de' settori sferici. Seguitando con questa fiducia compiacente, assicuratagli dal Cavalieri, a svolgere il volume centrobarico, vi leggeva, nella V proposizione del cap. X, dimostrato il centro di gravità delle porzioni delle superficie sferiche, sferoidee, e conoidee essere quel medesimo che delle superficie piane generatrici, per queste ragioni: « Nam, sicuti conicae superficiei centrum gravitatis est idem, quod est trianguli, seu in frusto trapezii per axem ducto; ita hic eodem modo centrum gravitatis superficiei portionis sphaericae, sphaeroidicae et conoidicae, seu frusto, etiam est centrum gravitatis segmenti, seu trapezii per axem ducti, basibus tamen utrobique exceptis » (ibid., pag. 127).

Non rimaneva al Torricelli, per sodisfar pienamente quella sua gelosa curiosità, che di vedere in qual modo indicasse il Guldin il centro di gravità del settore sferico, ciò che gli occorse una sola pagina dopo quella già letta, sotto il titolo della IX proposizione scritta nel cap. XI, dove, supposto il centro del solido emisferico ABC (fig. 164), in I, sull' asse, come ve lo designa Luca Valerio, dice che, inalzata da I una perpendicolare, la quale incontri in H la linea EF, che bipartisce il quadrante AB in due ottanti; sarà in esso H il centro di gravità del settore descritto dal rivolgersi uno dei detti ot-

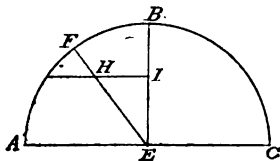



Figura 164.

tanti intorno alla linea FE come a suo asse. Per dimostrare il quale asserto così dice: « Res haec ut demonstretur, cum pluribus indigeat verbis quam rationibus, eaeque tales sint, quae unicuique qui praecedentia intellexit obviae ac manifestae sint, plura in confirmationem addere noluimus. Et sic satisfactum esse propositioni iudicamus » (ibid., pag. 132). *Bravo!* fece qui il Torricelli chiudendo il libro, *bravo il mi' bue!* e ripresa in mano la lettera al Cavalieri, dianzi lasciata aperta, v' aggiunse queste parole: « Dopo scritto fin qui, ho ricevuto il libro del Guldini, e scartabellato quasi tutto. Ho veduto che adopra i medesimi mezzi, che adopro anch' io, per quei centri, ma Dio sa con quanta confusione e stento. In somma io gli pronunzio che il padre Guldino, per quanto si può argomentare da questo libro, è stato un bue » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 134).

V.

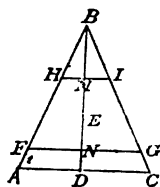
Il secondo volume della Centrobarica, che comprendeva i libri secondo, terzo e quarto, dopo i primi saggi presi poco importava di consultare al Torricelli, a cui il Cavalieri aveva fatta già nota la grande Regola dall' Autore ivi insegnata come un fatto, la verità del quale si confermava dal mostrar che i resultati di lui concordavano con i teoremi della Geometria. Aperto nonostante il libro, sfogliando quelle undici pagine di prefazione, non potè non trattenersi dalla quinta alla settima a considerar quel passo che il Guldin trascrive dal proemio del Cavalieri. Vi si diceva dall' Autore dei sette libri della Geometria nuova come fosse rimasto preso da gran maraviglia in ripensare che le ragioni stereometriche e baricentriche tra i solidi rotondi non son più quelle delle superficie piane che gli hanno generati. Così infatti, mentre il rettangolo è doppio del triangolo, il cilindro generato è triplo del cono; e mentre il centro di gravità sega l' asse così che la parte verso il vertice del triangolo è doppia di quella verso la base; nel cono invece si trova esser tripla. Di qui, prosegue lo stesso Cavalieri a dire, considerando meglio le cose, conobbi che le linee, di che s' intessono le superficie, e i piani, di che si compaginano i solidi, non son da prender per l' asse, ma paralleli alla base, e così si trova che gl' infiniti circoli affaldati nel cilindro son tripli degli infiniti circoli, che s' affaldano a comporre il volume del cono.

Ben comprese il Torricelli la ragione perchè il Guldin si studiasse di cogliere questi principii di Geometria nuova in difetto: perchè per essi si scoprivano le sue fallacie, le quali giusto avevano avuto origine dal credere che il centro di gravità delle figure condotte per l' asse si mantenesse il medesimo, che delle superficie dei solidi generati. L' esempio nonostante, ch' egli adduceva del triangolo e della superficie conica descritta dal rivolgimento di lui, era vero, e il Torricelli stesso volle ciò confermare per via degli indivisibili, considerando i pesi concentrati sull' asse come sopra la lun-

ghezza di una libbra, a quel modo che aveva fatto per dimostrare il centro di gravità del triangolo e del conoide parabolico.

« PROPOSIZIONE XX. — *Centrum gravitatis superficiei conicae est in axe, ita ut pars ad verticem reliquae sit dupla.* »

Figura 165.

« Esto conica superficies ABC (fig. 165) cuius axis BD, sitque BE dupla ad ED. Dico E esse centrum gravitatis. Secetur enim superficies planis FG, HI ad axem erectis ubicumque: eritque peripheria, quae per F, ad peripheriam, quae per H, ut FN ad HM, et hoc semper. Ergo ad libram BD pendent quaedam magnitudines, nempe peripheriae et totidem magnitudines ipsis ex ordine proportionales, nempe lineae rectae. Ergo commune centrum habebunt » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 31).

Conclusa così la dimostrazione, sembrava al Torricelli di vedersi insorgere contro il Guldino o qualcun altro, come lui avverso al metodo degli indivisibili, e dire: Perchè mai, avendo il triangolo e la superficie conica comune il centro di gravità, non debbono averlo per simili ragioni la semicirconferenza e l'emisfero, la parabola e il conoideo da lei descritto? Supponete che l'ambito ABC nella vostra figura sia una mezza circonferenza o una parabola intorno all'asse BD: condotti piani FG, HI, comunque, intercideranno sulla superficie emisferica o conoidea circonferenze, le quali staranno come i raggi HM, FN, cosicchè anche il centro di quelle superficie dovrebbe segar l'asse nel mezzo, ciò che, sebbene sia contro alle nostre supposizioni, è altresì contrario ai vostri dimostrati teoremi.

Rispondeva il Torricelli, richiamandosi alle regole insegnate dal Cavalieri, una delle quali, e delle più importanti ad osservare, per non si dover trovare ingannati, era di ricever sempre le somme di tutte le indivisibili figure da paragonarsi *sub quadam uniformi ratione, seu sub quodam determinato spissitudinis aut costipationis gradu* (Exercit. geom., Bononiae 1647, pag. 15).

Gl'infiniti componenti indivisibili l'intelletto gli concepisce in sè stessi, ma il senso gli percepisce nelle relazioni di posizione, che gli uni hanno rispetto agli altri. Così nella linea di un millimetro, come in quella di un metro, per l'intelletto è la medesima infinità di punti, ma per il senso è questa molto più lunga di quella, perchè le distanze o i *transiti* son molto maggiori. L'esempio di ciò lo abbiamo nelle proiezioni, come della linea AB (fig. 166) sul piano AC, in cui, dentro lo spazio AD, si trovano necessariamente contratti i medesimi punti di più lungo transito, compresi nello spazio AB. E perchè, quando la stessa linea sia risalita perpendicolarmente sul piano, la proiezion di lei è un punto, è verissimo dunque sotto questo aspetto che una linea, anzi più linee concorrenti possono ridursi uguali a un punto, come par si verifichi nel cono luminoso, che entra o esce dal fuoco di uno specchio. Ci sovviene anzi che

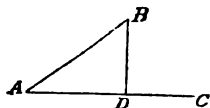



Figura 166.

di qui Galileo inferiva dovere esser la luce incorporea e istantanea, come quella che è *ridotta a' suoi infiniti indivisibili componenti, e fatta senza introduzione di corpi o di posizione di vacui quanti, ma bene d'indivisibili vacui, e così non occupa luogo, e non ricerca tempo d'andare da un luogo a un altro.*

Un tal concetto però della composizione dei corpi è falso, e la questione, lungamente intorno a questo argomento agitata nel primo dialogo delle due Scienze nuove, non si risolve nell'obietto percepito, ma nel soggetto percipiente, che ora è l'intelletto ora il senso. Per l'intelletto, che è semplice e uno, l'infinito si riduce a un punto, ma per il senso è diviso, e la divisione è finita, o, come con Galileo si direbbe, è quanta. Ecco come sia da una parte l'infinito innumerabile, e dall'altra soggetto ai calcoli del matematico, e alle circoscrizioni del Geometra: ecco come si risolvono le questioni di simil genere, e com'essendo tutte le figure geometriche sensibili sia necessario apprenderle nelle loro parti divise, computando la quantità della divisione o le *spissitudini* e i *transiti,* come diceva il Cavalieri, e come ripeteva nello Scolio alla precedente proposizione il Torricelli:

« Nota quod non valet argumentum, quod contra fieri posset ab his, qui methodum indivisibilium non admodum intelligunt. Possent enim adducere argumentum de superficie sphaerae, aut semicirculi, quae non habent commune centrum, sive de superficie conoidis parabolici et parabolae. Causa disparitatis est quod superficies conica eumdem transitum semper servat, suntque omnes peripheriae, ut ita dicam, eiusdem spissitudinis, ut rectae ad BD applicatae, quod non est verum in dictis superficiebus, quarum peripheriae maiorem semper habent densitatem, sive spissitudinem, versus verticem, respectu linearum applicatarum ad axem » (ibid.).

Il Guldin dunque e Galileo, chiamato, nella prefazione al secondo libro centrobarico, per aggredire insieme il Cavalieri, in soccorso poderoso; reputavano fallace e ripudiavano perciò il metodo degl'indivisibili, perchè, secondo il Torricelli, *non admodum illud intelligunt.* Il Torricelli stesso però stimava indegni di ogni bella invenzione coloro, che un tal metodo biasimavano, essendo egli, diceva, *la vena e la miniera inesauribile delle speculazioni belle, e delle dimostrazioni a priori.* Aveva fatto di ciò particolarmente esperienza nel trattare dei baricentri, non solo rispetto alla varietà dei soggetti, ma rispetto altresì alla varietà dei modi di trattare il soggetto medesimo, come per esempio il triangolo e il cono, l'emisferoide e l'emisfero, di che un primo saggio ne porge quel capitolo intitolato nel manoscritto: *Centrum gravitatis trianguli, coni et hemisphaeri, hemisphaeroidisque a priori.* Ma prima di veder come il metodo degl'indivisibili sia applicato a dimostrar questi teoremi, con elegante varietà da que' medesimi già prima dimostrati; giova rimovere dalla mente dei nostri lettori una falsa opinione insinuata non sapremmo dire se dal poco giudizio, o dal mal animo del Guldino.

Nel cap. IV del IV libro della Centrobarica trascrive dalla *Stereometria nova* l'interpetrazione che il Keplero dà della prima proposizione archime-

dea della misura del circolo. Sia questo descritto col raggio AB (fig. 167), all' estremità del quale si conduca la perpendicolare BC. La circonferenza, dice il Kepler, ha tante parti quanti son punti, cioè infinite, su ciascuna delle quali parti si considerino insistere, come sopra loro base, triangoli isosceli, che vadan tutti in A ad appuntarsi nel centro. Estendasi poi essa circonferenza in dirittura, e cominciando da B termini in C: se da C, da E, e dagli infiniti altri ponti di divisione, si conducano ad A linee rette, è manifesto che verranno a disegnarsi triangoli, pari di numero, e di superficie uguali ai settori del circolo, il quale dunque sarà uguale al triangolo rettangolo ABC. *Hoc vult,* conclude il Keplero la sua arguta e bellissima interpetrazione, *illa archimedea ad impossibile deductio: mihi sensus hic esse videtur.*

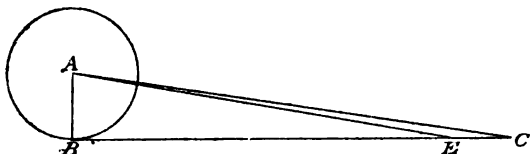



Figura 167.

Parve, soggiunge qui il Guldin, ma non è: questo kepleriano è modo nuovo di dimostrare, e che, sebbene non sia da disprezzarsi, non ha però che a riveder nulla con quello di Archimede. Poco più sotto poi, citando dalla Stereometria nuova il teorema IV, dove, dall' essersi dimostrato che un prisma colonnare è triplo della piramide sollevatasi a pari altezza dalla medesima base, ne conclude l' Autore, che può il medesimo appropriarsi al cilindro e al cono, riguardandosi quello come un prisma colonnare d' infinito numero di facce, e questo come una piramide; insinua il Guldino stesso che a ciò insomma si riduce il metodo del Cavalieri, concludendo il suo discorso in queste parole: « Hinc enim ansam arripuit et occasionem Bonaventura Cavalerius suam Methodum indivisibilium producendi » (Centrobarycae Guldini, Lib. IV, Viennae Austriae 1641, pag. 325).

Giova ora a noi esaminare così fatti giudizi, e prima di tutto, per quel che spetta al Keplero, domanderemo se quel suo modo di riguardare il circolo come un poligono d' infinito numero di lati sia da dir propriamente nuovo. Il Guldin, com' abbiamo inteso, lo crede, e par lo credano tutti gli altri, che hanno trovato quello stesso metodo accomodatissimo ad abbreviare, e a ridurre alla massima facilità i più ardui teoremi della Geometria. Eppure il Keplero stesso, invece di gloriarsi di questa cosa, come di sua propria invenzione, l' attribuisce ad Archimede, non certamente per liberalità, ma per giustizia, com' onest' uomo ch' egli era, ed erudito della storia della Ciclometria. Da Archimede stesso direttamente anzi è notabile che apprendesse il metodo Leonardo da Vinci, il quale interpetrò quella sopra citata proposizione *De circuli dimensione* allo stesso modo, e tanto tempo prima del Geometra alemanno. « Il cerchio, egli dice, è un parallelo rettangolo, fatto del quarto del suo diametro, e di tutta la circonferenza sua: o vo' dire della metà del diametro, e della periferia. Come se il cerchio fosse immagi-

nato essere resoluto in quasi infinite piramidi (triangoli isosceli), le quali poi, essendo distese sopra la linea retta che tocchi la lor base, e tolto la metà dell' altezza e fattone un parallelo (un rettangolo); sarà con precisione uguale al cerchio (MSS. K., fol. 80 r.). Non possiamo perciò non ci maravigliar grandemente che non avesse penetrate queste cose il Guldino, il quale compendia nel cap. I del suo secondo libro la lunga storia ciclometrica, e riferendo i detti di Eutocio difende il grande Siracusano da coloro, che temerariamente lo accusavano di aver data meno esatta la proporzione tra la circonferenza e il diametro. Dice esso Eutocio che Archimede si fermò alla iscrizione del poligono di 96 lati, perchè si contentava *in suo libello proposuisse id quod proprinquum est invenire, propter necessarios vitae usus.* Che del resto lasciava ai Matematici la fatica di spingere le divisioni infino alle parti più minute, mettendoli al punto di poter concludere, come poi fecero con Tolomeo altri geometri antichi, e fra' recenti il Keplero, che, riducendosi il metodo alle divisioni infinite, il circolo e il poligono inscritto si risponderebbero esattamente, o per meglio dire si confonderebbero insieme.

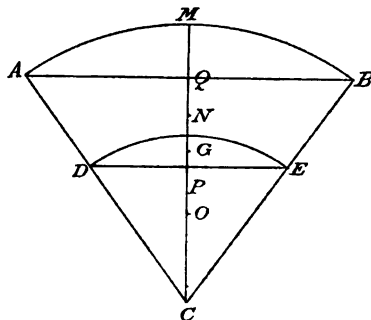
Comunque sia, consentendo pur col Guldin che, per essere stato un tal metodo rinnovellato ed esteso dal Matematico alemanno, si possa dir *kepleriano;* gli neghiamo però ogni somiglianza con quello elaborato dal Cavalieri, il quale citava nel proemio alla sua nuova Geometria la Stereometria nuova come inspiratrice del concetto degl' indivisibili, non già dalla parte delle divisioni infinite, ma da quella delle sezioni parallele alla base dei solidi rotondi, a quel modo che nell' altra parte di questa Storia della Meccanica, alla pag. 115, fu descritto. Chi volesse poi aver della varietà de' due metodi un esempio efficacissimo non dovrebbe far altro che comparar l' interpetrazione della prima archimedea *De circuli dimensione,* data dal Keplero, con quell' altra che, nel proemio al trattatello *De solido acuto hyperbolico,* ne dà il Torricelli. Qui non si riguarda il circolo come risoluto in infiniti triangoli appuntati nel centro, ma come intessuto d' infinite circonferenze concentriche, a ciascuna delle quali si dimostra essere uguali le linee, di che s' intesse il triangolo rettangolo avente per l' un de' cateti la circonferenza, e per l' altro il raggio.

È anzi notabile che il Cavalieri e il Torricelli s' astenessero dall' usare il metodo kepleriano, quasi lo reputassero abortivo da quel legittimo degli indivisibili per essi professato. Chi per esempio nel trattatello *De centro gravitatis sectoris circuli more veterum,* da noi addietro trascritto, non avrebbe consigliato il Torricelli di cansar la fatica del lungo viaggio, col fare del lemma IX la proposizion principale, e di lì concluder l' intento, per via di corollario, senza far altro osservare, se non che l' arco si può riguardar come composto d' infiniti latercoli rettilinei tutti uguali?

Mirabile è la facilità, con la quale il Wallis, pur usando il metodo del Keplero, dimostra il centro di gravità de' settori circolari e sferici, e dello stesso emisfero. Nella proposizione XV del suo trattato, considerando il settore AMBC (fig. 168) come composto degli infiniti triangoli isosceli appun-

tati in C, i centri de' quali si trovan disposti nell' arco DNE, presa per raggio DC doppia di AC, dice che il punto cercato è G, centro dell' arco, per cui sarà DNE a DE, come CN a CG, ossia AMB ad AB come due terzi dell' asse MC a CG, per giungere alla qual conclusione era bisognato al padre Della Faille un libro, e al Torricelli stesso più di un foglio.

Figura 168.

Che se AMBC rappresenta un settore sferico, il servigio reso dianzi dagli infiniti triangoli verrà ora supplito dalle infinite piramidi esse pure appuntate in C, le quali, avendo i loro centri di gravità disposti sulla callotta DNE, descritta con un raggio CD, che sia triplo della linea AD; faranno che il punto G, mezzo della saetta della callotta, sia il punto cercato, il quale dimostra il Wallis essere *in axis sui illo puncto, quod a centro circuli distat tribus quadrantibus radii, minus tribus octantibus altitudinis superficiei cavae* (De motu, P. II, Londini 1670, pag. 243). CG infatti è uguale a CN — NG. Ma CN $= {}^3/_4$ CM, NG $= {}^1/_2$ NP $= {}^3/_8$ MQ; dunque CG $=$ ${}^3/_4$ CM — ${}^3/_8$ MQ, ciò che dall' altra parte è facile vedere come concordi con la invenzione del Torricelli.

Di qui deduce lo stesso Wallis, per via di corollario, il centro di gravità dell' emisfero, il quale sarà in O, sulla metà del raggio CN, che in questo caso è uguale alla saetta della callotta emisferica, onde, esssendo CN $=$ ${}^3/_4$ CM, sarà CO $= {}^3/_8$ CM $= {}^3/_8$ (CO + OM) e perciò 5 CO $=$ 3 MO, e MO : CO $=$ 5 : 3, che vuol dire essere il centro di gravità dell' emisfero indicato da quel punto, *in quo axis sic dividitur, ut pars ad verticem sit ad reliquam ut quinque ad tria,* secondo aveva prima di tutti dimostrato Luca Valerio, nella proposizione XXXIII del secondo libro, e nella XXXV del terzo, qui è là con lunga, e laboriosa preparazione di lemmi. (De centro grav., Romae 1604, pag. 56, 61).

Chi crederebbe che non fosse sovvenuta al Torricelli simile compendiosa dimostrazione? Eppure egli la rifiutò, per attenersi allo schietto metodo cavalierano, e per dare una prova ai contradittori della fecondità e della varietà di lui, applicandolo a dimostrar le medesime cose negli esempi, che ora trascriveremo, incominciando dal citato capitolo, dove si proponeva di dimostrare a priori il centro del triangolo e del cono, dell' emisferoide e dell' emisfero.

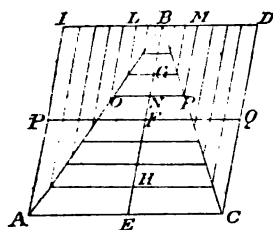



Figura 169.

« Proposizione XXI. — *Centrum trianguli diametrum secat in ratione 2 ad 1.* »

Sia un triangolo qualunque ABC (fig. 169),

e congiunto il vertice B con E, mezzo della base, si conducano a BE parallele AI, CD, e si compia il parallelogrammo, sopra i due diametri del quale BE, PQ graviteranno le infinite linee ponderose condotte parallele ad AC, e a BE. Così poi le linee AI, DC, come le LO, MP, e le infinite altre, di che s'intessono i triangoli esterni, le considera il Torricelli raccolte nei loro mezzi gravitar, coppia per coppia, sulla bilancia BF, con quella regola, che le linee del triangolo ABC pesano sopra tutta la BE, supponendo, perchè facile a dimostrarsi, il seguente lemma: *Due libbre, dalle quali pendano grandezze, che si eccedano a proporzione delle distanze, son tagliate dal punto dell'equilibrio in parti proporzionali.* Dietro ciò, così il Torricelli proponeva, e dimostrava la verità sopra annunziata:

« Esto triangulum quodlibet ABC, sectoque bifariam AC in E, ducatur BE, et compleatur figura AIDC. Tum secetur bifariam BE in F, eritque F centrum parallelogrammi AD. Centrum vero trianguli ABC sit quodcumque H, et reliquae figurae sit G. »

« Jam EB est libra, ad quam pendent infinitae numero magnitudines, nempe rectae ipsi AC parallelae, quarum maxima centrum habet in E, et minima in B, suntque magnitudines inter se ut longitudines, ad quas pendent, facto initio in B. Item, FB est libra, ad quam pendent magnitudines numero infinitae, nempe lineae parallelae ipsi AI, in geminis triangulis AIB, BDC, et maxima magnitudo centrum habet in F, minima vero in B, et sunt magnitudines inter se ut iam dictae praecedentes, nam duae simul AI, CD, ad duas OL, PM, sunt ut AI ad OL, sive ut AB ad BO, sive ut EB ad BN, sive ut semisses earum, nempe FB ad distantiam centri duarum OL, PM a puncto B. Propterea centrum trianguli ABC, quod ponitur H, in eadem ratione secabit libram BE, in qua secat libram BF centrum reliquae figurae, quod est G. Erit ergo ut BH ad HE, ita BG ad GF, et, componendo permutandoque, EB ad BF ut EH ad FG, nempe EH erit dupla ad FG. Sed HF, FG sunt aequales, cum F sit centrum totius, et tam G quam H centra partium aequalium; erit EH, sive BG, dupla rectae GF. Ergo patet BH duplam esse ipsius HE » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 97). In modo analogo a questo si dimostra l'altra.

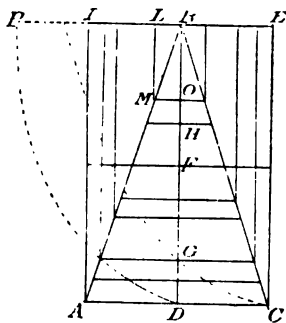



Figura 170.

« Proposizione XXII. — *Centrum coni secat axem in ratione 3 ad 1* » avvertendo che, per essere nella fig. 170, rappresentatrice del cono ABC, a cui sia circoscritto il cilindro AE, AI : LM = AB : BM, IB : LB = AB : BM, e perciò AI . IB : LM . LB = $AB^2 : BM^2$; le superficie cilindriche descritte dalla conversione delle linee AI, LM intorno al comune asse BD, che stanno come i rettangoli delle altezze per i raggi delle basi, cioè come AI . IB a LM . LB, staranno pure come AB^2 a BM^2. Avvertasi inoltre che, supposto in H il centro di gravità del cilindro scavato, e in G quello del cono, per

esser l'uno doppio dell'altro, dovrà reciprocamente la distanza FH dal centro F della libbra esser la metà della distanza FG.

« Esto conus ABC, cuius axis BD, cylindrus vero circumscriptus AE. Centrum cylindri F, coni sit quodvis punctum G, et reliqui solidi sit H. »

« Jam BD libra est, ad quam pendent infiniti numero circuli ipsi AC paralleli, quoruu maximus centrum habet in D, minimus in B, suntque magnitudines inter se ut quadrata distantiarum, sive portionum librae initio facto ex B. »

« Item, FB est libra, ad quam pendent infinitae numero magnitudines, hoc est superficies cylindricae circa axem BD, quarum maxima centrum habet F, minima vero B, suntque magnitudines inter se ut iam dictae, nam cylindrica ex AI, ad cylindricam ex ML, est ut rectangulum AIB, ad rectangulum MLB per axem, sive ut quadratum AB ad BM, vel DB ad BO, sive ut quadrata semissium ipsarum DB, BO, quae sunt distantiae centri ab extremo librae B. Ergo erit, ut BG ad GD, ita BH ad HF, et componendo permutandoque, ut BD ad DF, ita DG ad FH. Propterea DG dupla erit ipsius FH. Est autem GF dupla ipsius FH, nam F est centrum, ex quo aequiponderant magnitudines duplae, propterea DG, GF aequales erunt. Patet totam BG ad GD triplam esse » (ibid., fog. 90).

Segue alla proposizione un corollario *pro centro gravitatis hemisphaeri et hemisphaeroidis,* il quale però suppone due cose, che vedremo in seguito dimostrate. Prima: che, descritta intorno all'asse DB la DP quarta parte di un ellisse, l'ellissoide generato da lei è uguale al cilindro scavato. Seconda: che l'emisfero e l'emisferoide hanno comune il centro di gravità sull'asse comune.

« *Corollarium.* — Patet centrum hemisphaeri, sive hemisphaeroidis, axem ita secare, ut partes sint quemadmodum 5 ad 3. Nam consideretur solidum cylindricum AIEC, dempto cono ABC, non resolutum in superficies cylindricas ut ante, sed in armillas circulorum parallelorum circulo IE. Solidi erit idem centrum H ut ante. Sed huiusmodi armillae inter se sunt ut circuli sphaeroidis, cuius axis sit BD, centrum B, et apex D. Ergo semisphaeroidis centrum, in eadem libra BD, idem erit ac praedicti solidi, nempe erit punctum H. Patet iam BH ad HD esse ut 3 ad 5 » (ibid., fol. 91).

Il metodo degl'indivisibili non esauriva qui la sua virtù in dimostrare il centro di gravità del cono, ma al Torricelli, che così destramente sapeva maneggiarlo, suggeriva intanto due altri esempi, che ora trascriveremo. Per il primo si derivava dalla Geometria più elementare il seguente Lemma: *Se AB, AC, AD* (fig. 171) *son proporzionali alle AE, AF, AG, e se le differenze BC, CD sono uguali, saranno pure uguali le differenze EF, FG.*

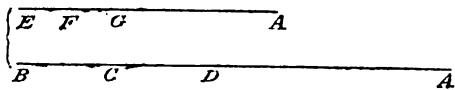



Figura 171.

Abbiamo per supposizione AB : AE = AC : AF. Permutando, AB : AC =

AE : AF. Dividendo, AB — AC : AC = AE — AF : AF. Sostituendo, e nuovamente permutando, BC : EF = AC : AF = AD : AG. In simil guisa dimostreremo CD : FG = AD : AG, onde BC : CD = EF : FG. Ma per supposizione BC = CD, dunque EF = FG. Alla qual conclusione si conduce pure il Torricelli così discorrendo.

« *Lemma.* — Si tres rectae lineae BA, CA, DA in aritmetica ratione fuerint; et earum partes proportionales EA, FA, GA in aritmetica proportione erunt. »

« Esto ut ponitur, nempe BA ad AE ut CA ad AF, et ut DA ad AG. Cum enim BA ad AE sit ut CA ad AF, erit permutando, dividendo, et rursus permutando, BC ad EF ut CA ad AF, sive, ob suppositionem, ut DA ad AG. Sed eodemmodo ostendetur CD ad FG esse ut DA ad AG, ergo, per XI Quinti, erit BC ad EF ut CD ad FG. Sed antecedentia sunt aequalia, ergo, etc. »

« *Aliter.* — Quoniam, per suppositionem, DA ad AE est ut CA ad AF, erit permutando, dividendo et convertendo, AC ad CB, sive ad aequalem CD, ut AF ad FE. Amplius, quia CA ad AF est, ob suppositionem, ut DA ad AG, erit permutando, et per conversionem rationis, AC ad CD ut AF ad FG. Ergo, per IX Quinti, aequales sunt GF, et FE, q. e. d. » (ibid., fol. 41).

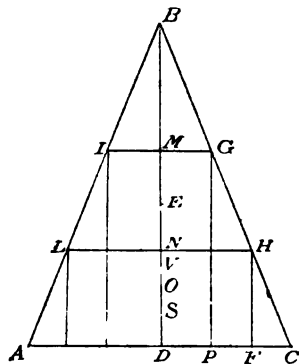



Figura 172.

Dietro ciò, ecco qual'è il concetto e il modo della nuova dimostrazione. Sia il cono ABC (fig. 172), e dal mezzo E dell'asse BD s'intenda moversi equabilmente, sempre dentro lo spazio triangolare, due linee, che si mantengano nei loro moti contrari equidistanti fra loro, e alla AC. Se sopra tutte queste linee, quante son le infinite, che vanno restringendosi verso il vertice del triangolo, e allargandosi verso la base; si costruiscano rettangoli per l'asse, verrà dalle superficie cilindriche descritte da loro a compaginarsi il volume del cono, il centro di gravità del quale sarà perciò il medesimo di quelle infinite cilindriche superficie.

Divisa ora ED in mezzo in O, concorreranno in quel punto i centri di gravità di ciascuna coppia delle dette superficie generate in ugual fase dei moti opposti. Siano per esempio IG, LH due di queste fasi, in cui IG tanto si sia dilungato dal centro verso il vertice, quanto se n'è dilungato LH verso la base. Costruiti i rettangoli IP, LF, è facile veder che sono uguali, perchè FD : DP = NH : MG = NB : MB = MD : ND = GP : FH, d'onde FD . FH = DP . GP. Ed essendo i rettangoli per l'asse uguali, come da questa equazion duplicata si mostra, eguali pure saranno, per la VI torricelliana *De solidis sphaeralibus,* le cilindriche superficie (Op. geom., P. I cit., pag. 16).

Se S dunque è il mezzo di ND, e V il mezzo di MD, in S e in V saranno i centri di gravità delle due superficie cilindriche, e sarà vero che si

riduce in O il loro centro comune, quando siasi dimostrato che OV, OS sono uguali. Ciò che a fare è assai facile, perch' essendo DE — DN = EN, DM — DE = EM, ed EN, EM uguali; DN, DE, DM sono in proporzione arimmetica, e in proporzione arimmetica son perciò, per il premesso lemma, anche le loro metà DS, DO, DV; onde DO — DS = DV — DO, ossia OS = OV, come volevasi dimostrare.

Ciò ch' è delle linee IG, LH, verificandosi di tutte le altre infinite, prese coppia per coppia nelle uguali fasi dei loro moti opposti; resta dunque così dimostrato che in O, a tre quarti dell' asse a partire dal vertice, concorrono i centri delle infinite superficie cilindriche componenti il cono, e però ivi concorre il centro del cono stesso, come il Torricelli annunzia e poi dimostra nella seguente.

« PROPOSIZIONE XXIII. — *Centrum gravitatis coni secat axem ut pars ad verticem sit ad reliqua in ratione 3 ad 1.* »

« Supponitur cylindricas superficies esse inter se ut earumdem rectangula per axem, ex VI primi *De solidis sphaeralibus.* »

« Esto conus ABC, cuius axis BD, et ab omnibus punctis rectae DC intelligantur parallelae ad axem BD, quae quidem parallelae totidem cylindricas superficies in revolutione describunt, quae simul omnes cylindricae superficies idem sunt ac ipse conus. Harum superficierum, si dici hoc potest, extremae sunt recta DB, et peripheria, cuius diameter AC, illiusque centrum est punctum E, medium axis BD, istius vero punctum D. (*Quae quamvis scripserim, tamen non sunt necessaria ad demonstrationem*). »

« Secetur libra ED bifariam in O: dico omnes praedictas cylindricas superficies centrum habere gravitatis in O. Sumantur IG, LH aequaliter remotae a punctis B et D, sintque ipsarum rectangula per axem PI, FL, quae sunt aequalia, nam FD ad DP est ut PG ad FH. Ergo, per praemissam suppositionem, aequales erunt cylindricae superficies. Sint V, S puncta media rectarum MD, DN: quoniam CF aequalis est ipsi PD, sive MG, erunt, per IV Sexti, aequales FH, sive DN et MB. Ergo DN, DE, DM in aritmetica sunt proportione, quare etiam earum semisses DS, DO, DV. Si ergo sunt aequales SO, OV, erit O centrum duarum cylindricarum superficierum FH, PG, et sic semper. Ergo O est centrum omnium, nempe coni, q. e. d. » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 42).

Per l' altro modo di dimostrare, sempre con gl' indivisibili, la medesima proposizione, si premette dal Torricelli il seguente Lemma, per sè stesso evidente: « Se saranno nella libbra attaccate molte grandezze, le quali stiano in equilibrio, fatta la sospensione da un punto, stanno anco in equilibrio altrettante grandezze sospese dalli medesimi punti, ciascuna delle quali sia uguale a quella, che prima era nel suo luogo » (ivi, fol. 10).

Dietro ciò, l' argomento, in mezzo all' abbondanza nuovo, consiste in inscrivere nel cono una piramide equivalente di base, e l' altezza della quale sia lo stesso asse del solido rotondo, il quale asse, se prendasi per libbra, da cui pendano ora gl' infiniti circoli del cono, ora gl' infiniti triangoli della pi-

ramide, fra loro uguali di grandezza e di numero; è manifesto, in virtù del premesso lemma, che in ambedue i casi il centro delle grandezze segherà la libbra nel medesimo punto. Tutto l'ingegno dunque del nuovo argomento si riduceva a risolvere il seguente problema: *Dato un circolo, disegnarvi sopra un tranigolo, che sia di superficie uguale, e in gravità concentrico.*

Figura 173.

Sia il dato circolo col centro in A (fig. 173), per il quale facciasi passare la AB di tal lunghezza, che sia un terzo della periferia, e si prolunghi in C d'altrettanto. Si alzi sopra questa linea da A una perpendicolare AD, uguale a due terzi del raggio, e si prolunghi al di sotto in E talmente, che AE sia un terzo dello stesso raggio. Poi si congiungano con D i punti B, C, e la linea di congiunzione, prolungata, sia in F e in G precisa dalla FG, condotta alla BC equidistante. La superficie del triangolo DFG, dice il Torricelli, è uguale alla superficie del circolo. Infatti FE : AB = DE : DA = 3 : 2. Ed essendo AB uguale per costruzione a un terzo della circonferenza, sarà FE uguale a un mezzo, e perciò FG uguale alla circonferenza intera. La superficie dunque del triangolo, $\frac{FG \, . \, DE}{2}$, è uguale alla circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, ossia è uguale alla superficie del circolo, ed essendo AE per costruzione un terzo di AD, che sieno le due figure concentriche in gravità è manifesto.

Valgano queste osservazioni a commentare la frettolosa scrittura del Torricelli, che nella sua concisione potente non manca di naturale chiarezza.

« Proposizione XXIV. — *Il cono ha il centro nell'asse e lo divide in modo, che la parte ad verticem sia tripla dell'altra.* »

« Sia il cono, il cui centro della base in A. Tirisi la BAC utcumque, e sia AB uguale ad un terzo della periferia: così anco la AC, e sia la AD due terzi del semidiametro, ed AE un terzo di esso, e finiscasi il triangolo, il quale sarà uguale al circolo, Facciasi poi una piramide, che abbia la medesima cima con il cono, e segandosi questa figura con piani paralleli alla base sempre nascerà un circolo nel cono, ed un triangolo nella piramide uguali fra di loro. Però, se le grandezze triangolari equiponderano dal punto I, fatta libbra la AH, anco le circolari equipondereranno dall'istesso » (ivi).

Ora è da vedere in quale altro modo, diverso da quello già scritto nella proposizione XVII qui addietro, facessero gl'indivisibili trovare al Torricelli il centro di gravità dell'emisfero. Si fa via alla nuova invenzione con due proposizioni, riguardanti il centro di gravità de' prismoidi o de' *prismali*, così definiti: *Prismale solidum voco solidum illud, quod fit ex sectione obliqua prismatis triangularis, servata una ex faciebus parallelogrammi* (ibid.,

fol. 17). Alla prima proposizione, riguardante il baricentro di così fatti prismali, premette il Torricelli stesso il Lemma seguente:

« Se sarà un prisma triangolare, di cui siano le basi opposte ABC, DEF (fig. 174) e si prolunghi un lato DB, il quale non sia nelle basi opposte, e preso il punto H si faccia la piramide CABH; se questa figura sarà segata con un piano LM parallelo al parallelogrammo CE, opposto al lato DB prolungato, sarà la sezione un parallelogrammo. Poichè essendo paralleli i piani LM, AF, sarà la II parallela ad AC, cioè alla FE, cioè alla MN. Così anco sarà IM parallela a CF, cioè alla AE, cioè alla LN. Quare etc. » (ivi, fol. 13).

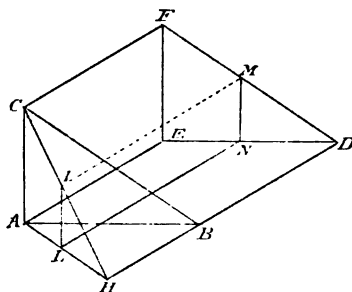



Figura 174.

« PROPOSIZIONE XXV. — *Ogni prismale ha il centro in quella linea, la quale parte dal centro della base parallelogramma, e va alla metà della linea opposta.* »

Sia il prismale, la cui base AB (fig. 175) e centro della base C, e la DCE parallela alla FA, e si tirino dal punto medio M le ME, MD. Poi, calato qualunque piano GN parallelo alla base, perchè sono uguali AE, EP saranno anco GH, HL: e perchè sono uguali EC, CD saranno anco HI, IO. Però I sarà centro del parallelogrammo GN e così di tutti. Dunque il centro del perismale sta nella retta MC, la quale parte dal centro della base parallelogramma e va alla metà della linea opposta. La linea MC la diremo *asse* (ivi, fol. 18).

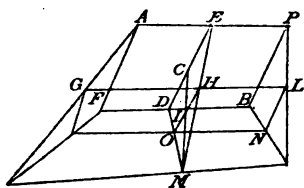
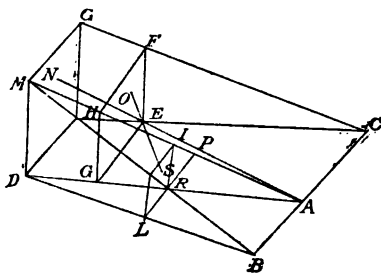



Figura 175.

« PROPOSIZIONE XXVI. — *Se sarà un solido, come nella passata, ma che però la prolungata AB* (fig. 176) *sia uguale alla AC, il centro di questo solido sarà nella linea, la quale parte da A, e va al centro della figura DE, per la precedente dimostrazione, ma la divide in maniera che la parte verso A, alla rimanente, sta come 5 a 3.* »

Figura 176.

Prima di trascriver la dimostrazione di questa, avvertiremo che ella conclude solo in virtù del seguente teorema geometrico, dal Torricelli supposto già dimostrato. *Data la linea retta AN* (quella stessa che entra nella figura) *e divisa nelle sue parti in modo, che sia* $AP = PN$, $PQ = 3\ OQ$, $AO = 2\ NO$; *dimostrare che AQ a QN sta come cinque a tre.* Infatti $QN = QO + NO = QO + \frac{AO}{2} = QO + \frac{PN + PQ + OQ}{2} =$

$$\frac{PN + PQ + 3\,OQ}{2} = \frac{QN + 2\,PQ + 3\,OQ}{2} = \frac{QN + 6\,OQ + 3\,OQ}{2} =$$

$\frac{QN + 9\,OQ}{2}$, onde avremo di qui $2\,QN = QN + 9\,OQ$, ossia $QN = 9\,OQ$. Rispetto a quell'altra parte della linea, abbiamo $AQ = AP + PQ = PN + PQ = QN + PQ + PQ = QN + 2\,PQ = QN + 6\,OQ$. Sostituitovi il valore di QN, sarà $AQ = 9\,OQ + 6\,OQ = 15\,OQ$, e perciò in ultimo $AQ : QN = 15\,OQ : 9\,OQ = 5 : 3$, ciò che dimostrato, come si doveva, ritorniamo a trascrivere il discorso del Torricelli.

« Seghisi MA, sicchè la AH sia doppia di HM, e tirato il piano GHF parallelo alla faccia DG, sarà in esso il centro del prisma. Segando poi MA *bifariam* in I, e tirato il piano IL parallelo al DG, saranno segate per mezzo quattro linee della piramide, per la XVII dell' XI, ed in esso sarà il centro della piramide. Ora pongasi che il centro del prisma sia R, e della piramide sia S, e tirisi la RS quale segherà per forza la AN, quale va da A al centro della faccia DG. »

« Poichè, se in NR è il centro di tutto, ed è anco in AN, però devono concorrere, e sarà il concorso il centro di tutto. Sia dunque Q: sarà SQ alla QR come il prisma alla piramide, cioè tripla. Immaginiamoci prolungato in infinito il piano LI, sicchè seghi AN, v. g. in P. Sarà dunque PQ tripla di OQ. Ma essendo AP, PN, siccome sono AI, IM, uguali, ed essendo AO dupla di ON, siccome AH è dupla di HM; fatto il conto, sarà tutta la AQ, alla QN, come 15 a 9, ovvero come 5 a 3 » (ivi, fol. 186).

« PROPOSIZIONE XXVII. — *Il centro dell' emisfero è nell' asse in sul luogo, che sta come cinque a tre.* »

« Sia il quadrante BAC (fig. 177), il cui asse AC. Immaginisi AD uguale alla semiperiferia del circolo, e sia l' angolo BAD retto, e finiscasi il rettangolo BD, che sarà uguale al suo cerchio. Poi tirisi la BC, e sopra il triangolo BAC facciasi il prisma BGA, con l' altezza AD, e prodotta AH eguale ad AC tirisi la HD, sicchè seghi la CG prodotta in E, e facciasi la piramide FDGE. Tirisi, tra l' applicata MN e per essa, un piano LO parallelo a piano BD. »

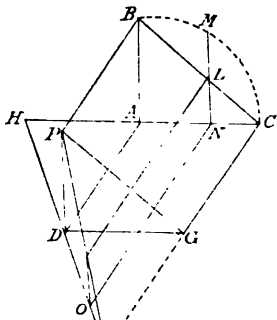



Figura 177.

« Che il rettangolo HAC, al rettangolo HNC, sia come il rettangolo BD ad LO, *ratio est* perchè il rettangolo HAC, al rettangolo HNC, ha ragion composta di AH ad HN, cioè AD ad NO, e di AC a CN, ovvero AB ad NL: però sarà il rettangolo LO eguale al circolo MN. »

« Ora il cerchio AB, al cerchio MN, sta come il quadrato AB al quadrato MN, cioè come il rettangolo HAC al rettangolo HNC, ovvero come il rettangolo BD ad LO. Gli antecedenti sono uguali, ergo ed i consequenti. »

« Fatta ora libbra AC abbiamo alla libbra attaccate grandezze rettangole, ed altrettante circolari, ciascuna uguale a ciascuna: però li centri saranno nel medesimo perpendicolo, ovvero il perpendicolo, che passa per i centri, dividerà la libbra nello stesso punto. Ma i rettangoli equiponderano, dal punto che divide la libbra, come cinque a tre; ergo anche i circoli, che compongono l'emisfero » (ivi, fol. 15).

Di questo modo ingegnoso, per ritrovare i baricentri delle figure note, risolute in piani perpendicolari all'asse, volle dare il Torricelli un altro esempio nel conoide parabolico, adattandolo talmente al prisma triangolare, che gl'infiniti rettangoli di questo riuscissero proporzionali agl'infiniti circoli di quello, e ciò egli ottiene prendendo le facce DF, FG uguali (fig. 178), e l'AC, che sega in mezzo i làti opposti ED, FN, per asse della parabola ALB, il parametro della quale sia la DE stessa. Prese le due ordinate BC, LM avremo, per le note proprietà della curva, $BC^2 : LM^2 = AC \,.\, DE : AM \,.\, DE = DF : DH = FG : HI = \pi\, BC^2 : \pi\, LM^2$, e così essendo sempre, è dunque vero che i circoli del conoide pendenti dalla libbra AC son proporzionali ai rettangoli del prisma, e perciò hanno il centro dell'equilibrio nel medesimo punto, per esempio in M, cosicchè AM sia a MC doppia, come si propone il Torricelli stesso di dimostrare concisamente in questa maniera:

Figura 178.

« PROPOSIZIONE XXVIII. — *Il centro del conoide parabolico sega l'asse nella proporzione di due a uno.* »

« Sia la parabola del conoide la AB, asse AC, lato retto DE, mezzo *utrimque*, e, fatto il rettangolo DF, pongasi, eguale ad esso, FG, e ad angolo retto. Sarà dunque il quadrato BC eguale al rettangolo DF, ovvero al rettangolo FG, ed il quadrato LM sarà uguale al rettangolo DH, ovvero HI, e così di tutti. Però, essendo libbra AC, il centro delle une e delle altre magnitudini sarà nel medesimo perpendicolo. Ma il centro del prisma sta nel perpendicolo, che passa per M, quando la AM è doppia di MC; adunque anche il centro del conoide. Ma sappiamo che anco sta nell'asse, ergo sarà M » (ivi, fol. 56).

Figura 179.

A simil genere di dimostrazioni, alle quali sembra che il Torricelli avesse preso gusto, appartiene anche la seguente, che in questa parte del trattato da noi si soggiunge come ultimo esempio:

« PROPOSIZIONE XXIX. — *Ostendemus centrum gravitatis portionis parabolae qua sit in linea, et in quo ipsius puncto.* »

« Esto portio quaelibet ABC (fig. 179) parabolae, abscissa per rectam

BC, diametro parallelam, ductaque AB, et divisa CA bifariam in L, ductaque parallela LH, fiat ut HL, ad dimldiam LI, ita CO ad OL; erit in OQ centrum portionis » (ibid., fol. 29).

Per dimostrare che in OQ è veramente il centro della porzione ricorre il Nostro a un terzo termine, che consiste nel riguardare AC come una libbra, gravata dalle infinite linee, che contessono il segmento, a ciascuna delle quali si vuol che rispondano in proporzione gl' infiniti cerchi di una sfera o di uno sferoide. S' immagini rivolgersi intorno ad AG, come ad asse, AFG, semicirconferenza o semiellisse che ella sia: se dentro ad essa tirisi AF, e la HL si prolunghi in M, è facile dimostrare che da una tal costruzione è conseguito l' intento. Essendo infatti, per la parabola, $HL : BC = AL . LG : AC . CG$, e per il circolo o la ellisse $LM^2 : CF^2 = AL . LG : AC . CG$; sarà $HL : BC = LM^2 : CF^2$. Dividendo i conseguenti per 4, e osservando che $\frac{BC}{4} = \frac{LI}{2}$, e $\frac{CF^2}{4} = LN^2$, sarà HL a $\frac{LI}{2}$, ossia CO ad OL, come LM^2 a LN^2, nel qual caso, come vedremo essere dimostrato dal Torricelli in generale per tutti i conoidei, O è il centro di gravità della porzione sferica descritta dall' arco AMF, e perciò in O batterà pure il perpendicolo calato dal centro di gravità del segmento parabolico.

« Fiat, dice il Torricelli, circa axem sphaerois, sive sphaera AFG, et, productis lineis BC, HL in F, M, ducatur AF. CO ad OL est ut HL ad semissem LI, sive HL ad $^1/_4$ BC, sive ut quadratum ML ad $^1/_4$ quadrati FC, nempe ut ML quadratum ad quadratum LN. Ergo O est centrum portionis sphaeroidis, vel sphaerae FAC. »

« Sed ad libram AC quaedam magnitudines pendent, quae erunt circuli sphaeroidis, et aliae quaedam magnitudines, quae sunt lineae portionis parabolicae, praedictis circulis ex ordine proportionales. Ergo centra illarum similiter divident libram. Propterea parabolicae portionis centrum erit in recta OQ » (ibid.).

Resta a definire il luogo, dove precisamente il punto O si trova sull' asse, il quale dice il Torricelli essere segato in parti tali, che AO ad AC « sit ut HL.cum LI ad HL. Nam, per praecedentem constructionem, cum centrum sit in secta per O, erit CO ad OL, ut HL ad semissem LI. Et componendo CL ad LO ut HL, cum semisse LI, ad semissem LI. Et per conversionem rationis CL ad CO, ut HL, cum semisse LI, ad HL. Et duplicatis antecedentibus AC ad CO ut bis HL, cum LI, ad HL. Et dividendo AO ad OC ut HL cum LI ad HL, q. e. d. » (ibid.).

Così essendo, perchè il tutto si compone di due parti, l' una delle quali è la parabola AHB, l' altra il triangolo ABC; « iungantur, ne conclude il Torricelli, centra parabolae AHB, et trianguli ABC, et ubi recta coniungens concurret cum OQ, ibi erit centrum portionis » (ibid.).

VI.

L' aver dato alla Baricentrica questa varietà di metodi nuovi non quietava l' animo del Torricelli, che rivolse l' operosa fecondità dell' ingegno intorno a immaginar solidi nuovi, quali sarebbero gli scavati e i vasiformi. Vedremo come di questi gli venisse l' occasione da quel solido acuto iperbolico, che non cessa, dopo due secoli e mezzo, di destar la maraviglia nei Matematici, ma di quelli, cioè de' solidi scavati, principio alla ricerca dei centri di gravità furono i centri delle porzioni di sfera, che tanto si desideravano, dopo quello dei settori, a cui s' erano in questo argomento arrestate le invenzioni dello stesso Torricelli.

Luca Valerio aveva tutte esaurite le sue forze nell' emisfero, ma in quel secondo modo d' indicarne il centro di gravità, togliendo dal cilindro circoscritto la scodella esterna, la quale si dimostrava uguale a un cono, vedevasi il Torricelli aperta innanzi la via di giungere al suo proprio intento. La proposizione scritta nel terzo libro *De centro gravitatis solidorum,* ammirata per la sua novità, era stata resa anche più cospicua da Galileo, il quale, come i nostri Lettori già sanno, la citò, nella prima giornata delle due Scienze nuove, per concluder da lei che il metodo degli indivisibili era un assurdo. Il Torricelli invece l' andava predicando come la vena, e la miniera inesausta delle speculazioni belle, quali giusto son queste che ora diremo, e che gli occorsero alla mente dal ripensare in che modo si potessero ridurre alla facile brevità del metodo cavalierano i lunghi e faticosi processi del Valerio e di Galileo.

Ma il modo glielo suggeriva lo stesso Cavalieri, il quale, nel terzo libro della sua Geometria nuova, dimostrava in quinto luogo questo teorema: Sia BDHF (fig. 180) circolo o ellisse: BH, DF gli assi coniugati o i diametri, sopra l' un de' quali, per esempio sopra DF, come sopra base, e circa l' asse o il diametro EB sian descritti il rettangolo AF e il triangolo AEC. Sia dovunque, per esempio in M, perpendicolarmente attraversato l' asse dalla RV, la quale seghi i lati del triangolo in N, S, e gli archi del circolo o dell' ellisse in I, T, e si rivolga tutta insieme la figura intorno ad EB: « dico ergo, scrive il Cavalleri, quadratum SN aequari reliquo quadrato VR, dempto quadrato TI » (Bononiae 1635, Lib. III, pag. 11).

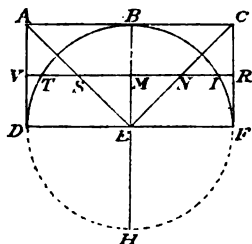



Figura 180.

Così essendo, ragionava il Torricelli, presi i suqquadrupli, avremo $\frac{SN^2}{4} = \left(\frac{VR + TI}{2}\right)\left(\frac{VR - TI}{2}\right)$, ossia $SM^2 = VI \, . \, IR$. Ma il quadrato di SM stando

al rettangolo sotto VI, IR come il circolo descritto dal raggio SM all'armilla descritta da IR o da VT intorno all'asse, e così essendo di tutti gl'infiniti circoli e delle armille infinite; sarà dunque il cono uguale alla scodella.

Mentre che il Torricelli si compiaceva fra sè di esser giunto con tanta facilità a dimostrare ciò che al Valerio e a Galileo era costato tanta fatica, prendeva animo di valersi della sperimentata potenza di questo nuovo strumento, per ritrovare il centro nelle porzioni di sfera. Sia dunque AGBHC (fig. 181) la proposta porzione, la quale si risolva nel cono del triangolo ABD, e nel solido del bilineo AGB. Sarebbe il problema risoluto, quando si sapesse la proporzione che hanno le armille esterne, rispetto ai circoli. Intorno a che studiando il Torricelli riuscì a un'invenzione mirabile, inaspettata, qual'era che il solido del bilineo si uguagliava allo sferoide descritto da una semiellisse, avente per asse maggiore BD, e il minore uguale alla metà di AB.

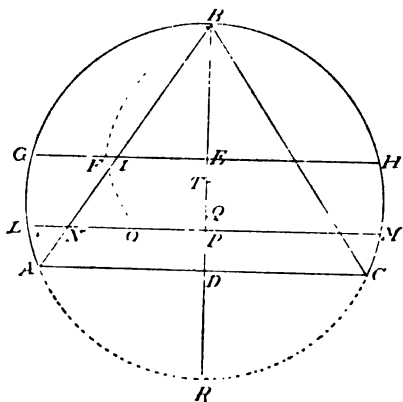



Figura 181.

Il mezzo poi dell'invenzione è d'incredibile facilità, perchè, supponendosi essere la DFB la detta semiellisse, se il minore asse di lei FE intendasi prolungato in G, e si conduca qualunque altra ordinata LP, s'avranno, per le geometriche proprietà assai ben note, le seguenti equazioni: LN . NM : GI . IH = AN . NB : AI . IB = DP . PB : DE . EB = $OP^2 : FE^2$. Ma essendo AI = IB, perchè E è il mezzo di BD, e IB = EF per costruzione, GI . IH = FE^2: dunque anche LN . NM = PO^2. Onde le armille LN, GI saranno uguali ai circoli OP, FE, e, così essendo sempre, il solido del bilineo sarà uguale allo sferoide, come, così avendo proposto il Torricelli, dimostrava con queste sue proprie parole:

« Si ex segmento sphaerico ABC (nella precedente figura) dematur conus inscriptus, erit reliquum solidum sphaericum excavatum aequale sphaeroidi, cuius axis sit BD, diameter vero EF sit aequalis semissi rectae AB. »

« Nam ducto plano quodlibet LM, ad axem erecto, erit rectangulum LNM, ad GIH, ut ANB ad AIB, ob aequalitatem, per XXXV. Tertii, sive ut DPB ad DEB, nam omnes ex iisdem rationibus componuntur, sive ut quadrata PO et EF, ob ellipsim. Sed conseguentia ponebantur aequalia, ob suppositionem, ergo etiam antecedentia, nempe rectangulum LNM quadrato PO aequale est, ideoque armilla LN circulo OP et hoc semper. Ergo omnes simul armillae, sive solidum sphaericum excavatum, omnibus simul circulis, nempe sphaeroidi, aequales sunt » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 37).

Essendo ora in E il centro dello sferoide, e, presa BP tripla di PD, in P il centro del cono; non resterebbe che a sapere la proporzione, che passa tra

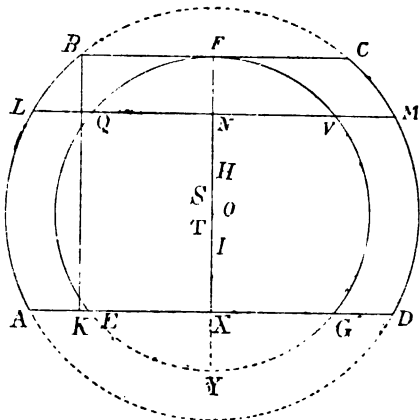
la misura dei due solidi, per avere il centro del tutto: sembrava tendere a ciò il corollario dallo stesso Torricelli ivi soggiunto: « Solidum ergo excavatum, ad conum ABC, erit ut sphaerois praedicta ad eumdem conum, nempe ut duo quadrata FE ad quadratum AD, sive ut duo rectangula AIB ad quadratum AD » (ibid.). Ma volendosi riferire il ritrovato centro della porzione sferica all' asse, conduceva all' intento direttamente quest' altro teorema, dimostrato dal Cavalieri nel citato libro della Geometria nuova: « Sit circulus BARC cuius axis vel diameter BR, ad quem ordinatim applicetur AC, abscindens utcumque portionem ABC, et centrum sit Q. Dico omnia quadrata portionis ABC ad omnia quadrata trianguli ABC esse ut composita ex dimidio totius BR, idest QR, et ipsa DR, ad eamdem DR » (Editio cit., pag. 1). Di qui derivava nel manoscritto torricelliano la proposizione e la pratica seguente:

« PROPOSIZIONE XXX. — *Segmenti sphaerici ABC* (sempre nella medesima figura) *centrum gravitatis reperire.* »

« Seca bifariam BD in E, et PD sit $^1/_3$ BD, et sphaerae diameter BR bifariam secetur in Q. Deinde fac ut DR ad RQ, ita ET ad TP, et erit T centrum quaesitum, » verità conseguente dai premessi principii, e confermata, con questa nota illustrativa, dal Viviani: « Nam, si intelligamus in segmento conus inscriptus ABC, erit P centrum coni, et E centrum reliqui solidi, dempto cono, cum alibi ostensum sit solidum genitum a bilineo AB aequari sphaeroidi cuidam, cuius centrum est in E. Sed totum segmentum ABC, ad conum inscriptum ABC (per I[am] Tertii Geometriae Cavalerii), est ut QR cum DR ad DR; ergo, dividendo, solidum bilineum AB, ad conum ABC, erit ut QR ad DR. Et convertendo conus ad solidum erit ut DR ad QR, vel ut ET ad TP. Ergo magnitudines distantiis e contrario respondent, idcirco T erit centrum commune magnitudinum, nempe segmenti sphaerici ABC, q. e. d. » (MSS. Gal. Disc., T. XXXV, fol. 37).

Figura 182.

Indicato così il centro di gravità del segmento sferico, e mostrate le ragioni perchè fosse questa indicazione da tenersi per vera, rimaneva a cercar dove si dovesse collocare sull' asse il centro di gravità del frusto. Rappresentandolo nella figura ABCD (182) fu primo pensiero del Torricelli di risolverlo nel segmento EFG, la regola baricentrica del quale era stata dianzi indicata, e nel solido generato dal quadrilineo ABFE, che bisognava studiarsi di ridurre a qualche solido comunemente noto. Lo studio riuscì anche questa volta felicemente, nel modo che segue:

« Si ex frusto sphaerico ABCD, planis parallelis abseisso, demptum sit

segmentum sphaericum EFG concentricum et aequealtum, erit reliquum solidum excavatum aequale cylindro KC, super basi BC constituto, et aequealto. Nam, ducto ubicumque plano LM ad axem erecto, erit circulus LM, ad QV, ut quadratum LN ad quadratum NQ. Et, dividendo, armilla cuius latitudo LQ, ad circulum QV, erit ut rectangulum LQM ad quadratum QN. Sed circulus QV, ad circulum BC, est ut quadratum QN ad BF; ergo ex aequo erit armilla LQ, ad circulum BC, ut rectangulum LQM ad quadratum BF, nempe aequalis est, et hoc semper. Ergo omnes simul armillae, hoc est solidum excavatum quale dictum est, aequales erunt omnibus simul circulis, nempe cylindro KC » (ibid., fol. 37).

Dell' applicazione però di questo lemma non ci è nel manoscritto torricelliano altro che il principio nell' appresso

« Proposizione XXXI. — *Frusti sphaerici ABCD centrum reperire.* »

« Seca FX ita ut XH sit $1/2$, XI $1/3$ totius FX, et centrum sphaerae sit T. Fac ut XY ad XT, ita HO ad OI ut supra, et hoc serva.... » (ibid., fol. 214).

Il Viviani pensò di ridurre la proposizione compiuta, facendo osservare che intanto era indicato in O il centro di gravità del segmento sferico, a cui bisognava aggiungere il solido generato dal quadrilineo ABFE, che s' è dimostrato uguale al cilindro CK. Di tali due parti si compone il frusto, ma si faceva dal Viviani stesso notare che il segmento e il solido descritto dal trilineo ABK sono uguali, ond' è che le parti componenti si riducono al detto trilineo, e al cilindro inscritto. Di quello il centro è O, medesimo che del segmento, di questo è in H, a mezzo l' asse FX. Facendosi dunque come HS a SO, così reciprocamente il solido del trilineo al cilindro inscritto; sarà in S il centro cercato.

« Et erit O (soggiunge all' interrotta scrittura torricelliana il Viviani) centrum solidi a trilineo ABK geniti, cum sit centrum portionis sphaericae EFG, quae aequatur dicto solido. Sed H est centrum cylindri inscripti KC, ergo centrum frusti ABCD est inter H et O. Si fiat ergo ut HS ad SO, ita solidum a trilineo ABK, ad cylindrum CK, erit S centrum frusti ABCD » (ibid., T. XXXV, fol. 138).

Del trilineo, che è uguale al segmento, e del cilindro si possono dalla Geometria aver le misure, alle quali son proporzionali le indicate parti dell' asse, e il problema sarebbe perciò risoluto. Ma se il Torricelli ne lasciò la soluzione incompiuta, non dovette essere senza un motivo, che a noi giova d' investigare. Si potrebbe credere che fosse stato perchè la formula non gli riusciva della consueta semplicità ed eleganza, e poniamo che vi concorresse anche questa ragione, la principale nulladimeno fu quella di voler avere il vantaggio sopra Luca Valerio. Nelle due ultime proposizioni trascritte la superiorità del Torricelli consisteva solamente nel comprendersi insieme i due casi, che il centro della sfera intera rimanesse così dentro, come fuori dell' asse della porzione, ma si seguitava pure a distinguere il caso che la porzione contemplata avesse una sola, o due basi, porgendo della stessa sfera ora un semplice segmento, ora un frusto.

Si voleva dunque da esso Torricelli anche in ciò superare il Valerio, che, nel suo secondo libro *De centro gravitatis,* aveva distinte sei proposizioni, per dimostrare il centro di gravità delle porzioni sferiche, secondo che il centro della figura intera riman dentro o fuori dell' asse, e secondo che esso asse tocca con ambedue le estremità i piani secanti, o ne tocca uno solo, perchè l' altro svanisce; comprendendo tutte queste verità in una proposizione universalissima, a condur la quale riuscì esso Torricelli felicemente, supposte le cose, per le due precedenti già dimostrate, aggiuntovi quest' altro lemma, che dice: « Se sarà un cilindro ed un cono intorno al medesimo asse, il cilindro al cono sta come tre quadrati AB (fig. 183) al quadrato AC. Poichè il cilindro BE al cilindro CD sta come il quadrato AB al quadrato AC, *sumptisque consequentium triplis,* il cilindro BE al cono sta come il quadrato AB ad un terzo di AC, ovvero come tre quadrati AB al quadrato AC » (ivi, T. XXXVI, fol. 53).

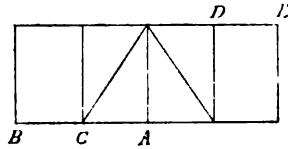



Figura 183.

Ecco ora come, preparate queste cose, si dia dal Torricelli, con regola universalissima, l' invenzione del centro di gravità delle porzioni, comunque sian segate nella sfera:

« PROPOSIZIONE XXXII. — *Esto frustum sphaericum planis parallelis AD, BC* (fig. 184) *abscissum, axis EF. Dico centrum gravitatis ita secare EF, ut pars ad E terminata sit ad reliquam, ut quadratum BC, cum duobus quadratis EF, duobusque AD, ad quadratum AD, cum duobus FE, duobusque BC.* »

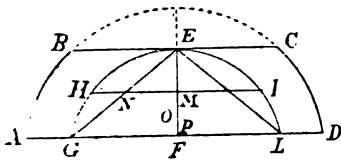



Figura 184.

« Fiat segmentum sphaericum GHEIL concentricum et aeque altum cum frusto, inscribaturque conus GEL, et, secto axe bifariam in M, applicetur HMI. Demonstratum est solidum sphaericum excavatum GHEBA aequari cylindro, cuius basis sit circulus BC, altitudo vero EF; sive cono, cuius basis sit tripla circuli BC, altitudo vero EF. Ergo solidum GHEBA, ad conum GEL, est ut triplum quadrati EB ad quadratum FG. Solidum vero excavatum, factum a bilineo GHE, ad conum eumdem GEL, demonstratum est esse ut duo rectangula GNE ad quadratum FG. Ergo, per XXIV Quinti, totum simul solidum ABENG, ad conum GEL, erit ut tria quadrata BE, cum duobus rectangulis GNE, ad quadratum GF, sive, sumptis duplis, ut sex quadrata BE, cum quadrato GE, ad duo quadrata GF. »

« Secetur FM bifariam in P: eritque P centrum coni GEL, et est idem centrum tam solidi GHEBA, quam etiam solidi GHE, propterea M erit centrum totius solidi ABENG. Fiat ergo ut sex quadrata BE, cum quadrato GE, ad duo quadrata FG, ita reciproce recta PO ad OM, et erit O centrum gravitatis totius frusti sphaerici. »

« Iam argumenta sunt componendo, duplicando antecedentia, per con-

versionem rationis, duplicando antecedentia, dividendo, et postea facta reductione. Per constructionem est recta PO ad OM ut sex quadrata BE, cum quadrato EG, ad duplum quadrati FG. Componendo, PM ad OM erit ut sex quadrata BE, cum quadrato EG et duplo quadrati FG, ad duplum quadrati FG. Duplicando antecedentia, FM, ad MO, erit ut 12 quadrata BE, cum 2 EG + 4 FG, ad 2 FG. Per conversionem rationis, MF ad FO ut 12 BE + 2 EG + 4 FG ad 12 BE + 2 EG + 2 FG. Duplicando antecedentia, EF ad FO ut 24 BE + 4 EG + 8 FG, ad 12 BE + 2 EG + 2 FG. Dividendo, EO ad OF ut 12 BE + 2 EG + 6 FG ad 12 BE + 2 EG + 2 FG. »

« Sed quoniam rectangulum AGD quadrato BE est aequale, erit differentia quadratorum AF, BE. Ergo potest fieri reductio talis, mutato prius quadrato EG cum quadratis EF, FG. Sic EO ad OF est ut 12 BE + 2 EF + 8 FG, ad 12 BE + 2 EF + 4 FG. Vel, facta reductione, EO ad OF est ut 4 BE + 2 EF + 8 AF ad 8 BE + 2 EF + 4 AF. Vel, facta ultima reductione, EO ad OF est ut quadratum BC, cum duobus EF duobusque AD, ad 2 BC + 2 EF + uno AD, q. e. d. » (ibid., fol. 39).

Notabile fra tutte le altre passate è questa proposizione, non solo riguardata in sè stessa, ma nel suo processo dimostrativo, che offre il primo esempio, dato dal Torricelli nella Scuola galileiana, per tentar di vincere la ritrosia contro i metodi analitici, ritrovati tanto utili allora dai Matematici francesi. Se ne compiacque il Nostro non poco, e annunziando il teorema a Michelangiolo Ricci, il dì 7 Marzo 1642, pochi giorni dopo averlo dimostrato, gli diceva: « Giacchè V. S. studia Luca Valerio, eccogli una proposizione, che ne abbraccia molte di Luca Valerio. Giudichi V. S. chi la porti meglio o egli o io. Se sarà un frusto di sfera ABCD (nella preced. figura) tagliato co' piani paralleli AD, BC, o passino per il centro sì o no, o l' intraprendano sì o no, e sia l' asse del frusto EF, e centro di gravità O; sarà la retta EO alla retta OF come il quadrato AB, con due quadrati EF, e due quadrati DC, ad un quadrato DC, con due quadrati EF, e due quadrati AB. Se V. S. la comunica al sig. Raffaello (Magiotti) so certo che l' avrà cara, perchè sui libri non la troverà portata a questo modo » (ivi, T. XL, fol. 100).

Un anno dopo, dando la medesima notizia al Cavalieri si compiaceva di fargli notare che il suo processo era molto più spedito che quello di Luca Valerio, « ed è, soggiungeva, universale, o sia intrapreso il centro o no. Insomma a me pare che, per via degli indivisibili, si trovino, oltre le innumerabili e maravigliose di V. P., anco tuttavia delle conclusioni da non sprezzarsi, e che, se io le trovassi in altri, mi parrebbero speciose. Come dunque questa dottrina non è da stimarsi? Se costoro ammettessero le conclusioni per belle, come credo che bisogni concedere, converrà pur anco approvare le dottrine: ovvero, se lodano le conclusioni e non le dottrine, almeno doveranno mostrare che ve ne siano delle false, ma credo che dureranno fatica » (ivi, fol. 123).

Fra i *Problemi proposti ai Matematici di Francia* era notato anche quello del centro di gravità nel frusto sferico, e, dopo averlo enumerato, sog-

giungeva il Torricelli così, nel suo *Racconto:* « Questa enunciazione, con pochissime mutazioni, si riduce a comprendere anco i frusti, ed i segmenti della sferoide. Così, in una sola e facilissima enunciazione, si vedono ristrette molte e difficilissime proposizioni ignote agli antichi, ma dimostrate da L. Valerio con molte proposizioni, e con diversissime enunciazioni, non essendosi accorto che, sotto una sola, semplicissima e universale, si potevano comprendere tutti i casi, sopra i quali egli forma proposizioni tanto diverse » (ivi, T. XXXII, fol. 23).

Che sia veramente la proposizione torricelliana universalissima e generale si conferma dai seguenti corollari: Sia il frusto sferico a una sola base come per esempio ABC (fig. 185), il quadrato dell'altra base è zero, e perciò sarà in questo caso BO : OD $=$ $2(BD^2 + AC^2) : AC^2 + 2\,DB^2$, come fa osservare lo stesso Torricelli: « In segmento sphaerico superioris figurae quadratum BC (nella figura 184) penitus evanescit. Ergo recta BO ad OD est ut duo quadrata BD $+$ 2 AC, ad quadratum AC $+$ 2 DB » (ibid., T. XXV, fol. 74).

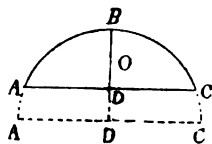



Figura 185.

Che se il frusto sferico ha una base sola, e questa sia uguale a un circolo massimo, BO sta a OD come 5 a tre: ciò che conferma il già dimostrato in altri modi, essendo allora il frusto un emisfero, e si conclude dalla formula della proposizion generale, illustrata dalla figura 184, e così scritta: $EO : OF = BC^2 + 2(EF^2 + AD^2) : 2(BC^2 + EF^2) + AD^2$. Essendo nell'emisfero $BC^2 = 0$, $AD = 2\,EF$, la detta formula si trasformerà nella seguente: $EO : OF = 2\,EF^2 + 8\,EF^2 : 2\,EF^2 + 4\,EF^2 = 10 : 6 = 5 : 3$.

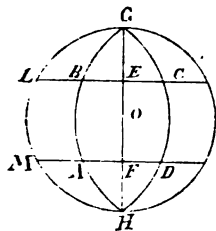



Figura 186.

Che poi in quella universalità si comprendano anche i frusti e i segmenti dello sferoide intendeva il Torricelli di dimostrarlo, con questa proposizione: « In frusto sphaeroidali ABCD (fig. 186) centrum gravitatis O secat EF in eadem ratione, ac si esset frustum sphaericum circa axem GH, et aeque altum » (ibid., T. XXV, fol. 74). Invece della dimostrazione però si trovano nel manoscritto le due seguenti osservazioni: « Ciò che si dice del cerchio si può trasportare all'ellisse, perchè le linee tutte del cerchio hanno la medesima proporzione, che quelle dell'ellisse: però il punto dell'equilibrio sega la libbra *in eadem ratione.* — Quello che si dice della sfera si può trasportare alla sferoide, perchè tutti i circoli della sfera sono tra di loro come tutte le ellissi della sferoide » (ivi, T. XXX, fol. 40).

Avendosi infatti, per le note proprietà geometriche delle due figure, $LE^2 : MF^2 = BE^2 : AF^2$, ossia $\pi\,LE^2 : \pi\,MF^2 = \pi\,BE^2 : \pi\,AF^2$, fatta EF libbra, dovrà questa, per il lemma XXII alla XIV *De dimensione parabolae* altre volte citato, avere il medesimo punto dell'equilibrio, o sia ella gravata dal circolo LE, con tutti gli altri infiniti, che compongono il frusto sferico; o sia gravata dal circolo BE, con tutti gli altri infiniti, che compongono il

frusto sferoideo, perchè ha un solido all' altro la medesima proporzione. « Ergo in sphaeroide (essendo $BC^2 = 4\,BE^2 = 4\,GEH$, $AD^2 = 4\,AF^2 = 4\,HFG$) EO ad OF est ut duo rectangula GEH + quadrato EF + 4 rectangulis HEG » (ivi, T. XXV, fol. 74).

Se la base superiore svanisce, ossia se BC, e con esso GE, si riducono a zero, anche il rettangolo GE . EH è zero, e la formula si trasforma nella seguente $EO : OF = EF^2 + 4\,GFH : EF^2 + 2\,GFH$. Che se, mentre da una parte svanisce la base superiore, l' inferiore diventa il circolo massimo del fuso ellittico, ossia, se il frusto si riduce all' emisferoide, $GFH = EF^2$, e perciò $EO : OF = EF^2 + 4\,EF^2 : EF^2 + 2\,EF^2 = 5 : 3$, come in seguito vedremo dimostrarsi dall' Autore direttamente.

Frattanto osserviamo che, mentre il Torricelli studiavasi di emulare il Valerio, deduceva dalle proposizioni dell' emulo, e dalle sue proprie, alcuni corollari, che l' avviavano a trattar l' argomento indicato nel nostro sommario. Dall' aver dimostrato, rivolgendo l' occhio indietro sopra la figura 182, che il solido descritto dal quadrilineo BE è uguale al cilindro CK di pari altezza, risultava che il centro del solido scavato è nella metà dell' asse, come nello stesso cilindro. « Patet centrum gravitatis dicti solidi excavati esse idem cum centro cylindri » (ibid., T. XXXVI, fol. 37). E per essersi, nella figura 181, dimostrato il solido generato dal bilineo AGB uguale allo sferoide, « Patet centrum etiam praedicti solidi sphaerici esse idem ac centrum sphaeroidis » (ibid.), ossia nel mezzo dell' asse, come il Torricelli stesso confermò così, con dimostrazione diretta, e per il caso particolare che il segmento contemplato fosse un emisfero.

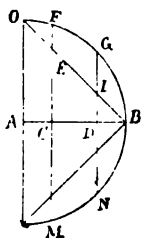



Figura 187.

« Proposizione XXXIII. — *Se dall' emisfero sarà levato il cono, dico che il centro del bicchiere che resta sta nel mezzo dell' asse AB* (fig. 187). »

« Mettasi AB per libbra, e prendansi uguali AC, DB. Saranno anco uguali OE, IB. Ma l' armilla di EF, all' armilla di IG, le quali sono grandezze, che hanno il centro nella libbra AB; sta come il rettango FEM, cioè OEB, *ob rirculum et per XXXV Tertii,* cioè OIB. *ob aequalitatem,* cioè il rettangolo GIN, al rettangolo GIN: però sono uguali *et sic semper. Ergo solidum vasiforme a bilineo OBG genitum, habet centrum gravitatis in medio axis AB* » (ibid., T. XXXVI fol. 11).

« Proposizione XXXIV. — *Dimostrare il medesimo anco nello sferoide.* »

« Procederemo così: Sia la emisferoide ABC (fig. 188), dalla quale leva il cono, e prendi uguali EM, IB, ed anco EF uguale ad EM. E prova genericamente, per via di lemma, che il cerchio MH, alla sua armilla GH, sta come il quadrato BM al rettangolo BME, preso due volte, e poi seguita così.... » (ivi, fol. 13).

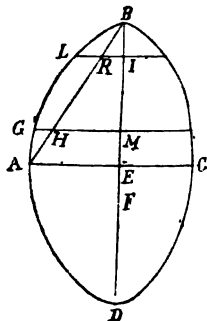



Figura 188.

Prima però di seguitare, avvertiamo che, non essendosi il promesso lemma ritrovato nel manoscritto torricelliano, il Viviani vi supplì di suo, come si legge in un foglio intitolato « *Mio lemma supposto dal Torricelli.* Dico che il quadrato MH, alla sua armilla HG, o il cerchio MH, alla armilla HG, sta sempre come il quadrato BM a due rettangoli BME. »

« Prendi EF eguale ad ME: sarà il quadrato MH, al quadrato AE, come il quadrato BM al quadrato BE; cioè al rettangolo BED, ed il quadrato AE, al quadrato GM, *ob ellipsim, vel circulum,* sta come il rettangolo BED al rettangolo BMD. Adunque *ex aequo* il quadrato HM, al quadrato MG, starà come il quadrato BM al rettangolo BMD; cioè, essendo BF eguale ad MD, al rettangolo BMF. E, dividendo, il quadrato MH, all' armilla HG, come il quadrato BM al rettangolo BMF, cioè a due rettangoli BME » (ivi, T. XXXV, fol. 124).

Tornando ora al Torricelli seguitiamo con lui così: « L' armilla GH, al cerchio MH, sta come il rettangolo BME, preso due voltè, al quadrato MB. Il cerchio poi HM, al cerchio RI, sta come il quadrato MB, al quadrato BI, ed il cerchio RI, alla sua armilla, sta come il quadrato BI al rettangolo BIE, preso due volte. Adunque, *ex aequo et sumptis consequentium dimidiis.* l' armilla GH, alla LR, sta come il rettangolo BME al rettangolo BIE, cioè uguali: e così sempre. Adunque, il centro del bicchiere dell' emisferoide è nel mezzo dell' asse EB » (ivi, T. XXXVI, fol. 13).

Di qui volle il Torricelli passare a esercitarsi intorno ai bicchieri cilindrici, considerandoli prima di tutto scavati da un cono. Ne contemplò due casi: il primo, in cui il cilindro avesse uguale altezza, ma base diversa dal cono; il secondo, in cui l' altezza e la base fossero uguali. E, supposto il teorema, che noi premettemmo alla XXXII qui addietro per lemma; dimostrava, e scriveva fra' suoi fogli, per quel primo caso del cilindro scavato, la seguente

« PROPOSIZIONE XXXV. — *Se sarà un cilindro ed un cono intorno al medesimo asse, fa' come tre quadrati AC* (fig. 189), *al quadrato AB, così EI alla ID* (il punto D è mezzo di AH, ed E mezzo di AD) *sarà il punto I centro del cilindro sbucato.* »

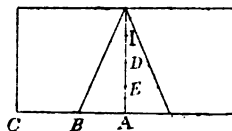



Figura 189.

« Poichè D è centro di tutto il cilindro, ma E del cono. Però tutto il cilindro, al cono, sta come tre quadrati AC al quadrato AB, cioè, come EI ad ID. E, dividendo, il solido forato, al cono, come ED alla DI. Però il punto I è centro del cilindro forato » (ivi. T. XXXVI, fol. 53).

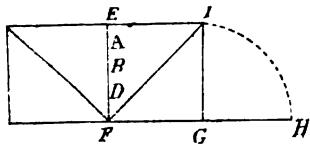



Figura 190.

L' altro caso del centro di gravità nel bicchiere cilindrico è d' invenzione simile a quella del primo. Si chiami C il cilindro intero, *c* il cono, CS il cilindro scavato. Se A (fig. 190) è il centro di gravità del cono, e B quello del cilindro, Archimede insegna

nella VIII degli Equiponderanti (Op. cit., pag. 170) che, se faremo BD : AB = *c* : CS, verrà in D indicato il punto richiesto. Componendo sarà AD : BD = C : *c* = 3 : 1. Dividendo, AB : BD = 2 : 1. Duplicando gli antecedenti, EB : BD = 4 : 1. Componendo, ED : BD = 5 : 1. Dividendo quella medesima, che ora si è composta, FD : BD = 3 : 1. D' onde ED : FD = 5 : 3.

La medesima relazione era stata conclusa poco addietro per corollario dalla XXXII, ond' è che, volendo il Torricelli farne una proposizione distinta, incominciò a pensare che, presa GH = FG, e sopra IG, GH disegnata una semiellisse, rivolgendosi questa intorno alla IG descriverebbe un solido, il centro di gravità del quale sarebbe indicato nel medesimo modo, che nel bicchiere cilindrico, per cui tenne per certo che esso bicchiere e l' ellissoide fossero uguali. Trovato che così era veramente, ne fece un lemma per questa

« Proposizione XXXVI. — *Centrum gravitatis hemisphaeroidis ita secat axem, ut pars ad verticem sit ad reliqua ut quinque ad tria.* »

Il detto lemma per la dimostrazione si preparava in questa maniera: « Esto cylindrus rectus ABCD (fig. 191) excavatus, cui nimirum demptus sit conus BEC. Ponatur DF aequalis ipsi DE. Dico cylindrum excavatum ABECD aequalem esse hemisphaeroidi, quae fit a semiellipsi DCF circa axem DC revoluta. »

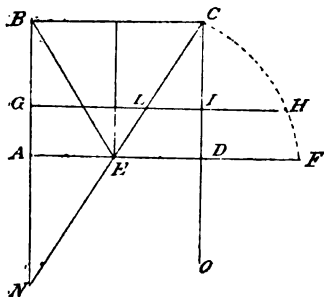



Figura 191.

« Agatur planum GH, ad axem erectum, producanturque BA, CE donec contingant in N, et producatur CDO axis integer. Habebit circulus AD, ad armillam LI, rationem compositam ex ratione rectae ED, ad LI, sive DC ad CI, et ex ratione AE ad GL, sive ex ratione AN ad NG, sive DO ad OI. Ergo circulus AD, ad armillam LI, erit ut rectangulum CDO ad CIO, sive, ut quadratum DF ad IH, vel, ut circulus radio DF ad circulum ex radio IH. Sed antecedentia sunt aequalia, ergo etc. Et hoc semper, ergo etc. »

« Ho passato per noto che la retta AN sia uguale alla DO, ed è chiaro, perchè la DO è uguale alla DC, *per constructionem,* ma la AN è uguale alla AB, *ob parallelas,* essendo BC doppia alla AE. »

« Ritornando al proposito, e facendo dalla Geometria trapasso alla Meccanica, però si prova il centro della emisforoide con facilità, perchè stato facile trovar quello del cilindro sbucato. »

« Esto centrum totius cylindri B (nella figura 190 qui poco addietro) coni vero ablati A. Ergo, per VIII primi Aequiponderantium, erit D centrum solidi excavati, si fiat ut cylindrus ad conum, ita AD ad DB, nempe, ut tria ad unum. Ergo, dividendo, AB ad BD erit ut dūo ad unum. Et, sumptis duplis, EB ad BD ut quatuor ad unum. Ergo ED ad DF erit ut quinque ad tria. Et in eadem ratione secat axem hemisphaeroidis centrum gravitatis » (ibid., T. XXX, fol. 116).

Le medesime cose era il Torricelli riuscito a dimostrarle per altre vie,

non meno splendide e nuove. Dalla V del III del Cavalieri si concludeva essere la scodella esterna uguale al cono, o fosse il cilindro circoscritto alla sfera, o alla sferoide, cosicchè in questo caso, togliendosi la scodella stessa, rimaneva l'emisferoide ignuda, della quale potevasi, con la nota regola dell'VIII degli Equiponderanti, ritrovare il baricentro, conoscendosi quello del tutto e di una sua parte. La proporzione stereometrica poi tra l'una e l'altro, cioè tra l'emisferoide e il cono inscritto, era nota per la XXIX di Archimede nel libro *De conoid. et sphaer.*, ma il Torricelli, per far prova della superiorità del metodo degl'indivisibili verso l'antico, e per mostrare con quanto maravigliosa facilità e speditezza si potesse giungere a quelle medesime conclusioni, alle quali si giungeva pure dai matematici seguaci del Siracusano, ma per vie tanto aspre e affannose; si applicò a dimostrare, con aggressioni nuove, che l'emisfero o l'emisferoide è doppia del cono inscritto, premettendo tre lemmi alla proposizione.

Il primo è compreso nella VI archimedea *De conoid. et sphaer.*, nella quale si dimostra che l'ellisse sta al circolo come il rettangolo sotto gli assi sta al quadrato del diametro; d'onde si deriva che, se uno degli assi è uguale al diametro, come suppone il Torricelli, l'ellisse sta al circolo come l'altro asse al diametro, secondo che il Torricelli stesso proponevasi di dimostrare, benchè in un modo del tutto nuovo.

« *Lemma I.* — Omnis ellipsis, ad circulum qui habeat diametrum aequale alteri axium ellipseos, eam habet proportionem, quam alter, nempe inaequalis axis, ad circuli diametrum. »

« Esto ellipsis ABC (fig. 192), circulus ADC, et sit axis ellipsis AC aequalis diametro circuli AC. Sitque alter axis BH: dico ellipsim ad circulum esse ut BH ad HD. Ducatur enim ordinatim EF, ubicumque, et erit quadratum EF, ad quadratum BH, ut rectangulum AFC, ad rectangulum AHC. Sed etiam quadratum IF, ad quadratum DH, est ut rectangulum AFC ad rectangulum AHC; ergo quadratum EF, ad quadratum BH, est ut quadratum IF ad quadratum DH. Ergo et lineae sunt proportionales. Et, permutando, EF ad FI est ut BH ad HD, et hoc semper. Propterea erunt omnes antecedentes simul, ad omnes simul consequentes, ut una antecedentium ad unam consequentium, nempe ellipsis ABC, ad circulum ADC, ut BH ad HD » (idid., fol. 172).

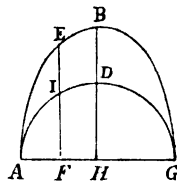



Figura 192.

Segue l'altro lemma, che, trapassando dal circolo e dall'ellisse alla sfera e allo sferoide, procede per gl'indivisibili in modo analogo al primo.

« *Lemma II.* — Omnis sphaerois, ad sphaeram, quae habeat maximum circulum aequalem maximo circulo sphaeroidis, est ut axis ad axem. »

« Esto sphaerois ABC (fig. 193) sphaera vero ADC quales dictae sunt: maximus utriusque circulus sit AHCL. Dico sphaeroidem ad sphaeram esse ut axis BE ad axem ED. Secetur enim utraque per centrum E, plano HBL ad diametrum AC erecto, et iterum altero plano MFN, ipsi HBL parallelo

ubicumque. Eritque, per praecedens lemma, ellipsis HBL, ad circulum HDL, ut BE ad ED. Sed etiam ellipsis MFN est ad circulum MIN ut FG ad GI, sive ut BE ad ED, et sic semper. Propterea erunt omnes simul antecedentes, ad omnes consequentes simul, ut una ad unum, nempe ut ellipsis HBL ad circulum HDL, sive ut axis BE ad axem ED » (ibid., fol. 173).

Figura 193.

« *Lemma III.* — Sphaeroides inter se sunt ut solida parallelepipeda, quorum bases sunt quadrata diametrorum, altitudines vero longitudines axium. »

« Sint sphaeroides ABC, DEF (fig. 194) quarum axes BG, EH, diametri vero AC, DF. Dico sphaeroidem ABC, ad sphaeroidem DEF, esse ut solidum parallelepipedum, basi quadrato AC, altitudine vero BG, ad solidum parallelepipedum, basi quadrato DF, altitudine vero EH. Concipiatur enim, in utraque sphaeroide, sphaera aequalis diametri AIC, DOF. Eritque sphaerois ABC, ad sphaeram AIC, ut recta BG ad GI, per praecedens, sive, ut solidum basiquadrato GI, altitudine GB, ad cubum GI. Sphaera vero AIC, ad sphaeram DOF, est ut cubus GI ad cubum HO, et denique sphaera DOF, ad sphaeroidem DEF, est ut cubus HO ad solidum parallelepipedum, basi quadrato HO, altitudine vero HE. Ergo ex aequo patet propositum. Sumptis vero quadruplis, erit sphaerois ABC ad DEF ut solidum basi quadrato AC, altitudine BG, ad solidnm basiquadrato DF. altitudine EH, q. e. d. » (ibid., fol. 174).

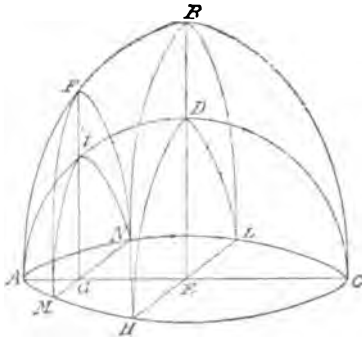
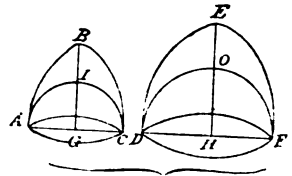
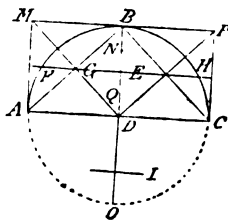



Figura 194.

Con l' aiuto de' quali tre lemmi passa il Torricelli finalmente a dimostrar la proposizione, che dice: *Hemisphaerium, sive hemisphaeroides dupla est coni inscripti.*

Figura 195.

« Esto hemisphaerum sive hemisphaeroides ABC (fig. 195), cuius axis BD, et applicata ex puncto E medio axis sit FEH, conus inscriptus ABC. Jam ostendimus solidum reliquum, dempto cono ABC, aequale esse sphaeroidi cuidam, cuius axis sit BD, maximus vero circulus sit aequalis armillae FG, nempe cuius radius I medius sit inter FG, GH. »

« Jam ratio sphaeroidis ABCO, ad sphaeroidem cuius radius est I, axis vero BD, est, per praecedens lemma, ut solidum basiquadrato I, altitudine BE. Ergo rationem habet compositam ex ratione quadrati AD, ad quadratum I, sive ad rectangulum FGH, nempe ut 4 ad 2, et ex ratione altitudinis DB ad BE, nempe 2 ad 1. Ergo sphaerois ABCO,

ad sphaeroidem praedictam, sive ad reliquum solidum, dempto cono ABC, est ut 4 ad 1. Ergo hemisphaerium, vel hemisphaeroides, ad dictum solidum, est ut 2 ad 1, et, per conversionem rationis, ad conum inscriptum erit ut 2 ad 1, q. e. d. »

« Che il quadrato AD sia sempre doppio del rettangolo patet, perchè il quadrato FE al quadrato AD sta come il rettangolo BEO al rettangolo BDO, cioè come 3 a 4, ed il quadrato AD, al quadrato GE, sta come 4 a 1. Ergo ex aequo il quadrato FE, all' EG, sta come 3 a 1. E, dividendo, il rettangolo FGH, al quadrato GE, sta come 2 a 1, ed al quadrato AD come 2 a 4, q. e. d. » (ivi, fol. 175).

Sia ora CM, nella stessa figura 195, il cilindro circoscritto: se di lui si tolga la scodella esterna, il rimanente è l' emisferoide nuda, della quale si può ritrovare il centro, perch' essendo E quello del tutto, N quello della parte tolta, che si sa essere uguale al cono MDP; avremo in Q il centro dell' emisferoide che si voleva, se faremo EQ a EN reciprocamente come il cono inscritto alla stessa emisferoide, o, per le cose ora dimostrate, come uno a due, d' onde è manifesto che BQ è cinque delle parti, delle quali QD è tre solamente.

Ma, per tornare all' argomento dei solidi scavati, e per mostrare la varietà dell' aspetto e delle forme, sotto le quali gli considerava il Torricelli, trascriveremo dal manoscritto di lui quest' altre proposizioni.

Figura 196.

« PROPOSIZIONE XXXVII. — *Esto portio circuli ABC* (fig. 196) *sive minor, sive maior semicirculi: duae tangentes AD, DB, axis BM, et convertatur. Dico solidum vasiforme, genitum a trilineo ADB, aequale esse cono DMO.* »

« Ducta enim EI, erit rectangulum EFI, sive FEL, aequale quadrato EA, per penultimam Tertii, vel quadrato GH (quadratum enim EA, ad quadratum AD, est ut quadratum HM ad MB, sive GH ad DB, et consequentia sunt aequalia). Quare armilla EF aequalis est circulo GH, propterea solidum vasiforme aequalis erit cono DMO » (ibid. T. XXX, fol. 71).

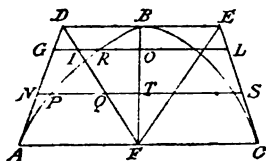



Figura 197.

« PROPOSIZIONE XXXVIII. — *Se la parabola ABC* (fig. 197), *il cui diametro BF, averà la tangente DBE per la cima, e le tangenti AD, CE alla base, e prodotta FD si giri la figura; sarà la scodella del triangolo ADF eguale al conoide, e lo scodellino del trilineo DAB eguale al cono DFE, e perciò medesimo sarà il centro di gravità della scodella e del conoide; dello scodellino e del cono.* »

« Tirisi l' applicata GL: averà il rettangolo GIL, al quadralo AF, ragion composta di GI ad AF, ovvero di ID a DF, ovvero di OB a BF, e di IL a FC, e, perchè sono uguali, diremo di BF alla BF. Sta dunque il rettangolo GIL, al quadrato AF, come la OB alla BF, ovvero come il quadrato OR al quadrato FA, e però sono uguali il rettangolo GIL e il quadrato RO,

ossia l'armilla descritta da GI, e il circolo descritto da GO: e così essendo di tutte le applicate, la scodella del triangolo ADF sarà uguale al conoide parabolico, c. d. d. »

« Essendosi poi provata uguale l'armilla GI al quadrato RO, *adde communem* l'armilla IR, e sarà l'armilla GR uguale al quadrato IO. Essendo anco provato uguale l'armilla NQ al quadrato PT, *deme communem* l'armilla PQ, e resteranno uguali l'armilla NP, e il circolo QT. Dunque sarà la scodellina parabolica del trilineo uguale al cono DFE » (ivi, fol. 69).

Apparterrebbero a questo medesimo argomento alcune altre proposizioni, scritte per dimostrare il centro di gravità nei tronchi di cono scavati da un cono solo o da più coni: ma perchè le dimostrazioni conseguono da principii più alti, che si porranno dal Torricelli a proposito dei centri di gravità dei solidi conoidali, le trascriveremo allora, per passar senza indugio alla seconda parte promessa intorno a questo argomento, che è dei centri di gravità nei solidi vasiformi.

VII.

Dicemmo che l'occasione al trattato nacque dal solido acuto iperbolico, ingerendosi la fantasia a consigliar la Matematica severa di condiscendere talvolta ai lusi dell'ingegno. A chiunque infatti posi l'occhio sulla figura geometrica del detto solido acuto col suo asse verticale, si rappresenta, come si rappresentò al Torricelli, l'immagine di un piede, che quasi aspetti di sostener la coppa di un calice o di un bicchiere. E perchè *bicchiere* era il nome uscitogli più volte di bocca, per chiamare que' solidi scavati, intorno ai quali vedemmo come si fosse il nostro Autore esercitato, per ritrovarne il centro gravitativo; sembrava dunque che la Geometria fosse, con le sue proprie mani, venuta a lavorar lo strumento, per apparecchiare il convito della Scienza. Così, il calice, che il Torricelli pensava di porgere a Minerva per celebrare i divini misteri, aveva per piede il solido acuto iperbolico, per nodo una sfera, e per coppa ora una, ora un'altra figura di quelle varie, che possono immaginarsi descritte dal rivolgersi iperbole con gli asintoti, e parabole, e porzioni di ellissi e di circoli intorno ai loro proprii assi. Il trattato nuovo veniva perciò a partecipare delle festosità del ditirambo, e delle grazie dell'idillio, come possono sentire i lettori infin dal primo presentarlo, che il Torricelli stesso faceva all'amico suo Raffaello Magiotti, mentre questi, per fuggire i calori estivi di Roma, stavasi riparato all'ombra sui colli tusculani.

« Erras, amice Magiotti, si speras in tusculanum collem seductus mearum effugere potuisse obsidionem ineptiarum. Ecce enim persequor te quocumque fugis, solito molestiarum genere, nugis meis. Libet exemplo tuo, qui fusum parabolicum aliquando contemplari dignatus es, de Acu hyperbolica

quaedam dicere. Utinam tibi libeat audire. Contemplationem leges, in qua fortasse acumen desiderabis, non autem in solido, cuius tanta subtilitas est ut, quamvis in infinitam longitudinem producatur, exigui tamen cylindri molem non excedat. I nunc et procul recede: aculeum habet Geometria longiorem, quam tu ab ipso evadere possis. Huius ego mucrone, non minus subtili quam longo, eruditas et vere geometricas aures tuas non expungere hesitabo. Caeterum lege libenter hoc, quicquid est, mox enim videbis huius contemplationis materiam, quae nunc cuspis est, meliore figura refusam in calicem tantae capacitatis, ut sitim vel giganteam extinguere possit » (ibid., T. XXX, fol. 3).

Di qui apparisce che lo scopo è principalmente quello di trovar, delle varie coppe da soprapporre al piè del calice, la grandezza e no il centro, dicendo scherzevolmente al Magiotti che nel Luglio sitibondo, in cui scriveva, metteva più conto di ritrovar del bicchiere da rinfrescarsi le misure della capacità, che del peso. Nonostante, s' indica anche delle varie coppe descritte il luogo del baricentro, e benchè tutte l' abbiano in mezzo all' asse, era pur necessario dimostrarlo per vie geometriche, come il Torricelli fa in quel suo modo, sempre facile ed elegante, cosicchè par che chi legge, sedotto dal desiderio di cogliere le rose, non senta più la mano pungersi dalle spine.

« *Lemma I.* — Si fuerint tres lineae in continua proportione, erit armilla, sive differentia circulorum, quorum alter fit ex semisse aggregati, alter vero ex semisse differentiae extremorum; aequalis circulo, qui fit ex media proportionalium linearum. »

« Sint tres lineae in continua ratione AB, BC, BD (fig. 198), et ponantur extremae in directum ABD, ipsa vero media BC erigatur in B ad angulos rectos. Secta deinde AD bifariam in E, fiat ex ED, semisse aggregati extremarum, circulus ACD. Ex ipsa vero EB, semisse differentiae extremarum, fiat circulus FB. Dico armillam AFCD aequale esse circulo ex BC, tamquam semidiametro descripto. Juncta enim EC erit, ex XLVII Primi, et II Duodecimi, circulus ex EC aequalis duobus simul circulis ex EB, et ex BC, ob angulum rectum EBC. Dempto ergo communi circulo ex EB, remanebit armilla AFCD aequalis circulo ex BC, quod etc. »

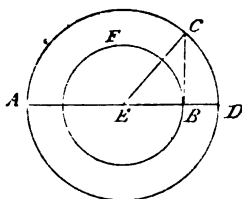



Figura 198.

« PROPOSIZIONE XXXIX. — *Si hyperbola, una cum asymptotis, circa axem proprium convertatur, erit solidum vasiforme, abscissum plano ad axem erecto, aequale cylindro, qui eamdem cum solido basim habeat, et eamdem altitudinem.* »

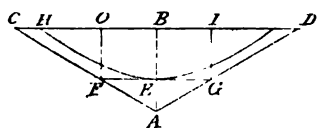



Figura 199.

« Sit hyperbola, cuius axis AB (fig. 199), asymptoti vero AC, AD, ipsa vero EF contingat sectionem in E, et convertatur figura circa AB. Supra circulo FG intelligatur cylindrus OFGI, et secetur solidum plano

quodcumque CD, ad axem erecto. Dico solidum, quod *Vasiformem hyperbolicum* appello, descriptum a revolutione quadrilinei CFEH, aequale esse cylindro FI, super eadem basi FG, et sub eadem altitudine EB. Quia nam, ex X Secundi Conicorum, in continua ratione sunt CH, FE, HD, erit armilla, quae fit ex revolutione lineae CH, aequalis circulo ex FE, hoc est ex OB, et hoc semper. Quare erunt omnes simul armillae, hoc est solidum Vasiforme hyperbolicum, aequales simul omnibus circulis, hoc est cylindro super eadem basi, et sub eadem altitudine, quod etc. »

« *Scholium.* — Ex hac propositione colligeretur mensura Conoidis hyperbolici. Notus enim est conus integer circumscriptus, prout conus, et notum solidum vasiforme ablatum aequale cylindro: quare reliquum etiam conoidis notum esset. »

« Item, centrum gravitatis eiusdem conoidis hyperbolici ex hac propositione educeretur. Centrum enim coni integri circumscripti notum est; centrum etiam solidi vasiformis in medio suo axe notum est. Item, centrum parvi coni FAG, quare notum esset centrum reliqui conoidis. »

« Sed institutum nostrum est solum poculum metiri, et reliqua magnis Geometris renuntiare. Nihil enim nostra interest, adveniente iam canicula, quantum ponderet ipsum poculum, sed quantum capiat. »

« Proposizione LX. — *Si hyperbola cum asymptoto convertatur circa axem coniugatum, erit solidum vasiforme, abscissum plano ad axem erecto, aequale cylindro, qui eamdem cum solido basim habeat, eamdemque altitudinem.* »

« Sit hyperbola AB (fig. 200), cuius axis coniugatus DC, asymptotus vero CE, et convertatur figura circa CD. Intelligatur super circulo AH cylindrus FAHG, et secetur solidum plano BI ad axem erectо. Dico solidum vasiforme, descriptum a quadrilineo BACE, aequale esse cylindro AG habenti basim AH, altitudinem vero CD. Erunt enim, per XI secundi Conicorum, in continua ratione BE, CA, EI. Quare, per Lemma I, erit armilla, descripta a linea BE, aequalis circulo ex CA, sive ex DF, et hoc semper. Quare erunt omnes simul armillae, hoc est solidum vasiforme, aequales omnibus simul circulis, hoc est cylindro AG, quod erat demonstrandum. »

Figura 200.

« *Scholium.* — Ex hac propositione totius solidi BAHI mensura, et centrum gravitatis daretur. Solidum enim vasiforme quantitate notum est: item inclusus conus ECK, ergo et totum solidum. »

« Solidi vero vasiformis centrum gravitatis est in medio suo axe: centrum autem intercepti coni ECK notum est; quare et totius compositi solidi centrum gravitatis daretur. Sed nihil hoc ad nos qui, sitiente Julio, solam calicis mensuram aextimamus. »

« *Lemma II.* — Si fuerint duae parabolae aequales circa communem axem AB (fig. 201), ducanturque ordinatim CD, EF, quarum CD sit per ver-

ticem inclusae parabolae, sed EF ubicumque, dummodo utranque parabolam secet; dico esse ut EG ad CD, ita CD ad GF. Ponatur enim AH latus rectum commune, et erit, ob parabolam, rectangulum HAB aequale quadrato BE. Si ergo ab aequalibus aequalia demas, nempe rectangulum sub AH, CB, ex rectangulo HAB, et quadratum BG ex quadrato BE, quae remanent aequalia erunt, nempe rectangulum HAC, sive quadratum CD, et rectangulum EGF. Quare erit ut EG ad CD, ita CD ad GF, q. e. d. »

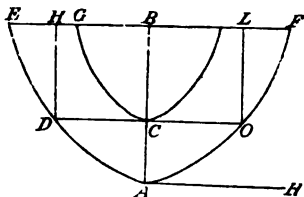



Figura 201.

« Proposizione XLI. — *Si fuerint duae parabolae aequales circa communem axem, et convertatur figura, erit solidum vasiforme descriptum aequale cylindro, eamdem basim cum solido, eamdemque altitudinem habenti.* »

« Sint circa communem axem AB, uti in praeced. figura, duae parabolae aequales DE, GC hoc est quarum latera recta sint aequalia, et ductis ordinatim CD, BE, quarum CD tangat inclusam parabolam, BE vero secet, convertatur figura circa axem AB. Dico solidum vasiforme, descriptum a quadrilineo EDCG, aequale esse cylindro, cuius basis sit circulus circa DO, altitudo vero CB. »

« Cum enim, per lemma praecedens, in continua ratione sint EG, DC, GF, erit, per lemma I, armilla, ex linea EG descripta, aequalis circulo ex DC, hoc est ex BH, et hoc semper. Ergo omnes simul armillae, hoc est solidum vasiforme parabolicum, aequales erunt omnibus simul circulis, hoc est cylindro HDOL, q. e. d. »

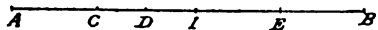
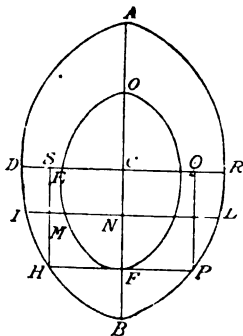



Figura 202.

« *Lemma III.* — Si recta linea AB (fig. 202) secetur inaequaliter bis in C et D, ponaturque BE aequalis ipsi CA; erit rectangulum ADB, partium scilicet minus inaequalium, aequale duobus simul rectangulis, nempe ACB, partium magis inaequalium, et rectangulo CDE sub intermediis sectionibus. »

« Secetur AB bifariam in I, et erunt aequales ipsae etiam IC, IE. Sed, cum rectangulum ADB, simul cum quadrato DI, aequale sit quadrato AI; item, rectangulum ACB, cum quadrato CI, eidem quadrato AI aequale sit; erunt rectangulum ADB, cum quadrato DI, aequalia rectangulo ACB cum quadrato CI. Commune auferatur quadratum DI, erit reliquum rectangulum ADB aequale reliquis duobus rectangulis ACB, et CDE. Si enim demas, ex quadralo CI, quadratum DI, spatium quod relinquitur est rectangulum CDE. Ergo constat propositum. »

Figura 203.

« *Lemma IV.* — Si fuerint circa communem axem AB (fig. 203), et circa idem contrum C, duo

ellipses similes, nempe ùt DC ad CE, ita BC ad CF; ordinatimque ducantur FH tangens, et IL secans inclusam ellipsim; dico ita esse IM ad HF, ut HF ad ML. »

« Est enim qùadratum IN, ad quadratum DC, ut rectangulum BNA, ad rectangulum BCA: hoc est, ùt quadratum BC. Sed DC quadratum, ad quadratum CE, est ut quadratum BC ad CF, et quadratùm CE, ad quadratum MN, est ut quadratum CF ad rectangulum ONF; quare ex aequo erit quadratum IN, ad quadratùm MN, ut rectangulum BNA, ad rectangulum FNO. »

« Iterum, quadratum idem IN, ad quadratum HF, est ut rectangulum idem BNA, ad rectangùlum BFA. Quare erit quadratum IN, ad duo simul quadrata MN, HF, ut rectangulùm BNA, ad duo simul rectangula FNO, BFA. Sed rectangulum BNA, per lemma praecedens, duobus dictis rectangulis aequale est; ergo et quadratum IN duobùs simul quadratis MN, HF aequale erit. Si ergo ab aeqùalibus commune auferas quadratum MN, reliqùum rectangulum IML aequale erit reliquo quadrato HF. Propterea patet propositum. »

« Proposizione XLII. — *Si fuerint circa communem axem CB, in eadem figura, et circa idem centrum C, duo ellipses similes, et convertatur figura circa axem; erit solidum vasiforme, factum a revolutione quadrilinei DHFE, aequale cylindro eamdem ipso basi, eamdemque altitudinem habenti.* »

« Intelligatur enim super basi HP cylindrus HQ, et planum DR ad axem erectum. Erunt itaque, per lemma praecedens, DE, HF, ER in continua ratione. Quare, per Lemma I, erit armilla ex DE descripta aequalis circulo ex HF, vel ex CS, et hoc semper. Quare erunt omnes simul armillae aequales omnibus simul circulis, nempe solidum vasiforme ellipticum aequale cylindro. »

« Proposizione XLIII. — *Si intra parallelogrammum rectangulum ABCD* (fig. 204) *sit quadrans ellipsis DB, et convertatur figura circa alterutrum vel AB vel AD; erit solidum vasiforme, factum a trilineo BDC,*
aequale cono CAH eamdem ipsi basim, eamdemque altitudinem habenti. »

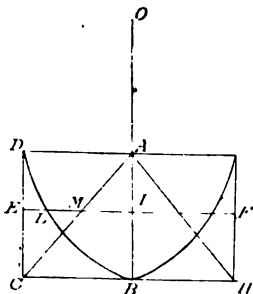



Figura 204.

« Agatur enim planum EF ad axem erectum, ponaturque BO axis integrae ellipsis. Quadratum EI, vel DA, ad quadratum LI, est ut quadratum BA, ad rectangulum BIO. Quadratum iterum EI, vel CB. ad quadratum MI, est ut quadratum BA, ad quadratum IA. Quare erit idem quadratum EI, ad duo simul quadrata LI, MI, ut quadratum BA, ad duo simul spatia: rectangulum scilicet BIO et quadratum IA. Sed quadratum BA aequale est dictis duobus spatiis, ergo et quadratum EI aequale erit duobus quadratis LI, MI. Dempto autem communi quadrato LI, erit reliquum rectangulum ELF aequale quadrato MI. Constat igitur, per Lemma I, armil-

lam, a linea EL dascriptam, aequalem esse circulo ex MI, et hoc semper. Propterea erunt omnes simul armillae aequales omnibus simul circulis, nempe solidum vasiforme aequale cono, quod etc. »

« *Scholium.* — Hinc deduci posset sphaeroidem ut sphaeram circumscripti sibi cylindri sexquialteram esse. Centrum etiam gravitatis, quod in hemisphaerio et portionibus sphaerae reperit Lucas Valerius, eodem progressu erueretur in hemisphaeroide, eiusque portionibus. Sed tanti non est minuta haec omnia prosequi ut inceptum poculum deseramus. »

Figura 205.

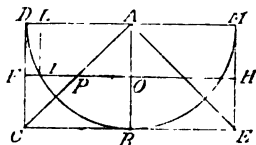
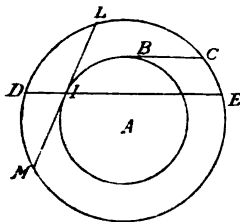
« Proposizione XLIV. — *Si fuerit in quadrato ABCD* (fig. 205) *quadrans circuli DB, et convertatur figura circa AB; erit solidum vasiforme, descriptum a trilineo BDC, aequale cono CAE eamdem ipsi basim, eamdemque altitudinem habenti.* »

« Agatur enim planum FH ad axem erectum, et ducatur IL parallela ad AB. Erit igitur rectangulum FIH, hoc est DLM, aequale quadrato LI, propter circulum, sive quadrato AO, sive OP, et per Lemma I erit armilla, a linea FI descripta, aequalis circulo ex OP, et hoc semper. Propterea erunt omnes armillae simul aequales omnibus simul circulis, nempe solidum vasiforme aequale cono praedicto, quod erat etc. »

Figura 206.

« *Scholium.* — Lucas Valerius, Galileus et alii demonstrant hanc eamdem propositionem. Nos, quia facit ad rem nostram, illam desumpsimus nostroque modo demonstravimus. »

« *Lemma V.* — Si fuerint circa idem centrum A (fig. 206) duo circuli, et BC tangat inclusam peripheriam, DE vero secet; dico esse, ut DI ad BC, ita BC ad IE. »

« Ducatur enim altera tangens ML per punctum I: eruntque aequales inter se MI, IL, BC, cum circuli sint concentrici. Erit igitur rectangulum DIE aequale rectangulo MIL, secant enim se intra circulum, hoc est quadrato MI, sive BC. Quare constat propositum. »

« Proposizione XLV. — *Si fuerint circa idem centrum A* (fig. 207) *duo circuli, et ductis BC, DE parallelis, ipsa BC tangat interiorem peripheriam, ipsa vero DE secet, et circa CE axem convertatur figura; dico salidum vasiforme, quod a quadrilineo DBCF describitur, aequale esse cylindro eamdem ipsi basim, eamdemque altitudinem habenti.* »

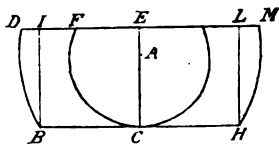



Figura 207.

« Concipiatur enim cylindrus, uti dictum est, IBHL: et quia, per Lemma praecedens, sunt in continua ratione DF, BC, FM, erit, per Lemma I, armilla, descripta a linea DF, aequalis circulo ex BC, sive ex EI, et hoc semper. Propterea erunt

omnes simul armillae aequales omnibus simul circulis, hoc est solidum vasiforme sphaericum aequale cylindro praedicto, quod etc. » (MSS. Gal. Disc., T. XXX, fol. 18-25).

VIII.

Il trattatello elegante della stereometria e della baricentrica dei solidi vasiformi, di cui abbiamo dal manoscritto torricelliano scelto i teoremi principali, s' incontrava in qualche parte nelle medesime cose dimostrate da altri, come dal Commandino, dal Valerio e dal Galileo; ma il Torricelli faceva notare che le sue dimostrazioni procedevano in modo nuovo, e che si facevano derivare da principii più generali, comprendenti in una somma unità i vari casi particolari. Si compiaceva di ciò molto a ragione il Nostro, perchè il merito della novità non consisteva semplicemente nel compendiare, o nel ridurre a maggior facilità le cose da trattarsi, ma nel premostrare ai Matematici quel vigore potente, che si verrebbe a infondere nella Scienza dal libero uso dell' analisi, applicata al Metodo degli indivisibili in quel che si chiamerebbe poi Calcolo differenziale. Un esempio di ciò l' aveva lo stesso Torricelli dato a proposito del centro di gravità nella sfera, comunque ella venisse ridotta o in segmenti o in frusti, e lo udimmo poco fa quasi compassionare il Valerio, per non essersi accorto che la fatica del ritessere tante volte il viaggio potevasi risparmiare movendo a dirittura dal suo primo principio. Un altro simile incomodo, di divagar nei particolari senz' aver riconosciuta la generalità, nella quale potevano tutti esser compresi, ebbe a notarla nell' argomento del centro di gravità dei solidi conoidali, intorno a che il Valerio e Galileo avevano sudato tanto, per dimostrare alcune proposizioni, rimaste ne' loro libri come membra sparse e inerti, perchè non ricongiunte a quel principio, che avrebbe dovuto in esse far refluire la vita.

Nel numero dei Problemi, proposti e passati scambievolmente tra i matematici di Francia, il Torricelli racconta di aver messo anche questo: « Se sarà il solido CFAHD (fig. 208), nato dalla rivoluzione di una sezione conica, o sia perabola o iperbola o porzione di circolo, ovvero di ellisse, e sia tirato il piano FH parallelo alla base CD, e che seghi per mezzo l' asse nel punto E; chiameremo il cerchio FH media sezione, e intorno a ciò si dimostrarono e si proposero i due teoremi seguenti: I. Il solido predetto, al suo cono inscritto, sarà come una sua base, con quattro medie sezioni, e due sue basi. II. Ma facendosi come una base, con due medie sezioni, a due medie sezioni, così la retta AO alla OB; sarà il punto O centro di gravità di quel tale solido. »

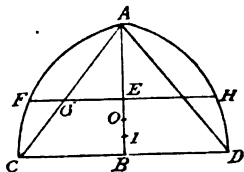



Figura 208.

« Nella prima di queste due enunciazioni sta compendiata una gran

parte delle dottrine di Archimede, cioè la sostanza principale delli libri *De sphaera et cylindro,* et *De sphaer. et conoidibus:* nella seconda poi sta grandissima parte della dottrina di Luca Valerio, del Commandino e del Galileo, i quali, con numero grandissimo di proposizioni, hanno cercato i centri di gravità nei solidi delle sezioni coniche, i quali da noi in una sola proposizione sono stati ristretti. L'uno e l'altro dei predetti teoremi si dimostra con una sola dimostrazione. La proposta fu lodata in Francia, ma non già sciolta, ed io qualche anno dopo conferii la dimostrazione con gli amici d'Italia » (MSS. Gal. Disc., T. XXXII, fol. 25). Uno de' qùali amici, e de' primi, dee essere stato il Michelini, a cui, il dì 3 Febbraio 1642, annunziava, insieme col teorema centrobarico generale del Guldin, anche i due sopra narrati, chiamandoli *nuovi preconizzati dal miracoloso fra Bonaventura:* e in che modo s' avverasse il preconio lo diranno i seguenti tratti di storia.

Riuscito a quella inaspettata trasformazione del solido descritto dal bilineo (nato in un segmento di circolo, a cui sia stato inscritto un triangolo), in una certa sferoide, come si vide in principio del paragrafo VI del presente capitolo; il Torricelli presentì che forse le medesime cose s' avveravano qualunque fosse la sezione conica generatrice del solido rotondo, come infatti poi dimostrò aiutandosi di questo lemma: « Se in una sezione conica qualunque linea AB (fig. 209), terminata da ambe le parti nella sezione, segherà due linee rette parallele CD, EF, terminanti parimente nella sezione; il rettangolo CGD, al rettangolo EHF, sarà come il rettangolo AGB al rettangolo AHB » (ivi, T. XL, fol. 26).

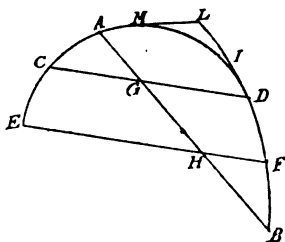



Figura 209.

Per la dimostrazione si cita il libro archimedeo *De conoid. et sphaer.*, dalle proposizioni XIII, XIV e XV del quale resulta che, condotta la tangente IL, parallela ad AB, e la ML parallela ad EF, i rettangoli CGD, EHF, e parimente i rettangoli AGB, AHB stanno come i quadrati ML, LI: d'onde immediatamente si conclude il proposito, che cioè quegli stessi quattro rettangoli sono in proporzione fra loro. Dietro ciò passava così il Torricelli a proporre, e a dimostrare il divinato teorema:

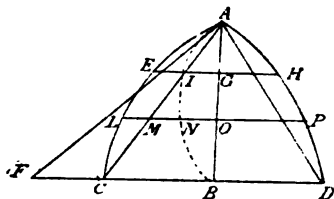



Figura 210.

« Sia una sezione di cono, il cui asse AB (fig. 210), triangolo inscritto CAD, e girisi la figura: dico che il residuo del solido, levatone il cono inscritto, sarà uguale ad una tale sferoide, il cui asse sia AB. »

« Sia il quadrato FB doppio al quadrato BC, e congiunta AF seghi la sezione in E, ed applicata EG facciasi, per li punti A, I, B, una ellisse intorno all' asse AB, e girisi. Intendasi poi la figura segata con un piano LP

parallelo alla base. Essendo ora il quadrato FB doppio del BC, sarà EG doppio del GI, e però il rettangolo EIH eguale al quadrato IG, e però l'armilla EI eguale al cerchio IG. Ma l'armilla LM, all'armilla EI, sta come il rettangolo LMP al rettangolo EIH, ovvero, per il lemma precedente, come il rettangolo CMA al rettangolo CIA, cioè, come il rettangolo BOA al rettangolo BGA, cioè come il quadrato ON al quadrato GI. Ma i conseguenti sono uguali, però anche gli antecedenti, cioè l'armilla LM sarà uguale al cerchio ON, et sic semper, ergo patet propositum » (ivi).

Così, il conoide si veniva a risolvere in due figure, delle quali era nota la stereometria, e si poteva con gran facilità, componendo, ricavarne la proporzione di tutto il solido a una delle sue parti componenti, come per esempio al cono inscritto, intorno a che il Torricelli si proponeva di dimostrare: « Se sarà una porzione di sfera o sferoide, ovvero conoide parabolico, oppure iperbolico, di cui asse sia AB (nella figura 208 qui poco addietro) e cono inscritto CAD, e dal mezzo dell'asse sia applicata la EF; dico che tutto il solido al cono sta come il quadrato FE, col quadrato EG, al doppio del quadrato EG » (ivi).

Per la dimostrazione supponesi un lemma, taciuto dall'Autore per alcune ragioni, che appariranno in seguito da questa intima storia svelate, ma intanto quel lemma è tale: *La sferoide è doppia del rombo solido inscritto*, verità, che si conclude per corollario immediato dalla XXIX archimedea *De conoid. et sphaer.*, semplicemente osservando che, se le due emisferoidi sono uguali ciascuna al doppio del cono inscritto, sarà la sferoide intera uguale al doppio del rombo solido, composto di quegli stessi due coni, la misura dei quali essendo $AB \cdot \frac{\pi GE^2}{3} = \frac{AB \cdot \pi FG \cdot GH}{3}$, sarà perciò $\frac{AB \cdot 2\pi \cdot FG \cdot GH}{3}$ la misura della sferoide o del bilineo, che chiameremo B^0, tra il quale e C^0, che vuol dire il cono CAD inscritto e misurato da $\frac{AB \cdot \pi CB^2}{3}$; intercederà la proporzione $B^0 : C^0 = 2 FG \cdot GH : CB^2$, la quale, per essere $CB = 2 EG$, e perciò $CB^2 = 4 EG$, sostituendo, *et sumptis dimidiis,* si trasformerà in quest' altra $B^0 : C^0 = FG \cdot GH : 2 EG^2$. Poi, componendo, e osservando che il bilineo insieme col cono compongono tutto il solido S^0, avremo $S^0 : C^0 = FG \cdot GH + 2 EG^2 : 2 EG^2$. Sostituendo in fine, in luogo del rettangolo, la differenza de'quadrati espressa da $FE^2 - EG^2$, avremo $S^0 : C^0 = FE^2 + EG^2 : 2 ES^2$, come concisamente viene il Torricelli a dimostrare così, col suo proprio discorso:

« Il solido descritto dal bilineo CFA già è uguale ad una sferoide, il cui asse sia BA, ed il cui massimo cerchio sia uguale all'armilla FG, ovvero, risolvendo la sferoide in cono, è uguale ad un cono, la cui altezza sia BA, ed il quadrato del semidiametro della base fosse due rettangoli FG . GH, perchè allora la base del cono sarà doppia dell'armilla FG, e però doppia del massimo cerchio della sferoide. Dunque il solido del detto bilineo CFA, al cono inscritto, sta come due rettangoli FG . GH al quadrato CB, cioè a

quattro quadrati EG: ovvero *sumptis dimidiis,* come il rettangolo FGH a due quadrati GE. *Et componendo patet propositum* » (ivi).

Nel *Racconto* dei problemi proposti ai Matematici francesi udimmo dianzi il teorema formulato dal Torricelli in altra maniera, alla quale è facile ridurre questa, ora espressa dalla relazione $S^o : C^o = FE^2 + EG^2 : 2\,EG^2$, perch' essendo $EG = \frac{CB}{2}$, sostituendo, e moltiplicando per π, avremo $S^o : C^o = \pi\,FE^2 + \frac{\pi\,CB^2}{4} : \frac{CB^2}{2} = \pi\,CB^2 + 4\,\pi\,FE^2 : 2\,\pi\,CB^2$, che vuol dire appunto, rammemorandoci che la FE sega l' asse nel mezzo, stare il solido al cono inscritto come una sua base, con quattro medie sezioni, a due basi.

Udimmo pure, in quel Racconto, il Torricelli compiacersi di avere in questo suo teorema compendiata una gran parte delle dottrine di Archimede, per conferma di che, specialmente contro i dubitanti della verità delle conclusioni, alle quali conduceva il metodo del Cavalieri; faceva notare come il detto teorema universalissimo, applicato ai vari casi particolari, concordava con le proposizioni dimostrate ne' libri *De sphaera et cylindro,* e *De conoid. et sphaeralibus.*

« Esto conoides parabolicum CFAHD (nella medesima figura 298), conus inscriptus CAD, axis AB sectus bifariam in E, et applicata EF. Dixi conoides ad conum esse ut duo quadrata ex EF, EG, ad duplum quadrati EG, ut ostensum est. Dico convenire cum Archimedis XXIII *De con. et spaer.* Ponatur enim quadratum EF esse ut duo: erit AD ut quatuor, et ideo EG ut unum. Quare, componendo sumptisque consequentium duplis, erit quadratum FE, cum quadrato EG, ad duo quadrata ex EG, ut 3 ad duo. »

« *Che la proposizione universalissima concordi con quella della Sfera, et con la XXIX De con. et spaer.:* Sit hemisphaerium, vel hemisphaeroides ABC (fig. 211), conus inscriptus ABC, axis BD sectus sit bifariam in E, et applicata EF. Dixi hemisphaerium ad conum inscriptum esse ut duo quadrata ex FE et ex EG, ad duplum quadrati EG. Probo convenire cum Archimede. Esto axis integer BH, ponaturque quadratum FE esse 3. Quadratum FE, ad quadratum AD, est ut rectangulum BFH, ad rectangulum, BDH, nempe ut 3 ad 4. Quadratum vero AD ad EG est ut 4 ad 1. Ergo ex aequo quadratum FE, ad EG, est ut 3 ad 1. Ergo, componendo, sumptisque consequentium duplis, patet duo quadrata FE, EG, ad duo quadrata EG, esse ut 4 ad 2 » (MSS. Gal. Disc., T. XXX, fol. 184).

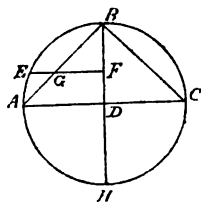



Figura 211.

Soggiunse il Torricelli a queste due un' altra Nota, per provar *che la dimostrazione universalissima, nel conoide iperbolico e nella porzion di sferoide, concordi con la volgata di Archimede XXVII e XXXI De conoid. et sphaer.* (ivi). Rappresenti AIBC (fig. 212) una delle iperbole, l' asse DB della quale sia prolungato infino a incontrare in E il vertice dell' altra iperbola. Sia L il centro, ed EO uguale ad EL, cosicchè insomma sia BO ses-

quialtera della BE, ossia quella stia a questa come tre a due. Chiamato S il solido, C il cono inscritto, dimostra nella detta XXVII Archimede che $S^o : C^o = OD : DE$.

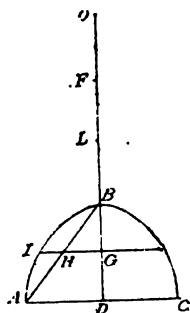



Figura 212.

Rappresenti in simil guisa AIBC (figura 213) una porzion di sferoide, l'asse BE della quale sia prolungato in fin tanto che, giunto in O, la BO non sia, come dianzi, sesquialtera della BE. Dimostra Archimede, nella XXXI del libro citato, che il solido al cono « hanc habet rationem, quam linea composita ex dimidio axe sphaeroidis, et ex axe maioris portionis, habet ad axem maioris portionis » (Opera cit., pag. 322), ossia si dimostra $S^o : C^o = \frac{BE}{2} + ED : ED$. Ma è facile vedere ch'essendo per supposizione $OB = {}^3/_2\, BE$, $OD = OB - BD = OB - BE + ED = {}^3/_2\, BE - BE + ED = \frac{BE}{2} + ED$: onde in ambedue i casi bastò al Torricelli di dimostrar che la proporzione $S^o : C^o = OD : DE$ di Archimede concordava con la sua, come egli fece così scrivendo:

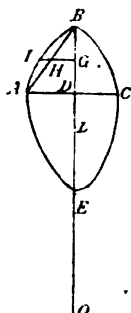



Figura 213.

« Abbiamo provato che il solido tutto, al cono inscritto, sta come i due quadrati insieme IG, GH al doppio del quadrato GH. Mostrerò ora che li due quadrati IG, GH, al doppio del quadrato GH, sono come la OD alla DE, presa OB sesquialtera di BE. »

« Il quadrato IG, al quadrato AD, sta come il rettangolo EGB al rettangolo EDB, *et sumptis consequentium subquadruplis,* il quadrato IG, al quadrato GH, sta come il rettangolo EGB al rettangolo LGB, ovvero come la retta EG alla GL. E, componendo, il quadrato IG, con il quadrato GH, al quadrato GH, sta come EG con GL alla GL, cioè come OD alla GL. *Et sumptis consequentium duplis,* il quadrato IG, col quadrato GH, al doppio del quadrato GH, sta come la retta OD alla DE, q. e. d. (ivi, fol. 186).

La principale intenzione del Torricelli però era quella di applicare così fatte questioni stereometriche alla Baricentrica, ciò che, ritornando al primo proposito e alla rappresentazione di lui nella figura 208, si conseguirà col dire che, costituitosi sopra l'asse un punto O, in modo che sia $BO : OE = FE^2 : GE^2$, sarebbe in quello stesso punto O il centro di gravità del tutto. « Iisdem positis dico, si fiat ut quadratum FE, ad quadratum EG, ita BO ad OE; dico, inquam, O esse centrum gravitatis totius solidi. »

« Secetur BE bifariam in I: eritque I centrum gravitatis coni inscripti. Centrum autem reliqui solidi, dempto cono, est in medio axe, quandoquidem demonstratum est singulas eiusdem solidi armillas aequales esse singulis circulis unius sphaeroidis, circa axem AB constitutae. »

« Jam BO ad OE est ut quadratum FE ad quadratum EG. Et, com-

ponendo, erit BE ad EO ut quadrata FE, EG, ad quadratum EG, vel ut duo quadrata FE, cum duobus EG, ad duo quadrata EG. Sumptisque antecedentium dimidiis, erit IE ad EO ut quadratum FE, cum quadrato EG, ad duo quadrata EG: nempe ut totum solidum ad conum inscriptum. Puncta vero I, E sunt centra partium, ergo O erit centrum totius » (ivi, T. XL, fol. 27).

Nel Racconto de' problemi ai Francesi era questo teorema, come si rammenteranno i Lettori, formulato altrimenti, ond'è che, a mostrarne la concordanza, il Torricelli stesso così ragionava: « Esto BE ad OE ut quadratum FE ad EG. Ergo, componendo, BE ad EO erit ut quadrata FE, EG ad quadratum EG. Convertendo, OE ad EA ut quadratum EG ad duo quadrata FE, EG. Et, componendo, AO ad AE ut quadrata EG, FE, EG ad duo quadrata FE, EG. Sumptis vero consequentium duplis, erit OA ad AB ut quadrata EG, EG, FE ad quadrata EG, EG; FE, FE. Et convertendo erit BA ad AO ut quadrata EG, EG; FE, FE, ad quadrata EG, EG; FE » (ivi, T. XXXVI, fol. 219), ossia, facendo uso dei segni analitici, $BA : AO = 2\,GE^2 + 2\,FE^2 : 2\,EG^2 + FE^2$. Dividendo, riducendo e trasponendo, $AO : BO = 2\,EG^2 + FE^2 : FE^2 = 4\pi\,EG^2 + 2\pi\,FE^2 : 2\pi\,FE^2 = \pi\,CB^2 + 2\pi\,FE^2 : 2\pi\,FE$. Alla qual riduzione accennava così lo stesso Torricelli: « Nota che AO ad OB sta come quattro quadrati EG, con due quadrati FE, a due quadrati FE: ovvero, come il quadrato CB, con due quadrati FE, a due quadrati FE: cioè, ed è il mio intento, come un cerchio CD, con due FH, a due FH » (ivi): a seconda del quale intento aveva stabilito di formulare così quella che, dopo le altre da noi scritte, era in ordine la

« PROPOSIZIONE XLVI. — *Centrum gravitatis cuiuscumque conoidalis, verticem habentis, dividit axem solidi, ita ut pars ad verticem terminata, ad reliquam, sit ut basis solidi, cum duobus circulis qui axem bifariam secant, ad duos circulos, qui axem bifariam secant* » (ivi, T. XXV, fol. 58).

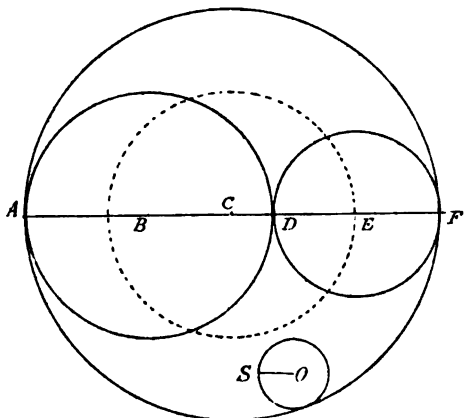
Essendo dunque AB l'asse del conoide, con l'una estremità A al vertice, e con l'altra B alla base, e chiamato B il circolo di essa base, S quello della media sezione, il punto O, dove riesce il centro di gravità del solido, sarà indicato dalla relazione $\frac{AO}{BO} = \frac{B + 2\,S}{2\,S}$. Con ciò poneva il Torricelli il fondamento alla nuova baricentrica dei conoidei, ai progressi della quale gli soccorreva opportuna un'altra proposizione stereometrica, suggeritagli da Michelangiolo Ricci. Gli scriveva questi da Roma una lettera, nel dì 16 Gennaio 1644, per descrivergli il modo com'aveva dimostrato che un frusto conico, toltine due coni appuntati insieme sull'asse, fosse uguale a un terzo cono, che avesse per base la superficie laterale involgente il solido intero, e per altezza la perpendicolare, condotta dal vertice comune ai due detti coni sopra uno degli apotemi del frusto. Nel processo della dimostrazione s'invoca più volte un teorema, non con altro segno indicato che di un asterisco, intorno al quale teorema il Ricci stesso così si dichiarava: « Devo solo avvertire V. S. che, dove vedrà questo asterisco, denota il bisogno di una proposizione, che mi trovo aver dimostrata in tre maniere, della quale feci

a V. S. un cenno questa Pasqua passata: cioè che il frusto conico è uguale a tre coni, che abbiano la medesima altezza del frusto, ma che due basi siano le medesime che del frusto, e l'altra del terzo cono sia media proporzionale tra quelle » (ivi, T. XLII, fol. 3).

In un'altra lettera, scritta pur da Roma il dì 18 Giugno di quel medesimo anno, nella quale il Ricci stesso trascriveva una sua proposizione intorno ai frusti parabolici, iperbolici, etc., come si vedrà meglio altrove; diceva al Torricelli di essersi valuto di quel medesimo teorema, in cui risolveva lo stesso frusto in tre coni, ma non resulta, nè di qui, nè da altre carte caduteci sott'occhio, che ne comunicasse la dimostrazione all'amico, il quale ebbe a ritrovarla da sè, senz'alcuna difficoltà, aiutandosi dei due lemmi seguenti:

« *Lemma I.* — Si a circulo duo circuli demantur, ita ut duo diametri simul demptorum circulorum totam alterius circuli diametrum exaequent; erit reliqua perforata lunula, ad assumptum circulum quemlibet, ut semissis rectanguli, sub diametris demptorum circulorum contenti, ad quadratum radii assumpti circuli. »

Figura 214.

« Esto etc. et sint centra totius circuli C, demptorum B et E (fig. 214), et intelligatur primo demptus solum circulus AD: eritque reliqua integra lunula aequalis armillae unius rectanguli FEA. Erit ergo integra lunula, ad circulum FD, ut rectangulum FEA, sive DEA, ad quadratum DE. Et, dividendo, lunula perforata, ad eumdem circulum DF, erit ut rectangulum EDA ad quadratum DE. Circulus vero DF, ad circulum OS, est ut quadratum DE ad quadratum OS: ergo ex aequo patet propositum. Nam lunula perforata erit ad circulum OS ut rectangulum EDA, nempe, ut semissis rectanguli FDA, sub diametris demptorum circulorum contenti, ad quadratum OS » (ivi, T. XXXVI, fol. 47).

Per intelligenza della qual dimostrazione, al solito tirata giù dal Torricelli più per suo memoriale, che per esser veduta da altri in quell'abito trasparentissimo, ma negletto, discorreremo così, facendo uso del linguaggio, e dei segni dei Matematici odierni: Abbiamo per costruzione $AB + DE = AC$, onde $DE = AC - AB = BC$. Chiamata L la lunula, sarà $L = \pi\, AC^2 - \pi\, AB^2 = \pi\, (AC + AB)\, (AC - AB)$. Ma $AC + AB = AB + BC + AB = AB + BC + BD = AB + BD + DE = AE$. Quanto all'altro coefficiente, $AC - AB = DE = EF$, dunque $L = \pi\, AE \,.\, EF$. Ma anche l'armilla $EF = \pi\, CF^2 - \pi\, CE^2 = \pi\, (CF + CE)\, (CF - CE) =$

π AE . EF ; dunque *lunula integra est aequalis armillae unius rectanguli AEF,* come l'Autore dianzi diceva.

Chiamato C il circolo dal diametro FD, ed L al solito la lunula, avremo dunque $L : C = AE . EF : DE^2$. Dividendo, sarà $L - C : C = AE . EF - DE^2 : DE^2 = AE . ED - DE^2 : DE^2 = ED\ (AE - DE) : DE^2 = ED . DA : DE^2$. Chiamisi ora C' un altro circulo qualunque, di raggio OS: avremo $C' : C = OS^2 : DE^2$, e di qui $L - C : C' = ED . DA : CB^2$, e sostituito $DE = \frac{DF}{2}$, $L - C : C' = \frac{FD . DA}{2} : OS^2$. Ma L — C rappresenta la lunula perforata dal circolo DF, e C' il circolo assunto, dunque si conferma di qui la verità del lemma torricelliano.

« *Lemma II.* — Perforatae lunulae, quales ante dicebamus, sunt inter se ut rectangula sub diametris demptorum circulorum contenta. »

« Esto etc.: erit ergo lunula perforata AMP (fig. 215), ad circulum FH, ut rectangulum ABC ad quadratum FI. Sed circulus FH, ad lunulam perforatam EOR, est ut quadratum FI ad rectangulum EFI; ergo ex aequo lunula perforata AMP, ad lunulam perforatam EOR, est ut rectangulum ABC ad rectangulum EFI, sive, sumptis duplis, ut rectangulum ABD ad rectangulum EFH » (ibid.).

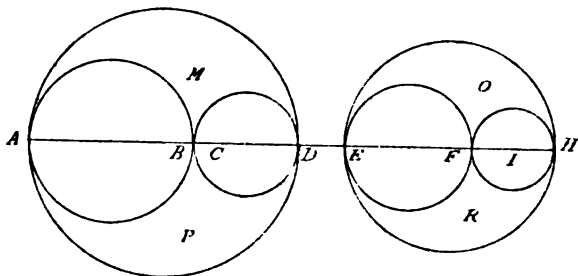
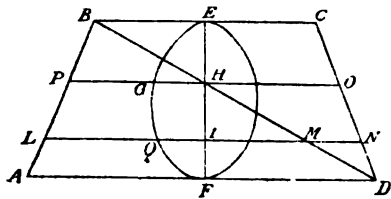



Figura 215.

Premessi i quali due lemmi, passa il Torricelli a dimostrare, in una sua prima proposizione, che, tolti dal frusto conico i due coni designati dal Ricci, quel che riman del solido uguaglia una sferoide, la quale dimostra, in un'altra proposizione, risolversi in quel terzo cono, dallo stesso Ricci designato per medio proporzionale tra gli altri due.

Figura 216.

Proposizione prima. — « Si a segmento conico demantur duo coni, aeque alti cum segmento, et super utraque ipsius basi constituti, reliquum solidum erit aequale sphaeroidi cuidam, eamdem cum segmento conico altitudinem habenti. »

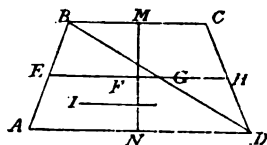
« Esto segmentum coni ABCD (fig. 216), cuius axis EF, et ab ipso demantur duo coni ABD, BDC, etc. Ponatur quadratum PH duplum quadrati GH, et per PO intelligatur planum oppositis basibus parallelum: eritque lunula perforata PO, demptis circulis PH, HO, aequalis circulo, cuius radius GH, ob constructionem, et ex demonstratis » (ibid., fol. 48).

La lunula PO infatti, perforata da circoli uguali, che hanno per diametro ciascuno la metà di PO, ossia PH, ovvero OH, chiamata al solito L, sarà uguale a $\pi PH^2 - \frac{\pi PH^2}{4} - \frac{\pi OH^2}{4} = \frac{\pi PH^2}{2}$. Ma perchè si è fatto $PH^2 = 2 GH^2$, sarà dunque $L = \frac{\pi PH^2}{2} = \pi GH^2$, e perciò sarà la lunula uguale a un circolo, che abbia per raggio GH, come dice l'Autore.

Ora è chiaro che, riguardando il proposto frusto conico come compaginato d'infiniti circoli eretti all'asse, verrà il solido dai due coni ABD, BDC terebrato in modo, che di ciascun di que' circoli riman solo una lunula perforata, ciascuna delle quali dimostra il Torricelli equivalere al circolo della sferoide, descritta da una semiellisse, che passi per i punti E, G, F, e che si rivolga intorno alla EF, come a suo proprio asse.

Sia, fra quegli infiniti circoli, in che si assomma il frusto, considerata la sezione LN. È facile dimostrare che la lunula perforata è uguale al circolo dell'ellissoide, descritto dal raggio IQ intorno all'asse. Sarà infatti, per il secondo lemma, significando la lunula col solito simbolo *L*, $L . PN : L . PO = LM . MN : PH . HO$. Ma, per ragion delle parallele LN . PO, abbiamo le due proporzioni $LM : PH = EI : EH$; $MN : HO = IF : FH$, le quali, moltiplicate termine per termine, danno $LM . MN : PH . HO = EI . IF : EH . HF$; ond'è che $L . LN : L . PO = EI . IF : EH . HF$. Ma, per la natura dell'ellisse, $EI . IF = IQ^2$, $EH . HF = GH^2$; dunque $L . LN : L . PO = \pi IQ^2 : \pi GH^2$. Ora è per supposizione $L . PO = \pi GH^2$, dunque anche $L . LN = \pi IQ^2$, e ciò a qualunque punto sia fatta la sezione LN, cosicchè sempre la lunula perforata sarà uguale al circolo, e perciò tutte le lunule perforate comporranno un solido uguale all'ellissoide intera, come nel suo manoscritto il Torricelli stesso dimostra con queste parole:

« Fiat per puncta EGF ellipsis circa axem EF, et convertatur, sectoque segmento per planum LN, basibus parallelum, erit lunula perforata LN, ad lunulam perforatam PO, ut rectangulum LMN ad rectangulum PHO, nempe rationem compositam habebit ex rationibus LM ad PH, et MN ad HO, sive ex rationibus IE ad EH, et IF ad FH, quae sunt aeedem cum praedictis. Ergo perforata lunula LN, ad perforatam lunulam PO, erit ut rectangulum FIE ad rectangulum FHE, sive, ut circulus ex IQ, ad circulum ex HG. Consequentia vero ex constructione sunt aequalia, quare et lunula perforata LN aequalis erit circulo ex IQ, et hoc semper. Quare patet propositum » (ibid.).

Figura 217.

Proposizione seconda. — « Dico huiusmodi sphaerois medio loco proportionalis esse inter ablatos conos. »

« Secetur axis MN (fig. 217) bifariam in F, ab applicata EH: eritque perforata lunula EH aequalis maximo circulo praedictae sphaeroidis. Sit quadratum I aequale rectangulo EGH, eritque circulus, cuius radius I, ad lunulam perforatam HE,

ut quadratum I ad semissem rectanguli EGH, nempe duplus. Propterea conus, cuius radius basis sit I, altitudo vero MN, aequalis erit sphaeroidi, sive reliquo segmenti conici, demptis duobus conis » (ibid.).

Sia dunque, come vuole il Torricelli, $I^2 = EG \cdot GH$. Avremo per il lemma primo, significati con C il circolo, e con L la lùnula, $C \cdot I : L \cdot EH = I^2 : \frac{EG \cdot GH}{2}$, che vuol dire il circolo esser doppio della lunula, e perciò il cono, la base del quale abbia per raggio I, con l' altezza MN, sarà, per facile corollario dalla XXIX archimedea *De conoid. et sphaer.*, uguale alla sferoide.

È il presente proposito quello di dimostrare che una tale sferoide, o il cono a lei equivalente, è medio proporzionale fra i due coni ABD, BDC, levati dal frusto, i quali coni, per avere altezza uguale, stanno come i quadrati de' raggi delle basi, ossia come AN^2 a BM^2. Ma anche il terzo cono, a cui s' è detto uguagliarsi la sferoide, ha la medesima altezza degli altri due; dunque tutto si riduce a dimostrare che il quadrato del raggio I, ossia il rettangolo $EG \cdot GH$ è medio proporzionale tra AN^2 e BM^2, ciò che si può fare in questa maniera: Abbiamo, per ragion delle parallele, $NF : FM = AE : EB$. Componendo, $NF + FM : FM = AE + EB : EB$, ossia $NM : FM = AB : EB$. Ma $NM = 2\,FM$, dunque $AB = 2\,EB$, e perciò $AD = 2\,EG$, ossia $AN = EG$, come, per le medesime ragioni, $GH = BM$. Ora $EG : GH = EG^2 : EG \cdot GH = EG \cdot GH : GH^2$, per cui, sostituendo AN^2 ad EG^2, se ne concluderà il proposito, come il Torricelli stesso lo conclude con questo discorso:

« Conum autem praedictum I medium proportionalem esse inter ABD, BDC, patet. Nam, cum rectangulum EGH medium sit inter quadratum AN, BM, etiam quadratum I medium erit inter eadem. Et propterea conus I, sive sphaerois illa media proportionalis erit inter demptos conos. Erit enim, ob parallelas, ut NF ad FM, ita AE ad EB. Et componendo etc. Sed NM dupla est MF; ergo AB dupla est BE, et propterea AD dupla EG. Quare AN et EG sunt aequales, et GH, BM sunt aequales. Quadratum vero EG, ad rectangulum EGG, est ut EG ad GH, et rectangulum EGH, ad quadratum GH, est ut EG ad GH. Quare patet propositum » (ibid.).

Così dimostrava il Torricelli, con la fecondità del suo proprio ingegno, in una maniera forse diversa da quelle tre usate dal Ricci, la risoluzione del frusto conico in tre coni di altezze uguali. Se non che al terzo cono di mezzo sostituiva una sferoide, perchè l' intento suo principale era quello di trasporre la bella proposizione, dal campo della Stereometria pura, dove lo stesso Ricci l' aveva lasciata, in quello della Baricentrica. Riducendosi infatti il centro di gravità di essa sferoide nel mezzo dell' asse, si venivano a render più semplici, nella libbra gravata delle parti, nelle quali era il solido risoluto, le ragioni delle equiponderanze.

Venne al nostro Autore l' occasione di far ciò, essendo intorno a esaminare le proposizioni galileiane *De centro gravitatis*, alcuna delle quali essen-

dosi da lui sospettata per falsa, volle d' altre confermare la verità, in chi ne avesse dubitato, per averle forse trovate di non facile intelligenza. Tale parve la X, nella quale, premesso un lemma geometrico, Galileo dimostrava che, nel frusto di un cono o di una piramide, il centro di gravità sega talmente l' asse, che la parte verso la base minore stia all' altra, « ut tripla minoris basis, cum spatio duplo medii geometrici inter basin maiorem et minorem, una cum basi minori; ad triplam minoris basis eum eodem duplo spatii medii, ac una cum basi maiori » (Alb. XIII, 286). O altrimenti, rappresentandosi dalla figura 218 il frusto proposto, con l' asse EF parallelo alla libbra AL, e significandosi con B la maggior base AD, con B′ la minore BC, e con B″ una media proporzionale fra ambedue; vuol Galileo dimostrare che il centro Q dell' equilibrio è indicato dalla relazione $\frac{QL}{AQ}=\frac{3B+B'+2B''}{B+3B'+2B''}$.

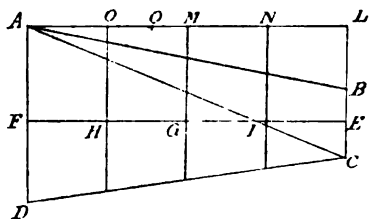



Figura 218.

Ora il Torricelli applicava al caso le dimostrate risoluzioni del frusto conico, e confermava esser veramente tale nel solido la ragion dell' equiponderanza, con la seguente illustrazione stupenda delle dottrine di Galileo:

« Proposizione XLVII. — *Segmentum coni habet centrum gravitatis, ut ait Galileus propos. ultima appendicis* De centro gravitatis solidorum. »

« Esto frustum coni ABCD (nella precedente figura) cuius axis FE, appensumque sit ad libram AL, ita ut circuli, qui per AD, BC ducuntur, perpendiculares sint ad horizontem. Tum, secta FE in quatuor partes aequales per puncta H, G, I, ducantur perpendicula OH, MG, NI, LE. Trium ergo magnitudinum ad libram appensarum centra gravitatis erunt in rectis OH, MG, NI: nempe, coni ACD, in OH; coni BAC in NI, reliqui vero solidi in GM, quandoquidem ostensum est singulas ipsius perforatas lunulas aequales esse singulis circulis alicuius sphaeroidis, cuius axis erat FE. »

« Centrum vero praedictarum trium magnitudinum sic habebitur: Intelligatur unaquaeque dictarum magnitudinum divisa in quatuor partes aequales, et concipiantur appendi ad libram, ita ut coni ACD $^3/_4$ pendeant ex A, reliqua vero $^1/_4$ ex L. Coni vero BAC $^3/_4$ pendeant ex L, reliqua vero $^1/_4$ ex A. Reliqui tandem solidi $^2/_4$ pendeant ex A. et $^2/_4$ ex L. Manifestum est punctum aequilibrii harum trium magnitudinum sectarum idem prorsus futurum esse, quod erat ante illarum sectionem, quandoquidem ipsarum centra gravitatis, propter sectionem a nobis factam, non mutaverunt dispositionem neque inter se, neque ad libram comparata. »

« Esto illud Q, ergo, centrum gravitatis. Q secabit libram AL, ita ut sit AQ ad QL, quemadmodum est magnitudo, appensa ex L, ad magnitudinem appensam ex A: nempe ut $^3/_4$ coni BAC, $^2/_4$ reliqui solidi, et $^1/_4$ coni ACD, ad $^3/_4$ coni ACD, cum $^2/_4$ reliqui solidi, et $^1/_4$ coni BAC, sive, sumptis quadruplis, ut tres coni BAC, cum duobus ex reliquis solidis, et uno cono ACD,

ad tres conos ACD, duos ex reliquis solidis, et unum conum BAC: sive, ut eorum bases, quae sunt in continua proportione, quod proposuerat Galileus. Ostendimus enim dictum reliquum solidum cuidam sphaeroidi aequale esse, quae quidem sphaerois medio loco proportionalis est inter illos duos conos. Ergo, si ipsa reducatur ad conum aeque altum, erit ipsius basis medio loco proportionalis inter bases conorum, sive inter bases segmenti nostri coni » (ibid., T. XXXVI, fol. 49).

La conclusione dunque del Torricelli è analiticamente espressa da questi segni, chiamando R quel che riman del frusto, toltine i coni sulle sue due basi, $QL : AQ = {}^3/_4\ ACD + {}^1/_4\ ACB + {}^2/_4\ R : {}^1/_4\ ACD + {}^3/_4\ ACB + {}^2/_4\ R$. Sostituiti gli elementi geometrici, considerando che le altezze de' coni ACD, ACB sono uguali, e che perciò stanno essi coni come le basi B, B': osservando di più che R equivale a una sferoide, o a un cono, la base del quale B'' sia media fra le altre due B, B', e l'altezza sia la medesima; sarebbe un perdere il tempo e le parole a dire che la formula del Torricelli si riduce a quella medesima di Galileo.

Sul finir della giornata quarta delle due Scienze nuove diceva il Salviati, quasi proemiando a quell'*Appendice,* che sarebbe per leggere intorno ai centri di gravità, com' avesse l'Accademico intrapreso da giovane un tale studio, per supplire a quello che si desiderava nel libro del Commandino, col pensiero di andar seguitando la materia, anco negli altri solidi non tocchi da lui: ma che poi, incontratosi nel trattato di Luca Valerio, non seguitò più avanti, benchè fossero le sue aggressioni per istrade molto diverse (Alb. XIII, 266). Apparisce di questa diversità, nella proposizione fin qui discorsa, il più chiaro esempio, avendo esso Valerio nella XXV del suo terzo libro già dimostrato il centro di gravità del frusto conico. Sembra anzi che sia questa tanto più facile e breve, che si direbbe superflua l'opera aggiuntavi da Galileo, se non si ripensasse che la diversità fra l'una e l'altra aggressione non è puramente accidentale, o di semplice forma. Mentre infatti il Valerio chiedeva si perfezionasse il cono, per riferire a un punto preso sull'asse intero di lui il centro di gravità della porzione, Galileo invece lo riferiva alle estremità dell'asse proprio del frusto terminato in sè stesso.

Ora, non contento il Torricelli di avere in sì bel modo illustrato il suo Maestro, volle di più emularlo, proseguendo per quell'altre strade tanto più agevoli e spedite, ch' egli già per sè erasi aperte. Veniva di qui condotto a riguardare il frusto come un bicchiere scavato da un cono. La speculazione era già balenata anche alla mente del Valerio, nella proposizione X del citato suo libro terzo, ma perchè gli mancavano gli argomenti necessari a dimostrare il centro di gravità nel detto solido scavato, dovettero quelle sue speculazioni rimanersi nel campo della Geometria, limitandosi ad assegnare la proporzione tra il frusto e il cono inscritto sulla base maggiore.

I processi torricelliani si vedono in fin da questo punto già disegnati: il bicchiere e il cono pendono come da libbra dall'asse, e non occorre far altro che ritrovare il centro di gravità delle parti, e le ragioni stereometri-

che intercedenti, per aver fra l' estremità della detta libbra indicato il punto, dove il solido tutto intero concentra il suo peso. Il primo passo perciò si fa dimostrando la seguente

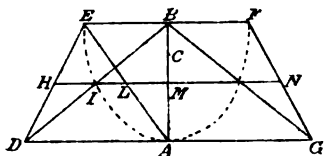



Figura 219.

« Proposizione XLVIII. — *Reliquum segmenti conici, dempto cono maioris basis, centrum habet in axe, si fiat, ut quatuor diametri maiores cum quatuor minoribus, ad duos maiores cum uno minori, ita axis AB ad BC* » (fig. 219).

In aiuto alla dimostrazione soccorre un lemma, in cui si dimostra che, dato il segmento conico ABCD (fig. 220), scavato dal cono AED, prolungate le AE, DC infino all' incontro in H, e da questo punto condotta una linea parallela ad EC, che incontri il prolungamento dell' asse EF in G; se per G, C, F si farà passare una semiellisse, dalla rivoluzion della quale intorno a EF si descriva una sferoide; il rimanente del segmento conico, toltone il cono della maggior base, sarà equivalente a CFB, porzione della detta sferoide.

Si dimostra ciò dal Torricelli co' soliti modi suoi proprii, che si compendiano ne' seguenti. È per ragion delle parallele BE : IM = AE : AM = EF : FL, e anche insieme BE : MO = EC : MO = CH : HO = EG : GI. Dunque, moltiplicando termine a termine, e per le proprietà dell'ellisse, BE^3 : IM . MO = FE . EG : FL . LG = BE^2 : NL^2, e perciò π IM . MO = π NL^2, ossia l' armilla IM è uguale al circolo LN. Così essendo di tutte le altre sezioni resta dimostrata vera l' eguaglianza tra la sferoide e il bicchiere.

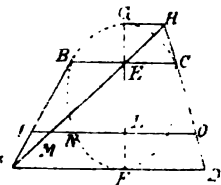



Figura 220.

« Reliquum segmenti conici (frettolosamente il Torricelli scriveva) dempto cono maioris basis, est sphaerois, cuius axis integer habebitur si fiat, ut FD ad EC, ita FG ad GE. »

« Fiat, et per CBF transeat ellipsis, ex qua fiat sphaerois. Ductaque IO, parallela ad AD, habebit quadratum BE, ad rectangulum IMO, compositam rationem ex rationibus BE ad IM, sive EA ad AM, sive EF ad FL, et ex ratione BE ad MO, vel EC ad MO, vel CH ad HO, vel EG ad GL. Quare quadratum BE, ad rectangulum IMO, est ut rectangulum FEG ad rectangulum FLG, sive ut quadratum idem BE ad quadratum NL. Sunt ergo aequalia rectangulum IMO, et quadratum NL; quare armilla IM aequatur circulo NL » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 43).

Riducendoci ora nuovamente sott' occhio la figura 219, si costruisca, secondo la regola ora insegnata, la sferoide, alla porzione EIAF della quale sappiamo equivalere quel che riman del tronco, tolto il cono inscritto DBG. Sia C il centro della descritta porzione sferoidea, che sarà anche insieme il centro del solido scavato: rimane a dimostrare che C sta veramente sull' asse AB in quel punto, che il Torricelli annunziava.

Per la proposizione XLV, qui addietro scritta, essendo $BC : AC = 2\,IM^2 : 2\,IM^2 + EB^2$, è facile dedurne $BC : CM = IM^2 : ML^2$. Ma, per il precedente lemma, $\pi\, IM^2 = \pi\, HI \,.\, IN$; dunque $IM^2 = HI \,.\, IN$; e dall'altra parte $ML^2 = HI^2$, per essere HN parallela alla base e bissettrice dell'asse: onde $BC : CM = HI \,.\, IN : HI^2 = IN : HI = 4\,IN : 4\,IH$. Ma $IH = \frac{EB}{2} = \frac{EF}{4}$, e perciò $4\,IH = EF$. Di più essendo $IN = HN - IH = \frac{EF + DG}{2} - \frac{EF}{4}$, sarà $4\,IN = 2\,EF + 2\,DG - EF = 2\,DG + EF$. Dunque $BC : CM = 2\,DG + EF : EF$. Componendo, $BC + CM : BC = 2\,DG + 2\,EF : 2\,DG + EF$. Sostituendo a $BC + CM$, BM, e duplicando gli antecedenti, $2\,BM : BC = 4\,DG + 4\,EF : 2\,DG + EF$, ossia $AB : BC = 4\,DG + 4\,EF : 2\,DG + EF$, come da principii frettolosamente posti conclude, nelle seguenti parole, il Torricelli, ripigliando il costrutto da noi di sopra nell'annunziata proposizione lasciato interrotto.

« Nam sit centrum praedictum C: erit ergo BC ad CM ut quadratum IM ad ML, sive, ob aequalitatem, ut rectangulum HIN ad quadratum HI, nempe ut recta NI ad IH. Sumptisque quadruplis, ut duo diametri maiores DG, cum uno minori EF, ad EF. Et convertendo, componendoque, sumptisque antecedentibus duplis, erit AB ad BC ut quatuor EF, cum quatuor DG, ad DG bis, cum EF semel, q. e. d. » (ibid., fol. 45).

Il secondo passo, che bisognava fare, perchè, procedendo per questa via, potesse il Torricelli conseguire il suo intento, era quello di dimostrare qual ragione avesse il solido generato dal triangolo ABE (fig. 221) al solido del triangolo AEF, rivolgendosi ambedue le figure intorno all'asse EF: ragione, ch'esso Torricelli annunzia essere di $BC\,(BC + AD)$ a $2\,AD^2$. Qui però è uno sbaglio manifesto, occasionato senza dubbio dalla fretta nello scrivere, perchè il quarto termine della relazione, secondo il calcolo rettamente condotto, è AD^2 semplicemente, e non $2\,AD^2$.

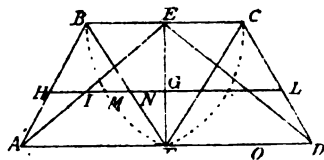



Figura 221.

Seguitiamo infatti l'Autore, da cui si suppone per già dimostrato avere il segmento della sferoide, che significheremo con $S \,.\, BFC$, al cono BFC, la proporzione di $MG^2 + GN^2$ a GN^2. Duplicando i termini della seconda ragione, sarà $S \,.\, BFC : BFC = 2\,MG^2 + 2\,GN^2 : 4\,GN^2 = 2\,MG^2 + 2\,GN^2 : BE^2$. Ma $AED : BFC = AF^2 : BE^2$, dunque $S \,.\, BFC : AED = 2\,MG^2 + 2\,GN^2 : AF^2$. Ora $MG^2 = HI \,.\, IL$, come fu dimostrato nel lemma alla precedente, e $NG^2 = HI^2$, per essere HL bissettrice dell'asse, e perciò $2\,MG^2 + 2\,GN^2 = 2\,HI\,(IL + IH) = 2\,HI \,.\, HL$. Sarà dunque, sostituendo, $S \,.\, BFC : AED = 2\,HI \,.\, HL : AF^2$. Ma $HI = \frac{BC}{4}$, $HL = \frac{BC + AD}{2}$, per cui $2\,MG^2 + 2\,GN^2 = \frac{2 \,.\, BC}{4}\left(\frac{BC + AD}{2}\right) = \frac{BC}{4}\,(BC + AD)$, e in conclusione $S \,.\, BFC : AED =$

$BC (BC + AD) : 4 AF^2 = BC (BC + AD) : AD^2$. E perchè $S . BFC$, per il lemma alla precedente, è uguale al solido generato dalla conversione del triangolo ABE intorno all'asse EF; dunque questo solido, o tronco di cono scavato, al cono descritto dal triangolo AEF, ha la proporzione di $BC (BC + AD)$ a AD^2, e non a $2 AD^2$, come, per uno sbaglio di calcolo, fu condotto a concludere il Torricelli dalla dimostrazione, che qui trascriviamo.

« Secetur axis EF bifariam in G, appliceturque GH. Erit segmentum sphaeroidis BFC, ad conum BFC, ut quadrata MG, GN simul, ad duo quadrata GN. Sumptisque duplis, ut duo quadrata MG, cum duobus NG, ad quatuor NG, sive ad quadratum BE. Conus vero BFC, ad conum AED, est ut quadratum BE ad quadratum AF. Ergo ex aequo segmentum sphaeroidis, ad conum AED, erit ut duo quadrata MG, cum duobus quadratis NG, sive, ut duo rectangula HIL, quae aequantur duobus quadratis MG, sive collectim, ut duo tantum rectangula IHL ad quadratum AF. Sumptisque octuplis, erit ut rectangulum, ex minori basi in minorem maioremque simul, ad duplum quadrati maioris basis » (ibid., fol. 44).

Se avesse avuto l'occasione e il tempo di tornare sopra questo disteso, si sarebbe senza dubbio dal Torricelli ritrovato e corretto lo sbaglio, tanto più che ne lo avrebbe potuto fare accorto lo stesso Luca Valerio, il quale aveva, nella X proposizione del suo terzo libro, dimostrato che « omne frustum coni, ad conum cuius basis est eadem, quae maior basis frusti et eadem altitudo, est ut rectangulum contentum basium diametris, una cum tertia parte quadrati differentiae eorumdem diametrorum, ad tertiam partem quadrati, ex diametro maioris basis » (De centro grav., Lib. III, Romae 1604, pag. 14).

Chiamato dunque F il frusto, C il cono, e segnato sopra AD, nella proposta figura, il punto O, in tal parte che AO sia uguale a BC, e perciò OD la differenza de' diametri delle basi; sarebbe la relazione espressa da $F : C = AD . AO + \frac{DO^2}{3} : \frac{AD^2}{3}$, ciò che, triplicati i termini della seconda ragione, dividendo, e sostituendo BC ad AO, si riduce a $F - C : C = 3 AD . BC + DO^2 - AD^2 : AD^2$. Ma, essendo per costruzione $DO = AD - BC$, avremo $DO - AD = - BC$, $DO + AD = 2 AD - BC$, e perciò la differenza dei quadrati, ch'è uguale a $(DO + AD) (DO - AD)$, sarà $BC (BC - 2 AD)$. Sostituendo, se ne concluderà dunque, per Luca Valerio, $F - C : C = 3 AD . BC - 2 AD . BC + BC^2 : AD^2 = BC^2 + AD . BC : AD^2$, che vuol dire « segmentum coni ABCD dempto cono maioris basis AD, ad conum AED maioris basis, est ut quadratum diametri minoris basis, cum rectangulo sub utraque, ad quadratum maioris » e non *ad duplum quadrati maioris*, come annunziava, e si credeva di aver dimostrato il Torricelli, per cui va corretta la proposizione, che ora trascriveremo di lui, e a dimostrar la quale erano ordinate le precedenti.

« Proposizione XLIX. — *Centrum gravitatis segmenti coni BC* (fig. 222) *habetur in axe EF, si fiat primo, ut CD quater, cum AB quater, ad CD bis et AB semel sumptis; ita FE ad EG; iterumque, sumpta FH* 1/4 *axis,*

fiat, ut quadratum AB cum rectangulo AB in CD, ad duo quadrata CD, ita HI ad IG, eritque centrum I. »

« Nam, ex demonstratis, erit G centrum reliqui, dempto cono maioris basis, H vero centrum est praedicti coni, demonstratumque est reliquum illud, ad dictum conum, esse ut quadratum AB, cum rectangulo AB in CD, ad duo quadrata CD: nempe, ex suppositione, ut HI ad IG. Quare centrum erit I » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 46).

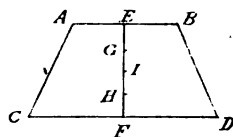



Figura 222.

Dal frusto del cono volle il Torricelli passare al frusto del conoide parabolico, e benchè il Valerio, nella XLII del secondo libro, ne avesse, con una dimostrazione assai semplice, indicato il centro; non patì il Nostro di rimanergli indietro, formulando la proposizion nel medesimo modo, ma dimostrandola diversamente da' suoi proprii principii, e secondo il metodo usato.

« PROPOSIZIONE L. — *Esto frustum conoidis parabolici ABCD* (fig. 223), *cuius axis EF, centrum O: dico EO ad OF esse ut quadratum BC, cum duobus quadratis AD, ad quadratum AD, cum duobus BC.* »

« Compleatur parabola AID, et fiat parabola GEH idem habens latus rectum cum AID. Concipiatur ex frusto ABCD demptum conoides parabolicum GEH, in quo inscriptus sit conus GEH, et, secta EF bifariam in L, applicetur NLQ. »

« Jam solidum factum a quadrilineo GNEBA, per lemma II ad prop. XLI, aequalis est cylindro, cuius basis circulus BC, altitudo vero EF: sive cono, cuius basis sit tripla circuli BC, altitudo vero sit ipsa FE. Solidum vero factum a bilineo GNE, ad conum GEH, est, per lemma ad propos. XLV, ut duo rectangula NPQ, ad quadratum GF. Ergo simul, per XXIV Quinti, totum solidum ABEG, ad conum GEH, est ut 3 quadrata BE, cum duobus rectangulis NPQ, ad quadratum GF. Sed in parabola rectangulum NPQ aequale est quadrato PL (perchè PL è il raggio del circolo massimo della sferoide) ergo solidum ABEG, ad conûm GEH, est ut tria quadrata BE, cum duobus quadratis PL, ad qùadratum FG, sive, ut sex quadrata BE, cum quadrato FG, ad duo quadratà FG. »

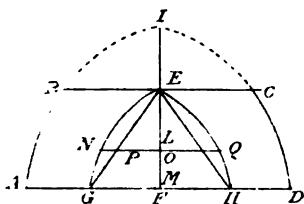



Figura 223.

« Centrum gravitatis solidi GNEBA est L, nam ostensae sunt singulae ipsius armillae aequales singulis unius cylindri circulis: solidi vero GNE centrum est L, nam singulae ipsius armillae ostensae sunt aequales singulis unius sphaeroidis circuli; ergo totius solidi GEBA centrum est L. Sed coni GEH est M, sempta FM dimidia ipsius FL; ergo, si fiat ut sex quadrata BE, cum quadrato FG, ad duo quadrata FG, ita reciproce MO ad OL; erit O centrum totius. »

« Jam quinque erunt argûmenta, praeter reductionem: Per constructionem, MO ad OL est ut sex quadrata BE, cum quadrato FG, ad duo qua-

drata FG. Componendo, ML ad LO est ut sex quadrata BE, cum tribus quadratis FG, ad duo quadrata FG. Duplicando antecedentia, FL ad LO ut 12 quadrata BE + 6 quadratis FG, ad 2 FG. Per conversionem rationis, LF ad FO ut 12 quadrata BE + 6 quadratis FG, ed 12 BE + 4 FG. Duplicando antecedentia, EF ad FO ut 24 quadrata BE + 12 FG, ad 12 BE + 4 FG. Dividendo, EO ad OF ut 12 BE + 8 FG ad 12 BE + 4 FG. »

« Sed quia rectangulum AGD, per lemma II ad propos. XL, aequale est quadrato BE, erit quadratum FG differentia inter quadratum AF, BE. Ergo fieri poterit talis reductio: EO ad OF est ut 4 BE, cum 8 FA, ad 8 BE cum 4 FA: vel, ut quadratum BC, cum 2 AD, ad quadratum AD, cum 2 BC, q. e. d. » (ibid., fol. 50).

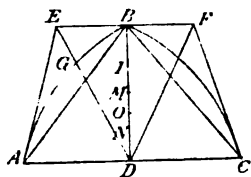



Figura 224.

Ma, per comprendere tutte le conoidali in una proposizione universalissima, premetteva il seguente *Lemma:* « Se sarà un solido o conoidale o porzione di sfera o sferoide ABC (fig. 224), cni asse sia BD, cono inscritto ABC, tangenti AE, ed EB, segmento conico AEFC; dico che il cono inscritto, il solido intermedio e la scodella esterna sono in continua proporzione. »

« Concepiscasi il cono EDF il quale, nella XXXVII, è stato provato eguale alla scodella esterna, fatta dalla tangente. Si è anco dimostrato, nella proposizione seconda premessa alla XLVI come lemma, che, se dal segmento conico leveremo li due coni ABC, EDF, il rimanente è medio proporzionale fra essi coni. Dunque, levando il cono ABC o scodella esterna, il rimanente sarà medio proporzionale fra esso cono e la scodella » (ivi, fol. 112). Ciò, chiamato I il detto solido medio proporzionale, potrà scriversi sotto la forma $ABC : I = I : EDF$. Ma $ABC : EDF = AD^2 : EB^2$, dunque $EDF = \frac{EB^2 . ABC}{AD^2}$,

e perciò $I^2 = ABC . EDF = \frac{ABC^2 . EB^2}{AD^2}$, ossia $I^2 : ABC^2 = EB^2 : AD^2$, ed estratta la radice e trasponendo, $ABC : I = AD : EB$.

Il centro di gravità del cono ABC è in N, punto noto; del solido intermedio I, ossia del bilineo AGB equivalente a una sferoide, è in M nel mezzo dell' asse. Se dunque si supponga in O il centro del tutto, sarà questo indicato dalla relazione ABC : I, ossia (*a*) $AD : EB = MO : ON$. Moltiplicando l' una e l' altra ragione di questa per $^3/_2$, e componendo, avremo (*b*) $3 AD + 2 EB : 2 EB = 3 MO + 2 NO : 2 NO$. Moltiplicando per 2 i conseguenti di (*a*), $AD : 2 B = MO : 2 NO$, la quale, per composizione, darà $AD + 2 EB : 2 EB = MO + 2 NO : 2 NO$; ond' è che si trasformerà la (*b*) in $3 AD + 2 EB : AD + 2 EB = 3 MO + 2 NO : MO + 2 NO$. Ma $3 MO + 2 NO = 3 (BO - BM) + 2 (BN - BO) = 3 BO - 3 BM + 2 BN - 2 BO = BO - 3 BM + 2 BN = BO$, e dall' altra parte $MO + 2 NO = MD - OD + 2 (OD - ND) = OD + MD - 2 ND = OD$; dunque $3 AD + 2 EB : 2 EB + AD = BO : DO$, ed è ciò che appunto intende di dimostrare il Torricelli in questa sua

« Proposizione LI. — *Poste le medesime cose che nella precedente*

figura, dico che, se si farà come tre delle AD, con due delle EB, a due delle EB con una delle AD, così BO ad OD; che il punto O è il centro del solido conoidale, o della porzione di sfera o di sferoide.

« Perchè il cono ABC, al cono EDF, sta come il quadrato AD al quadrato EB: però il cono inscritto ABC, al solido intermedio, sarà come la retta AD alla retta EB. Se dunque segheremo BD in quattro parti uguali BI, IM, MN, ND, sarà M centro del solido AGB, ed N centro del cono. E se faremo, come AD alla BE, cosi MO ad ON *reciproce,* sarà O centro di tutto. Però sarà come tre delle AD, con due delle EB, a due delle EB, con una delle AD; così BO ad OD, c. d. d. » (ivi, fol. 237).

Soggiunge il Torricelli, dopo questa, un corollario *pro centro gravitatis hyperbolici, et segmenti sphaerae, aut sphaeroidis tantum.*

« Esto conois hyperbolicum, sive sphaerae aut sphaeroidis portio ABC (fig. 225), cuius diameter BG, axis BD, centrum H, tangentes AF, BF. Suppono quod, si fiat ut tripla AD, cum dupla BF, ad duplam BF, cum AD, ita BO ad OD; O esse centrum gravitatis, ut ostendimus in praecedenti. His positis, fiat ut tripla axis BD, cum quadrupla diametri BG, ad duplam diametri BG cum BD, ita BO ad OE: dico iterum O esse centrum gravitatis conoidis, sive portionis. »

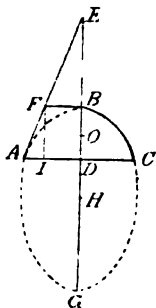



Figura 225.

« Ducatur enim FI parallela ad BD. Erit ergo AI ad ID ut DB ad BE: nempe, ob tangentem sectionis coni AE, ut DH ad HB. Et, componendo, erit AD ad FB ut DG ad GH: quare, ut tripla AD, cum dupla FB, ad duplam FB, cum AD; ita tripla DG, cum dupla GH, ad duplam GH cum GD: nempe ita tripla BD, cum quadrupla BG, ad duplam BG, cum BD, q. e. d. » (ibid., fol. 214).

Istituiscasi il calcolo, tenendo dietro al processo dell'Autore. Abbiamo, per la natura della tangente alla sezione conica, essendone in H segnato il centro, DB : BE = DH : HB. E condotta la FI parallela all'asse, AI : DI = DB : BE; dunque AI : DI = DH : HB, relazione che, componendo e sostituendo gli equivalenti, si trasforma nell'altra (*a*) AD : FB = DG : GH. Triplicando in questa gli antecedenti, e duplicando i conseguenti, avremo 3 AD : 3 FB = 3 DG : 2 GH, dalla quale deriverà per composizione la (*b*) 3 AD + 2 FB : 2 FB = 3 DG + 2 GH : 2 GH. Duplicando i conseguenti della (*a*) e componendo, avremo anche insieme AD + 2 FB : 2 FB = DG + 2 GH : 2 GH, e da questa e dalla (*b*) ne conseguirà 3 AD + 2 FB : AD + 2 FB = 3 DG + 2 GH : DG + 2 GH. Ma 3 DG + 2 GH = 3 (GB — BD) + BG = 4 BG — 3 BD, e 2 GH + DG = GB + GB — BD = 2 GB — BD; dunque 3 AD + 2 FB : AD + 2 FB = 4 BG — 3 BD : 2 BG — BD.

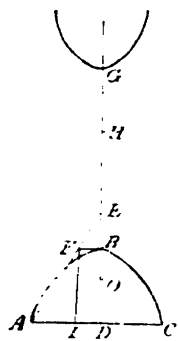



Figura 226.

Questa conclusione è manifestamente diversa da quella, che abbiamo letta di sopra nel Torricelli, la quale non s'appropria ad altra sezione che all'iperbola. In tal caso, com'apparisce dalla fig. 226,

in cui le indicazioni del centro, dell' asse, del diametro e di tutto il resto corrispondono con quelle della figura 225; DG = BG + GD. Ma, nel caso della sferoide o della sfera, DG non è uguale alla somma delle due dette porzioni del diametro, ma com' è evidente, alla loro differenza; e perciò la formula, applicabile ai tre casi contemplati dal Torricelli, si dovrebbe scrivere BO : OE = 4 BG ± 3 BD : 2 BG ± BD, nella quale il segno di sopra vale per l' iperbola, o per il conoidale iperbolico, e quel di sotto per la sferoide e per la sfera.

IX.

I solidi conoidei, intorno ai quali aveva il Valerio fatte prove ammirande ai matematici de' suoi tempi, venivano, per lo studio del Torricelli, compresi così in una formula universale, che se ne poteva calcolare il centro di gravità, fossero que' corpi descritti da qualunque sezione conica, o si rimanessero interi o ridotti nei loro frusti. La Baricentrica perciò era, per via di queste torricelliane proposizioni, fatta notabilmente progredire sopra quella degli antichi, e s' avviava a vestir lo splendore e l' agilità di quell' abito nuovo, che le avrebbero presto assettato in dosso l' analisi cartesiana e il calcolo differenziale. Nè per solo il metodo è il Nostro benemerito della scienza, ma per la varietà de' soggetti discorsi, e delle fogge dei solidi immaginati, fra' quali si sono in questo trattato veduti apparire i bicchieri e i calici, dentro i quali viene a infondere Minerva agl' ingegni sitibondi, con larga mano, l' ambrosia.

Rimangon però ancora, a condurre il presente trattato alla sua perfezione, altre fogge di solidi, e altre figure di superficie, non più immaginate o conosciute agli antichi, intorno ai centri di gravità delle quati s' esercitò con gloriosa riuscita il Torricelli. Son tra que' solidi principalmente da annoverare i così detti *cavalieriani*, e fra quelle superficiali figure le cicloidali, che ci vogliono brevemente trattenere in discorso, in quest' ultima parte del presente capitolo.

In una lettera a Michelangiolo Ricci, della quale è rimasto solo l' estratto, senza alcuna data precisa, scriveva così il Torricelli circa l' anno 1644: « Il padre fra Bonaventura mi scrisse la settimana passata, e aggiungerò qui un capitolo della sua lettera: *Con tale occasione dissi al p. Mersenno che io ero intorno a speculare sopra un quesito, non ancora digerito, quale bisognò dirgli, facendomene instanza, per conferirlo al signor Robervallio. Io dissi che non era quesito da un par suo: tuttavia volle che io glielo dicessi, ed è tale: Sia sopra la parabola ACB* (fig. 227), *come base, il corpo colonnare o cilindrico, come lo chiamo nella mia Geometria, ADEBCF, sicchè DFE sia l' opposta base, ed anche essa parabola simile,*

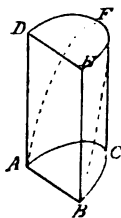



Figura 227.

uguale e similmente posta come ACB. Stendasi poi un piano per la retta AB, e per la cima F della parabola DFE: ora io dissi che cercavo la proporzione delli due frusti di detto corpo, fatti dal piano AFB. Io poi non l'ho più pensato, ma per una certa analogia stimai che fussero fra di loro come cinque a due. Queste sono le precise parole di fra Bonaventura. Io vi pensai subito, e trovai subito la dimostrazione, ed il medesimo giorno, che ebbi la lettera, gli mandai la risposta. Parteciperò anche a V. S. il mio pensiero, rimettendomi a lei il parteciparlo a cotesti signori, se lo stimerà degno. *Esto figura quaelibet ABC....* » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 107).

Nel *Racconto* poi dei problemi mandati ai Matematici francesi, più volte da noi citato, dop' avere scritto il quesito, lo stesso Torricelli soggiunge: « Questo fu da me sciolto universalmente, e non solo risposi che il solido a me proposto era segato in proporzion sesquialtera, e non in ragione di 5 a 3, come il Cavalieri credette per isbaglio stare il frusto maggiore al minore; ma in una annunciazione, facile e universalissima, dissi a esso Cavalieri qual proporzione abbiano le parti di tale solido, anco quando le basi opposte siano qualunque altra sorta di figura, purchè abbiano diametro. Gli mandai la brevissima dimostrazione, come anco la mandai agli altri amici d'Italia » (ivi, T. XXXII, fol. 41).

Sarebbe nonostante rimasta nel pubblico ignorata di ciò la notizia, se il Cavalieri stesso, nella sua Quinta esercitazione geometrica, dop' aver dimostrata la proposizione XVII, non avesse in uno scolio accennato al quesito, ch' egli aveva proposto già di risolvere al Torricelli, e non avesse soggiunta la dimostrazione, ehe n' ebbe da lui per risposta. « Et quia demonstratio elegantissima est, et adducta brevior, ideo hic eam subnectere libuit, quae talis est » (Bononiae 1647, pag. 365). Tale però crediamo che fosse la dimostrazione *ex Torricellio* quivi addotta, quanto alla sostanza, non però quanto alla forma, che il Cavalieri ridusse più geometricamente ordinata. Ma perchè la dimostrazione, rimasta nel manoscritto, è anche più breve, e non meno chiara, e dalla universalità della figura, sopra la quale s' erige il solido colonnare, passa in uno scolio l'Autore a contemplare il caso particolare, che la base del detto solido sia parabolica come s' era contentato di proporgli il Cavalieri; pensiamo di pubblicar, nella sua propria original forma, quella medesima torricelliana proposizione, che è tale:

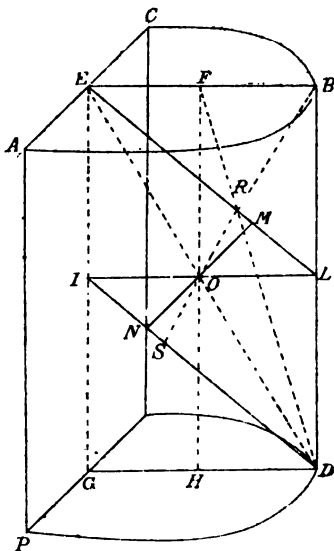



Figura 228.

« PROPOSIZIONE LII. — *Esto figurae ABC* (228) *diameter BE, centrum vero gravitatis sit F. Dico frustum, quod sub tribus planis curvaque su-*

perficie continebitur, ad reliquum sub duobus planis et curva quadam superficie contentum; esse ut recta BF ad FE. »

« Nam producatur FH, axis totius solidi, ductaque IOL, quae bifariam secet latera EG, BD, connectantur EL, DI. Patet primo: quod centrum totius solidi erit punctum O, medium scilicet totius axis FH. Centrum vero frusti superioris ACBD erit in recta EL, et reliqui frusti in recta DI. Facile probatur hoc, nam, si totum solidum secetur plano, ad planum CP parallelo, quodlibet parallelogrammum, quod nascetur in superiori frusto, centrum habebit in recta EL, et reliquum parallelogrammum, quod fiet in frusto inferiori, centrum habebit in recta DI. Propterea omnia simul parallelogramma superioris frusti, sive ipsum superius frustum, centrum habebunt in recta EL, et sic de reliquo inferiori. »

« Esto iam centrum gravitatis frusti ACBD punctum quodlibet M, in recta EL, productaque MON, erit omnino N centrum reliqui frusti, eritque frustum inferius, ad frustum superius, reciproce, ut MO ad ON, sive ut LO ad OI: hoc est ut BF ad FE, quod erat propositum » (ibid., T. XXXVI, fol. 239).

Suppongasi ora che ACB, come proponeva il Cavalieri, sia una parabola: se con F s' indica tuttavia il centro, sarà per le notissime cose BF : FE = 3 : 2. Condotta poi FD, il centro di gravità del frusto superiore si dovrà trovare sopra un punto di lei, e per le cose giè dette anche insieme sopra un punto della EL: dunque in R, dove ambedue quelle linee concorrono: cosicchè la parte intersecata ER stia all' altra RL, come quattro sta a tre. Conducansi infatti le ED, BR: i triangoli EDF, FDB, appnntati in D, e parimente i triangoli ERF, FRB, appuntati in R, stanno come le respettive basi: cioè, come due a tre, e stanno nella medesima proporzione i rimanenti, tolti i triangoli col vertice in R da quegli altri col vertice in D: cioè ERD : BRD = 2 : 3. Dividendo per due i conseguenti, e osservando che la metà del triangolo BRD è LRD, avremo ERD : LRD = 4 : 3. E i triangoli con uguale altezza stando come le loro basi, sarà dunque, come si diceva, ER : RL = 4 : 3. Se infine conducasi ancora da R, attraverso a O, la linea RS, sarà in S il centro di gravità del frusto inferiore, il quale starà al superiore reciprocamente come RO ad OS, o come LO ad OI, cioè come FB ad EF, in sesquialtera proporzione, secondo che il Torricelli annunziava, correggendo lo sbaglio del Cavalieri, e secondo si conclude da questo scolio, che alla proposizion precedente si soggiunge nel manoscritto:

« *Scholium.* — Quando vero huiusmodi solidum ab aliqua parabola ortum ducat, et oporteat centrum partium reperire; centrum gravitatis frusti ACBD habebitur producta recta DF in communi concursu cum recta EL. Nam, si secetur planis ad oppositas bases parallelis, sectiones omnes parabolae erunt, omniumque et singularum centra gravitatis erunt in recta DF. Ergo frusti centrum erit in DF. Sed erat etiam in EL, ergo in communi concursu R. »

« Amplius dico ER ad RL esse ut 4 ad 3. Nam triangulum BDF, ad triangulum EDF, est ut 3 ad 2. Item, ablatum BRF ad ablatum ERF: ergo

reliquum BRD, ad reliquum ERD, est ut 3 ad 2 etc. Si denique ab hoc communi concursu R producatur recta quaedam linea per O usque ad rectam DI; habebitur centrum reliqui frusti » (ibid., fol. 240).

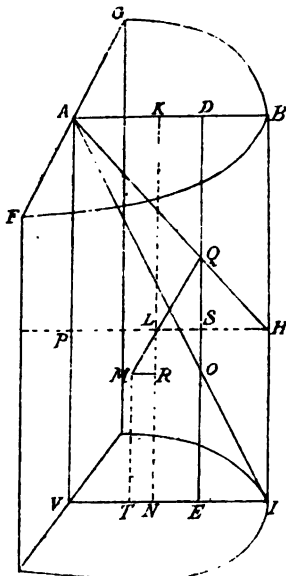
Dop' aver raccontato in che modo, e a quale occasione gli proponesse il Cavalieri il problema, risoluto così nella sua generalità e ne' suoi particolari, soggiungeva il Torricelli in tal guisa nella scrittura sopra citata: « Il medesimo padre fra Bonaventura mi ha fatto istanza più di una volta, in diversi tempi, acciò che io volessi trovare la dimostrazione di un altro quesito, che neanco egli sapeva, ed è così definito: »

« Se sarà un solido, nato e segato come il precedente, ma che le basi opposte siano figure composte di due mezze parabole ABC, ABF (fig. 229), congiunte con la base comune AB, e che le cime siano C ed F; si cerca il centro di gravità delle due parti del solido. »

« Io dimostrai che, facendosi DA alla DB come 8 a 7, nel caso propostomi, e tirando la DE parallela alla BI, e di nuovo facendo OD alla OE come 8 a 7; il punto Q, cioè il mezzo della retta OD, era centro della parte di sopra del solido segato. Ma la mia dimostrazione essendo universale, provavo che, se il solido nasceva dalla prima parabola, che è il triangolo, la retta BD alla DA era come 6 a 6. Se della seconda parabola, era come 8 a 7; se della terza, come 9 a 8; se della quarta, come 10 a 9, et sic semper. La retta poi ED va segata nella medesima proporzione che la BA, e si troverà il punto O. E segando per mezzo la OD in Q, sarà Q centro della parte superiore del solido segato. »

Figura 229.

« Quanto al centro della parte inferiore non soggiungerò altro, poichè, essendo dato il centro di tutto, e di una parte, con la proporzione delle parti, è dato ancora il centro della parte rimanente, per la VIII del primo degli Equiponderanti. La dimostrazione di questo è stata da me conferita solo al medesimo fra Bonaventura, il quale me l'ha chiesta » (ivi, T. XXXII, fol. 42). E allo stesso fra Bonaventura fu da questa suggerita la dimostrazione della XXI della sua quinta Esercitazione geometrica, ma la originale proposizione torricelliana è, per quel che da noi si sappia, al pubblico ignota, per cui ci sentiamo tanto più fortemente invogliati di pubblicarla, come corona e fastigio delle precedenti. Ciò facciamo altresì perchè quella si tira dietro queste altre due proposizioni, che le servon per lemmi, il secondo dei quali specialmente è, per la sua universalità, nella Baricentrica di non lieve importanza.

Proposizione LIII. — *Di due mezze parabole simili e uguali, con-*

giunte con la base comune, il centro di gravità sega essa base con tal proporzione, che la parte verso il vertice stia alla rimanente come cinque sta a tre.

Deriva per corollario dal lemma XI, e dalla proposizione XXI *De dimensione parabolae* (Op. geom., P. II cit.. pag. 33, 84), imperocchè, se siano le due mezze parabole AHB, AMN (fig. 230) congiunte con la base comune AC, la quale sia anche insieme asse dell' emisfero descritto dal quadrante ARC, compiuto il semicircolo sul diametro AF, e descritte intere le ABF, ANF, abbiamo per la parabola HL : BC = AL . LF : AC . CF = HM : BN, e per il circolo $LP^2 : CR^2$ = AL . LF : AC . CF. Dunque HM : BN = $\pi LP^2 : \pi CR^2$, che vuol dire essere le infinite linee, delle quali s' intessono le due mezze parabole, proporzionali ai cerchi, di che si compagina l' emisfero: e perciò il centro dell' equilibrio nella superficie e nel solido segherà la libbra AC nella medesima proporzione. Ond' essendo nell' emisfero, per le cose già dimostrate, nella proporzione di cinque a tre; dunque anche nelle due mezze parabole sarà tale.

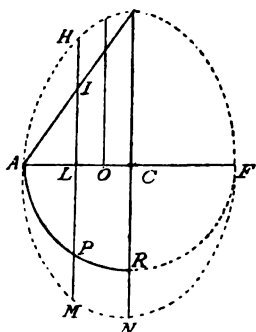



Figura 230.

Ma l' annunziata proposizione deriva più prossimamente dalla XXIX di questo trattato, nella quale si comprende come nella sua formula generale, espressa da AO : OC = HL + LI : HL, sostituitivi i valori particolari, che sono LI = $\frac{BC}{2}$, HL = $^3/_4$ BC, come, osservando che BC sega nel mezzo la AF, e HL la AC, resulta dalla proporzione CB : HL = AC . CF : AL . LF = 4 : 3. Fatte le sostituzioni s' ha veramente AO : OC = $^3/_4$ CB + $^1/_2$ CB : $^3/_4$ CB = 5 : 3, in conferma di quel che sentiremo tra poco asserirsi dal Torricelli, come legittima conseguenza di principii già dimostrati.

Proposizione LIV. — *De' trilinei, formati da qualunque parabola, il centro di gravità sega l' asse con tal proporzione, che la parte verso il vertice, alla rimanente, stia come il grado della parabola, cresciuto di un' unità, all' unità stessa.*

Che ciò sia il vero, *ostenditur,* dice il Torricelli, *in doctrina parabolarum.* Ma perchè a voler tener dietro all' Autore in quelle dottrine saremmo tirati troppo in lungo, e fuori del campo nostro, ci contenteremo di far osservare come l' annunziata verità si confermi per induzione da alcuni esempi.

Nel triangolo, ch' è il trilineo formato dalla parabola di primo grado, è stato già da tanti e in tanti modi dimostrato che il centro di gravità sega l' asse così, che la parte verso il vertice stia a quella verso la base come uno più uno, ossia due, sta a uno. Verificarsi poi nel trilineo della seconda parabola l' annunziata regola generale fu primo a dimostrarlo Luca Valerio, nella XXII del suo terzo libro, che dice esser segato dal centro dell' equilibrio il diametro della figura *ita, ut pars quae est ad verticem sit tripla*

reliquae (pag. 43), ossia come due, grado della parabola, più uno, è ad uno. Il Torricelli poi v' applicò il metodo degl' indivisibili, e riuscì alla medesima conclusione, supponendo noto il centro di gravità del cono.

Sia infatti CAG (fig. 231) il trilineo proposto: condotta la AC, e prolungata in E l' ascissa NB, avremo, per la parabola da una parte, e per la similitudine dei triangoli dall' altra, CI : BN $=$ AI^2 : AN^2 $=$ IC^2 : NE^2, d' onde, moltiplicando per 2 la prima ragione, e per π la seconda, CG : BM $= \pi$ IC^2 : π NE^2, che vuol dire essere le infinite linee del trilineo proporzionali agl' infiniti circoli di un cono, avente sopra quello descritto col raggio IC la base, e in A il vertice: per cui avrà la libbra AI, nel medesimo punto, per ambedue le figure, il centro dell' equilibrio. E perchè nel cono quel centro sega l' asse così, che la parte verso il vertice è tripla della rimanente, dunque anche nell' asse del trilineo tale è la sezione.

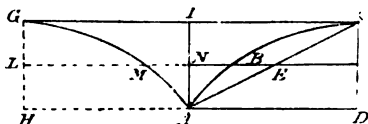



Figura 231.

Il Cavalieri divulgò questo modo, avuto privatamente dal Torricelli, nella propos. XXIX della sua quinta Esercitazione, benchè con ordine inverso, servendosi del centro del trilineo per indicare quello del cono: e fu lo stesso Cavalieri che, nella XXX appresso, rese al pubblico nota l' altra bella maniera di ritrovare il centro del conoide parabolico, da quello del triangolo, come si vide fare al nostro Autore nella XI di questo trattato.

Ma tornando al proposito, se CI : BN $=$ AI^3 : AN^3, e la parabola è perciò del terzo grado, o è cubica, come si dice; il Torricelli dimostrò che la parte dell' asse verso il vertice sta alla rimanente come $3 + 1$, ossia 4, sta ad uno. Se CI : BN $=$ AI^4 : AN^4, e perciò la parabola è biquadratica, le due dette porzioni dell' asse stanno come $4 + 1$ a uno, ossia l' una è quintupla dell' altra, e così sempre con regola universale, *ut ostenditur in doctrina parabolarum.*

Si consideri dunque AI come una libbra gravata da grandezze, che si eccedono via via a proporzione delle distanze uguali, come nel triangolo, o a proporzion de' quadrati, de' cubi, de' quadrato-quadrati, o di qualsivoglia altra potenza, come ne' trilinei formati da parabole ordinarie, cubiche, biquadratiche ecc.; resterà dimostrato da queste dottrine torricelliane il medesimo teorema generalissimo proposto di sopra, messo però sotto quest' altra forma: *Se si disporranno in una libbra grandezze eccedentisi l' una sopra l' altra, a proporzione delle semplici distanze uguali, de' quadrati, de' cubi, de' biquadrati o di qualsivoglia altra potenza di esse distanze; sarà la detta libbra segata dal centro dell' equilibrio con tal ragione, che la parte verso le grandezze minori stia alla rimanente, come il grado della potenza, cresciuto di un' unità, sta all' unità stessa.*

Galileo non riuscì, nella sua prima proposizione *De centro gravitatis,* a dimostrare il teorema, se non che nel caso che la potenza sia uno. Per le seconde potenze cadde in una fallacia, come apparisce in quel suo medesimo

trattato dalla proposizione VI, ma dimostrar la regola universalissima, da valere per qualunque potenza, non era riserbato che alla potenza matematica del Torricelli.

Così dunque preparatesi le vie, potè esso Torricelli riuscire a risolvere anche il secondo problema, propostogli dal Cavalieri con questa, che nel manoscritto è così intitolata: *Demonstratio centri gravitatis cuiusdam solidi, a parabola geniti, cuius dimidium tantum depinximus.*

« Proposizione LV. — *Esto parabola quaelibet ABC* (fig. 232), *cuius vertex A, diameter AD, basis vero DC (nos hic, facilitatis gratia et brevitatis causa, parabolam ipsam quadraticam supponemus) et super hac concipiatur cylindricum parabolicum, cuius oppositae bases sint ABCD, EFG: intelligaturque sectum huiusmodi solidum plano ADFH, per diametrum AD, et extremam ipsius parallelam EH, in opposita base ducto. Quaeritur centrum gravitatis alterius partis, puta superioris ABCDF.* »

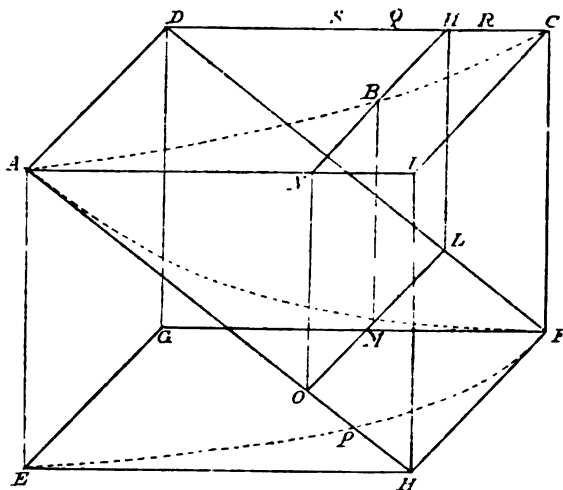



Figura 232.

« Circumscribatur ipsi cylindrico parabolico solidum parallelepipedum AICDGEHF. Secetur solidum alio plano HO, ubicumque sit, dummodo plano DE aequidistet, nasceturque parallelogrammum BHLM in frusto solidi parabolici, et parallelogrammum BMON in quodam solido, cuius basis est CIHF, apex vero A. Huiusmodi solidum vocabimus *Pyramidale,* licet quatuor tantum ipsius superficies planae sint, reliqua vero curva » (MSS. Gal. Disc., T. XXXI, fol. 293).

His suppositis, soggiunge il Torricelli, procederemo alla nostra dimostrazione: della quale però chi ha letto il principio non intende quanto potesse riuscire utile complicarla anche di più con quella circoscrizione. Eppure sta tutta qui la macchina, disposta co' suoi organi in modo, che può, dalla VIII del primo degli Equiponderanti, ricevere l'impulso e la regola del moto. In quella archimedea proposizione infatti, dato il centro di gravità di qualunque grandezza, e di una parte, in cui sia stata divisa; s'insegna a ritrovare il centro dell' altra.

Anche nel presente caso, per via della circoscrizione, il prisma triangolare, che nasce dalla bisezione fatta dal piano DH nel parallelepipedo, si compone di due solidi: del frusto parabolico e del piramidale, i quali chia-

meremo F e P, e immagineremo pendere insieme con le altre loro metà dalla libbra DC, sopra la quale, essendo Q il centro dell'equilibrio del prisma, in R quello della parte tolta, ossia del piramidale; il centro del rimanente, cioè di quel che si cerca, supposto essere in S, verrà indicato dalla relazione (*) $QS : QR = P : F$. Di qui si vede che sarà allora risoluto il problema, quando siano i punti Q, R determinati sopra la libbra, e sia tra P, F ritrovata la proporzione della grandezza.

Il punto Q, da cui pendendo s' equilibra il prisma triangolare, sega la libbra in modo, che la parte DQ sia alla QC doppia, com' è noto per le cose già dimostrate, e si potrebbe concludere dalla universalità del principio formulato nella precedente proposizione, dalla quale è dato pure con facilità ritrovare il centro, intorno a cui s' equilibra il piramidale. S' osservi infatti che $CH : BO = CI \cdot IH : BN \cdot NO$. Ma $CI : BN = AI^2 : AN^2$, per la parabola, e $IH : NO = AI : AN$, per la similitudine dei triangoli; dunque $CH : BO = AI^3 : AN^3$, e ciò significa che i parallelogrammi del piramidale son proporzionali alle linee di un trilineo cubico, ond' è che quelli segheranno l' asse nella medesima proporzione di questi, in modo cioè che la parte verso il vertice sia quadrupla della rimanente. Se perciò intendasi lo spigolo AI trasportato in DC, e ivi lo stesso piramidale raddoppiato; sarà il punto R così disposto sopra la libbra DC, che la parte di lei DR stia all' altra RC come quattro sta a uno.

S' ha dunque di qui notificato, colla formula segnata con asterisco, il valore di QR. Resta a notificarsi la proporzione tra P e F, per che fare applicheremo le proposizioni già poco fa scritte: che se dalla LIII veniva dimostrato che il centro di gravità delle semiparabole, congiunte per la base, è a tal distanza da C, che stia a quella da D come cinque a tre; dalla LII si conclude che anche il frusto inferiore, o nel suo tutto o nella sua metà, quale ora solamente viene in considerazione, sta al frusto superiore F, come cinque sta a tre: cosicchè chiamato *CP* tutto intero il solido colonnare parabolico, sarà $F = 3/8\ CP$.

Dai medesimi principii si concluderà pure che, avendo il trilineo AIC il suo centro di gravità a tre quarti dal vertice, il frusto superiore di lui, chiamandosi *CT* il colonnare intero, sarà $P = 3/4\ CT$. Consideriamo ora che il colonnare *CP* è doppio di *CT*, perchè, avendo ambedue i solidi la medesima altezza, la base parabolica DAC è doppia della trilinea AIC, e perciò $F = 3/8 \cdot 2\ CT = 3/4\ CT = P$. Se dunque $P = F$, per la sopra contrassegnata con asterisco, sarà anche $QS = QR$, e son con ciò fatte note tutte quelle porzioni, che bisognano per riferire il punto S alle due estremità della libbra. Abbiamo infatti $DS = DQ - QR = DQ - (DR - DQ) = 2\,DQ - DR$; $SC = QC + QR = QC + QC - RC = 2\,QC - RC$. Ma $2\,DQ - DR = 2 \cdot 2/3\,DC - 4/5\,DC = 8/15\,DC$; $2\,QC - RC = 2/3\,DC - 1/5\,DC = 7/15\,DC$; dunque $DS : SC = 8 : 7$.

Così viene ad essere dimostrata la verità, che il nostro Autore solamente annunziava in quelle parole poco addietro da noi trascritte, e illustrate dalla

figura 229, nella quale sappiamo ora per certa scienza che la distanza AD è $^8/_{15}$ di tutta intera la libbra. Se perciò s' immagina sospeso il frusto dal punto D, il centro di gravità dovrà trovarsi lungo il perpendicolo DE, e, per le cose dette nella proposizione LII, anche lungo la linea AH, che attraversa il centro di tutte le figure parallelogramme componenti lo stesso frusto, di cui dunque il centro gràvitativo tornerà in Q, dove le due dette linee hanno il loro concorso. Di un tal concorso è poi facile indicar la posizione nel perpendicolo DE, attraversato in O dalla AI diagonale, perchè i triangoli simili già disegnati danno $AD : DB = AO : OI = OD : OE = 8 : 7$, per cui è OD $^8/_{15}$ di DE, e DQ, che è metà di DO, com' è BH, metà di BI, $^4/_{15}$. Riferito insomma il centro di gravità del frusto agli assi ortogonali AD, DE, che siano ciascuno divisi in quindici parti uguali, s' avrà l' ascissa a otto, e l' ordinata a quattro di quelle parti.

La medesima proposizione VIII del primo libro degli Equiponderanti, che ne ha guidato in questa ricerca, vale per buona regola anche nell' altra: nella ricerca cioè del centro di gravità del solido inferiore. Presa infatti BK $^5/_8$ di AB, e condotto il perpendicolo KN, che sia attraversato dalla HP in L, sarà L il centro di gravità del solido colonnare. Ma essendo Q quello della parte tolta, prolungato QL così in fino in M, che stia LM a LQ reciprocamente come il frusto superiore sta all' inferiore, ossia come tre sta a cinque; sarà in M il centro di gravità del rimanente, ossia del frusto inferiore che si voleva.

Le coordinate ortogonali, che indicano la situazione del punto M, sono $IT = IN + TN$ e $TM = SE - LR$. Ora IN è porzione nota dell' asse IV, ed SE è la metà del perpendicolo ED. La TN poi, ossia la MR, e la LR sono notificate dai triangoli simili LMR, QLS, i quali danno $RM = \frac{ML}{LQ} \cdot LS = {}^3/_5\, LS$; $LR = \frac{ML}{LQ} \cdot OQ = {}^3/_5\, OQ$, ed LS è uguale a $LH - SH$; $OQ = OD - DQ$ tutte quantità note. Per quantità tutte note verrà dunque a indicarsi dalle dette coordinate ortogonali il centro di gravità del frusto inferiore. Valga questo nostro discorso, qualunque egli sia, a illustrare per qualche parte, e a rendere per qualche altra compiuta la dimostrazione scritta dal Torricelli per suo memoriale, e per parteciparla al Cavalieri, che curioso gliela aveva chiesta, intanto che l' Autore di lei aspettava a ripulirla, e a metterla in ordine per la stampa quell' occasione, che invidiosamente gli tolse la morte. La detta dimostrazione poi, supposte le cose già annunziate di sopra, è tale:

« His suppositis, esto parallelepipedum 12: eritque cylindricum parabolicum integrum, ad reliquam partem, ut basis ad basim, ob eamdem altitudinem: nempe ut parabola ABCD ad trilineum externum ABCI; hoc est, in nostro casu, ut 8 ad 4. Pars inferior cylindri parabolici, ad superiorem ABCDF, est ut 5 ad 3, ut ostendimus iam pridem. Si enim intelligantur duae semiparabolae ad eamdem basim CD coniunctae cum suo solido atque sectione, uti

supra dictum est, erit centrum basis, hoc est duarum semiparabolarum in recta CD, ita secta, ut pars ad C terminata sit ad reliquam ut 5 ad 3. Ergo etiam solidum inferius ad superius erit, in eo casu, ut 5 ad 3. Quare etiam, sumptis tantum dimidiis, erit in nostro casu pars inferior, ad superiorem ABCDF, ut 5 ad 3. »

« Remanet cylindricum trilineare, cuius oppositae bases sunt ABCI, EPFH. Pars eius inferior, ad superiorem quam Pyramidale vocamus, est ut unum ad 3. Si enim intelligantur duo trilinea ad eamdem rectam AI composita, cum suo solido atque sectione, uti supra explicatum est, erit centrum basis, hoc est duorum trilineorum, in recta AI ita secta, ut pars ad I sit ad reliquam ut unum ad tria. Ratio est quia omnes lineae in trilineo, quales sunt IC, NB, etc., inter se erunt ut circuli alicuius coni, qui axem habeat AI, et verticem A. Quare etiam pars inferior, ad superiorem, erit in eo casu ut unum ad tria. Ergo, sumptis etiam tantum dimidiis, erit in nostro casu pars inferior ad superiorem, sive ad nostrum pyramidale CIHFA, ut unum ad tria. »

« Ostensum itaque est quod, si ponatur parallelepipedum 12, pars superior solidi cylindrici parabolici erit 3. Itemque ipsum sibi adiacens pyramidale erit 3. Propterea huiusmadi solida, quando parabola quadratica fuerit, sunt aequalia. »

« Pyramidale CIHFA centrum gravitatis habet in plano basi parallelo, quod quidem planum secat AI rectam in ratione quadrupla: nempe ita ut pars ad A sit ad reliquam ut 4 ad 1. Ratio est quia parallelogrammum CH, ad BO, rationem habet compositam ex ratione rectae CI ad rectam BN, sive ex ratione quadrati IA ad AN, ob parabolam quadraticam, et ex ratione rectae IH ad NO, sive ex ratione rectae IA ad AN. Quare parallelogrammum BO erit ut cubus IA ad cubum AN, et hoc semper. Propterea omnia simul parallelogramma, sive ipsum pyramidale, centrum gravitatis habebit in eodem plano, in quo est centrum gravitatis trilinei externae parabolae cubicae, cum plana pyramidalis inter se sint ut lineae trilinei cubici. Trilineum autem cubicum centrum gravitatis habet in quadam aequidistante ipsi IC, quae quidem secat rectam AI in ratione quadrupla, ut ostenditur in *doctrina parabolarum*. Quare centrum gravitatis pyramidalis erit in plano, quod secat tangentem AI in ratione ut 4 ad 1. »

« Ponamus iam omnia corpora a nobis delineata duplicari etiam ex altera parte ad rectam DC. Ponaturque rectam DC esse libram quamdam, divisam in quindecim partes aequales. Centrum aequilibrii prismatis, cuius dimidium est AHFDIC, erit punctum Q, in quo libra dividitur in ratione dupla. Magnitudines enim appensae sunt infinita parallelogramma, quorum unum est HO, inter se eamdem rationem servantia, quam servant lineae trianguli DCF, quarum una est HL. At centrum aequilibrii duorum pyramidalium, quorum unum est CIHFA, erit punctum R, in quo libra dividitur in ratione quadrupla, uti ante explicatum est, ergo centrum aequilibrii reliqui solidi, cuius dimidium est ABCDF, erit S, nempe, sumpta QS, quae sit

aequalis ipsi QR, cum demonstraverimus ipsum pyramidale aequale esse solido ABCDF in parabola quadratica. Propterea centrum gravitatis solidi propositi erit in recta, quae ex puncto S demittitur aequidistanter ipsi CF. Est autem etiam in recta, quae ex D producitur ad punctum medium ipsius CF, ergo in communi concursu. In nostro casu punctum S secat rectam DC in ratione 8 ad 7. »

« Si quis vero desideret centrum gravitatis etiam partis inferioris, ipsam habebit per VIII libri primi Aequiponderantium, cum datum sit centrum totius in medio axis integri solidi, centrumque unius partis, una cum ratione partium » (ibid., fol. 294, 95).

Rimane a dire dell' invenzione del centro di gravità dentro lo spazio cicloidale, intorno a che avrà la nostra Storia, in altro proposito, occasione a lungo e importante discorso, l' argomento del quale si vedrà intanto accennato dalle seguenti parole, che il Torricelli stesso scriveva nel raccontar le vicende subite da' suoi varii problemi, proposti ai matematici di Francia:

« *Il centro di gravità della cicloide sta nell' asse e lo sega in proporzione di sette a cinque.* Avendo io avvisato la sola annunciazione di quest' ultimo teorema in Francia, mi fu risposto dal p. Mersenno, che allora era l' interpetre tra monsù Roberval e me, che io in questo avevo prevenuto il loro geometra Roberval, il quale circa alla cicloide aveva dimostrata ogni altra cosa, fuor che il centro di gravità, e il solido intorno all' asse: e che riconoscevano da me, come da primo inventore, questa invenzione del centro di gravità della cicloide, e che non credevano che geometricamente potesse esser vera la mia proposta. *Dubitat Robervallius noster an mechanice tantum centrum gravitatis inveneris, quod tamen geometrice falsum suspicatur. Docebis num demonstrationem habeas* con altre confessioni simili, come appare in lettere di propria mano del p. Mersenno, le quali sono appresso di me. In queste confessa apertamente che monsu Roberval non aveva quel teorema, se ne chiamano debitori a me, e parlando di Roberval dice queste parole: *Qui cum tuas postremas literas legisset praedictum centrum gravitatis tibi debere fatetur qui primus invenisti,* e mi prega più di una volta, acciò che io voglia mandargli la dimostrazione, con promettermi che si sarebbe messa fra quelle di monsù Roberval, e così per l' appunto seguì. »

« Io subito gli mandai, e questo fu la state del 1644, in una lunga scrittura, non solo la dimostrazione del centro di gravità, ma anco la dimostrazione del teorema seguente, poichè serviva per lemma alla dimostrazione mia: *Se due figure piane saranno girate intorno a due linee come assi, gli solidi fatti dalla revoluzione averanno fra di loro la proporzione composta della proporzione, che hanno le figure piane genitrici, e della proporzione, che hanno le distanze del centro di gravità delle medesime dall' asse della revoluzione.* Essi hanno tardato due anni a rispondere, ed ora, dimenticati delle lettere passate, e confidando che io, avendole sprezzate, non le abbia più, scrivono che le predette dimostrazioni, mandategli da me a loro istanza, le avevano un pezzo fa. Ora si sta controvertendo questo punto, e

se essi persisteranno in dire che, avanti a me avevano le predette due dimostrazioni, io sono risoluto di far riconoscere le lettere, le quali sono notissime a molti in Italia, e stamparle, insieme con le ragioni mie, acciò il mondo veda che furto vergognoso hanno tentato di farmi » (MSS. Gal. Disc., T. XXXII, fol. 39).

Troppo semplici bisognerebbe dire i nostri Lettori, se credessero, come alcuni hanno fatto, che sia decisa la sentenza così dietro le ragioni dette a favor suo da uno solo dei litiganti. Ascolteremo altrove anche l'altra parte, e, se non c'inganniamo, sarà allora che la Storia ci avrà dato della causa cognizione perfetta, pronunziato finalmente il giudizio secondo giustizia. Intanto, messa la proposizione del centro di gravità della cicloide in forma, per aggiungersi a questo trattato, vediamo come l'Autore l'avesse dimostrata.

« PROPOSIZIONE LVI. — *Centrum gravitatis cycloidis dividit axem ita, ut pars ad verticem terminata sit ad reliqua ut 7 ad 5.* »

Vi è premesso un lemma simile, e di non men facile dimostrazion di quell' altro, che in primo luogo precede al secondo teorema *De dimensione Cycloidis* (Op. geom., P. II cit., pag. 87): il detto lemma è tale:

« Si super lateribus oppositis alicuius parallelogrammi rectanguli ABCD (fig. 233), duo semicirculi descripti sint, figuram mixtam AEBCFD *arcuatum* appello, lineasque rectas AD, BC ipsius bases. Quando vero arcuatum iam dictum sectum fuerit ab aliqua recta EF, basibus parallela, utramque figuram a sectione factam *arcuatum* item appello. »

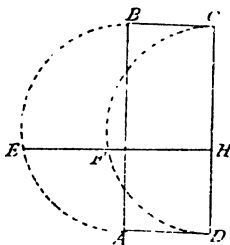



Figura 233.

« Unumquodque arcuatum aequale est rectangulo super eadem basi, et sub eadem altitudine constituto: facile probatur hoc per subtractionem, additionemque. Ergo patet quod arcuata, super aequalibus basibus constituta, erunt inter se ut altitudines. »

« Denique si alicuius arcuati AEFD altitudo HD bifariam secetur in I, suppono centrum gravitatis arcuati esse in ea linea, quae per I ducitur aequidistanter basibus arcuati. Quod quidem utraque ratione, nova veterique, facile probari potest: facilius tamen concedi et omitti » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIV, fol. 275).

Che per semplice addizione e sottrazione sia veramente la cosa dimostrabile, resulta, chiamando A l'arcuato, dall'equazione $A = \frac{\pi\ BA^2}{2} + BI\ .\ IH - \frac{\pi\ CD^2}{2} = BI\ .\ IH$. E ciò che del tutto essendo vero altresì delle parti corrispondenti, sarà l'arcuato CBEF uguale al rettangolo BH, e l'arcuato ADFE uguale al rettangolo AH: ond'è che sulla linea, condotta dal mezzo di HD parallela alla base comune, si troverà il centro di gravità dell'una e dell'altra figura.

Se ora dell'emicicloide ABCD (fig. 234) si divida in F, nel mezzo, la semibase AD, e sopra il diametro FG si disegni una metà del circolo geni-

tore, e poi dal punto B, dove la circonferenza di lui sega la cicloide, si conduca la BE parallela alla base; è manifesto che questa passerà per i centri L, E, e che con una tal costruzione si verrà lo spazio cicloidale a dividere in quattro parti, che sono: il semicircolo CHD, l'arcuato BHDF e i due trilinei CBH, ABF. L'arcuato, che è per il precedente lemma uguale al rettangolo FE, ossia a FD quarta parte della circonferenza moltiplicata per il raggio ED, sarà dunque uguale a mezzo il circolo CHD: e perchè tutto lo spazio si compone di tre tali mezzi circoli, dunque i due trilinei insieme equivarranno al terzo.

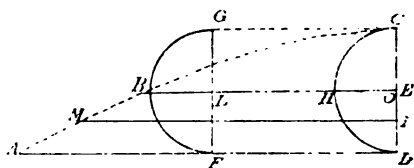



Figura 234.

Oltre alle proporzioni delle aree di due delle parti componenti, sappiamo anche il centro di gravità in quale ordinata egli sia, e il centro di CHD semicircolo essere in EB, e dell'arcuato in IM. E ciò tanto basta, senza che sia determinato in quelle linee il punto preciso, perch' essendo la presente invenzione rivolta, non alla mezza cicloide particolarmente, ma alla cicloide intera; basta a noi sapere dove la linea, che ricongiunge i centri di gravità delle due parti in distanze uguali dall'asse, sega l'asse stesso: nel qual punto della sezione ha in ogni modo a ritrovarsi il centro di gravità del tutto. Si riduce dunque il negozio a dimostrare in quale ordinata si trovi il centro di gravità dei due trilinei, intorno a che tutto si affaticò il Torricelli a quel modo, e con quella riuscita, che i Lettori qui appresso intenderanno.

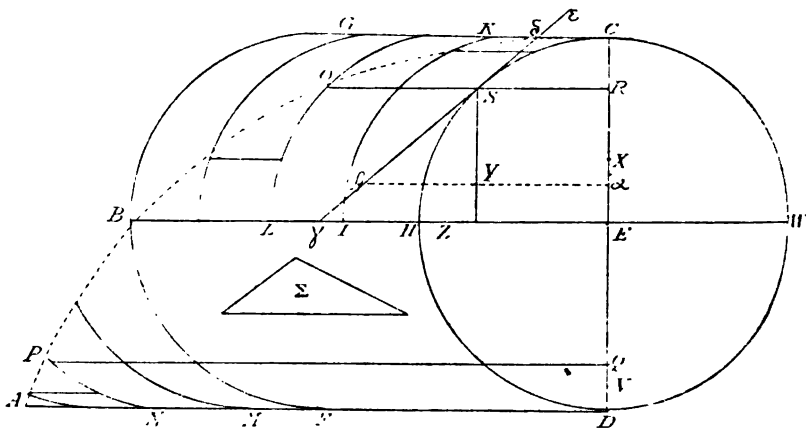



Figura 235.

« Esto dimidium lineae cycloidis ABC (fig. 235), cuius axis CD, basis vero sit AD, et ordinata, per punctum axis medium, sit EB. Transeat autem per B circulus genitor FBG, contingens basim in F lineamque CG in G. Patet quod aequales erunt AF, FD, nam, cum arcus FB, BG quadrantis sint,

recta AF aequalis est arcui BF: recta vero GC aequalis est arcui GB, utraque ob naturam cycloidis primariae. Cum vero latera opposita arcùati FBHD aequalia sint, nempe BH, FD erunt aequales, et rectae AF, BH. Secetur itaque utraque illarum in partes quotcumque aequales, et erunt in recta BH partes totidem quot sunt in AF. Transeat iam per unumquodque sectionum punctum peripheria circuli genitoris, et super singulis basibus HI, IL, etc., item super singulis basibus FM, MN, etc., concipiantur constituta arcuata usque ad cycloidem lineam, ita ut arcuata tangant, sed non excedant lineam cycloidalem. Manifestum est quod numerus arcuatorum, quot sunt in trilineo ABF, aequalis erit numero arcuatorum, quot sunt in trilineo BCH, nam super singulis partibus rectae AF, excepta extrema quae terminatur ad A, item, super singulis partibus rectae BH, excepta extrema quae terminatur ad B, singula arcuata erecta sunt. Dico universa huiusmodi arcuata centrum commune gravitatis habere in recta BE, quae per medium axis punctum in cycloide applicatur. »

« Sumantur enim duo quaelibet ex praedictis arcuatis MP, IO, quorum bases NM, LI aequaliter remotae sunt a punctis A et B: tum producantur ordinatim PQ, OR, ducaturque ST parallela ad axem, et secentur bifariam QD in V, RE in X, ST in Y, et HT in Z. Jam, ob naturam cycloidis, arcus OK aequalis est rectae KC, sed quadrans LK rectae GC: ergo reliquus arcus LO rectae GK aequalis erit, sive rectae BL, sive rectae AN, ob suppositionem, bases enim sumptorum arcuatorum aequaliter distant ab A et B punctis; sive arcui PN, ob cycloidem. Ergo, cum aequales sint arcus OL, PN, aequales erunt eorum sagittae, sive sinus versi HT, QD, quod memento. »

« Quoniam tota HW, et tota HE est ut ablata HT ad TZ, nempe dupla, erit reliqua TW dupla reliquae ZE. Arcuatum vero MP, ad arcuatum IO, est ut altitudo QD ad ST, sive ut HT ad TS, sive, ob circulum, ut TS ad TW, sive, sumptis subduplis, ut TY ad ZE, sive, sumptis aequalibus, ùt XE ad EV. Est autem centrum gravitatis arcuati MP in linea applicata ex V, et centrum arcuati OI est in linea applicata ex puncto X, ostendimusque arcuatum MP, ad IO, esse ut recta XE ad EV, reciproce. Propterea commune illorum centrum erit in recta BE, ubicumque tamdem sit. Sic ostendetur centrum omnium reliquorum, si bina sumantur, ea lege ut sumptorum bases aequaliter distent a punctis A et B; ostendetur, inquam, centrum gravitatis omnium esse in eadem recta BE. Propterea et commune centrum gravitatis universorum, simul sumptorum, erit in BE. »

« Amplius, dico commune centrum gravitatis duorum trilineorum ABF, BCH esse in eadem recta BE. Si enim possibile est, ponatur extra rectam BE, ubicumque, puta β. Ducatur ordinatim recta $\alpha\beta$. Tum inscribantur intra ipsa trilinea duae figurae, constantes ex arcuatis aeque altis, et numero aequalibus, utrimque, ita tamen ut trilinea ipsa, ad differentiam, quae inter ipsa et inscriptas figuras est, maiorem habeant rationem, quam CE ad Eα. Quod autem hoc fieri possit, constat: nam, supponamus ita esse duo trilinea, ad aliquod spatium Σ, uti est CE ad Eα: tum inscribantur intra ipsa trili-

nea duae figurae, constantes ex arcuatis aeqealtis, ita ut defectus figurarum inscriptarum a trilineis minor sit spatio Σ. Tunc enim erit ratio trilineorum, ad differentiam, maior ratione CE ad Eα. »

« Factum ergo sit, supponamusque inscriptas in trilineis esse duas figuras, ex arcuatis compositas, uti iussum est. Ex demonstratis, erit centrum gravitatis incriptarum figurarum in recta BE. Esto illud punctum quodcumque γ, ducaturque recta $\gamma\beta$, et extendatur. Fiat deinde ut ipsa duo trilinea ABF, BCH, ad praedictam differentiam, ita recta quaedam $\varepsilon\gamma$ ad $\gamma\beta$: patet quod recta $\varepsilon\gamma$ maior erit quam $\delta\gamma$, nam ratio $\varepsilon\gamma$, ad $\gamma\beta$, eadem est ac ratio trilineorum ad differentiam, quae quidem ratio, per constructionem, maior est ratione CE ad Eα: hoc est ratione $\delta\gamma$ ad $\gamma\beta$. Ergo recta $\varepsilon\gamma$ maior est quam recta $\delta\gamma$. Dividendo itaque, erunt figurae inscriptae in arcuatis constantes, ad illam differentiam, ut recta $\varepsilon\beta$ ad $\beta\gamma$. Sed β centrum gravitatis est totius, et γ figurarum inscriptarum; ergo ε erit centrum gravitatis differentiae, absurdum. Non est ergo centrum gravitatis trilineorum extra rectam BE, sed in ipsa, q. e. d. » (ibid., fol. 275, 76).

Essendosi così dunque dimostrato che il centro di gravità d'ambedue i trilinei è sopra l'ordinata BE (rivolgendo l'occhio indietro sulla figura 234) in E dunque, sull'asse, saranno i centri di gravità di questi, come degli altri due trilinei a questi uguali, che son dentro l'altro spazio cicloidale: e in E, centro della figura, sarà pure il centro di gravità del circolo intero, a cui i detti quattro trilinei, e i due arcuati col centro comune in I, sono uguali. Delle tre pari grandezze dunque, delle quali si compone lo spazio cicloidale, due pendono in E, e una in I, ond'è che, se la libbra EI si divide ugualmente in tre parti, due delle quali ne abbia IO, e la terza EO; in O sarà il centro di gravità del tutto, ossia della Cicloide. Se poi anche ID nello stesso modo si tripartisca, e in sei, come riman divisa questa metà, si divida parimente anche l'altra metà dell'asse; è manifesto che, delle dodici parti, CO ne contien 7, e OD 5, come già il Torricelli annunziava in principio, e in fine alla sua dimostrazione ora conclude con queste parole:

« Praeterea, cum arcuatum FBHD aequale sit rectangulo FLED, et semicirculus CHD eidem rectangulo aequalis sit; aequales erunt inter se tres figurae, nempe semicirculus CHD, arcuatum FBHD, et reliqua duo trilinea ABF, BCH simul sumpta. Secetur ED bifariam in I, et EI in tres partes aequales EO, OP, PI: manifestum est quod centrum gravitatis arcuati FBHD est in applicata ex puncto I, et reliquarum duarum magnitudinum, nempe semicirculi trilineorumque, centrum gravitatis est in applicata BE, estque arcuatum FBHD, ad reliquas figuras, subduplum, hoc est ut EO ad OI reciproce. Ergo centrum gravitatis compositae emicicloidis erit in applicata, quae per O ducitur. Propterea centrum gravitatis integrae cicloidis erit ipsummet punctum O. Quod autem CO ad OD sit ut numerus 7 ad 5, manifestum est ex imperata divisione » (ibid., fol. 276).

CAPITOLO VI.

Di varie altre cose di Meccanica lasciate dal Torricelli

SOMMARIO

I. Di alcune proposizioni relative al trattato *De motu*. — II. Di alcune altre proposizioni relative al trattato *De momentis*. — III. Del modo meccanico di condur le tangenti, e di varii altri teoremi di Meccanica nuova.

I.

Se non avesse il Torricelli lasciato altro di manoscritto che le proposizioni dei centri di gravità, delle quali nel precedente capitolo ci siamo studiati di ordinare e di esporre la storia, basterebbe questo solo per giustificare le sollecitudini del principe Leopoldo de' Medici, il quale, persuasosi che fossero quelle carte non intelligibili che al loro proprio autore, e rappresentative così informi di un disegno, che nessun altro saprebbe mettere in esecuzione; avrebbe voluto che nella Biblioteca laurenziana fossero custodite, dentro un' arca fatta fabbricare con regia munificenza, le preziose reliquie. Lodovico Serenai però, benchè fossero morti il Cavalieri e il Ricci, che il Torricelli stesso aveva designati della sua scientifica eredità esecutori testamentari, non aveva perduta affatto la speranza di veder que' teoremi, in qualche parte compiuti e in qualche altra illustrati, messi in ordine di trattato così, da supplire nel miglior modo possibile a quella perdita, che da tutti si deplorava. Aveva il verde di una tale speranza fondate le sue radici nella perizia delle cose, e nella affezione che, come discepolo verso l' autore di loro, tutti riconoscevano nel Viviani. Da lui perciò i Matematici di Europa, i quali avevano con tanto applauso e con tanta ammirazione accolte le Opere geometriche stampate nel 1644, aspettavano di veder sodisfatti i loro desiderii.

E quasi fosse divenuto intollerabile ogni più lungo indugio, Erasmo Bartholin, che trattenendosi in Italia aveva con lo stesso Viviani contratta particolare amicizia, veniva da Padova con sue lettere sollecitando il fiorentino amico, perchè gli volesse intanto trascrivere la nota degli argomenti, intorno a che verserebbero le opere postume del Torricelli. Il qual desiderio era sodisfatto così, con lettera del dì 4 Settembre 1655 da Firenze:

« Invio a V. S. la qui inclusa nota delle opere postume originali del signor Torricelli, che, dalla morte di esso in qua, si trovano appresso il signor Lodovico Serenai, il quale, per ratificare in parte al desiderio e alla curiosità di V. S., ha trascritto dal proemio del libro *Delle proporzioni* quant'ella vede in proposito del trattato *De lineis novis,* che il medesimo signor Torricelli prometteva di dar fuori. Non so già se l'improvvisa morte di lui gli abbia tolto il poter colorire e perfezionare così peregrini e maravigliosi disegni, quali egli va leggermente toccando in detto suo proemio, non avendo io avuto per ancora appresso di me copia di alcun foglio di detta materia. Dubito però che, per essere i primi abbozzi ed i primi delineamenti di così alte meditazioni, ci sia, oltre al disordine, ed errori e imperfezioni dell'opera stessa, la quale forse non ha finita e dimostrata in ogni sua parte, ma solo in molti luoghi accennata. »

« Alle due prime necessità procurerò di ovviare, nella maniera che ho fatto intorno alla copia di altre cose geometriche del medesimo Autore, che ultimamente ho avuto alle mani, avendogli dato il miglior ordine a me possibile, per essersi trovate confusissime, correttele ne' luoghi difettosi, e nei trascorsi di penna, soliti farsi per lo più nelle prime bozze, tolte via quelle che sono già stampate da lui medesimo o da altri, e che *ad institutum non faciunt,* e ridotte finalmente a vero senso quelle, che per avventura propongono o concludono il falso. »

« Quanto alla terza, lascerò che venga supplito da altri, assai più di me esercitato in queste nuove speculazioni, con dimostrare e aggiungere ciò che potesse mancarci, trovandomi da dieci anni, o piuttosto dalla morte del signor Galileo mio maestro in qua, per varie disavventure e pessime contingenze, nemici, domestici affari, etc., quasi affatto alienato da simili studi, che per altro sariano proporzionatissimi al genio mio, se non alla mia inclinazione. Intanto V. S., insieme con gli altri acutissimi geometri d'Europa, aspetti in breve la pubblicazione di tali opere, e compatisca a qualche poca di dilazione, non essendo in potestà mia il disporre delle altrui cose » (MSS. Gal. Disc., T. CXLII, fol. 4).

Quella dilazione però, che si prometteva si poca, era giunta a ben ventitre anni, dopo il qual tempo così scriveva il Viviani stesso in una sua lettera del dì 7 Giugno 1678 al p. Antonio Baldigiani gesuita, che attendeva allora a scrivere gli elogi di Galileo, e de' più illustri discepoli di lui: « Venendo ora all'acutissimo geometra Torricelli, il quale, benchè di nazione non toscano, illustrò mirabilmente il posto del suo predecessore Galileo, ed in conseguenza la nostra Toscana con le sue speculazioni; io son pur certo che

di questo ancora, essendovi assaissimo da commendare, assai ella e felicissimamente avrà detto. Di questo le Opere pubblicate sin ora son comprese in un tomo in quarto, stampato in Firenze nel 1644, ecc. » (ivi, fol. 272), e seguitando a enarrare i titoli delle Opere varie, poi così soggiunge:

« Le opere rimanenti da stamparsi ora saranno sotto questo titolo: EVANGELISTAE TORRICELLI FAVENTINI — MATHEMATICI OLIM SERENISS. — FERDINANDI II. M. E. D. — OPERA POSTHUMA MATHEMATICA — QUAE EXTANT OMNIA — IN TRES PARTES DIVISAS — QUARUM PRIMA, STYLO VETERUM CONTINET — *Miscellanea circa magnitudines planas, curvas, ac solidas — Mechanica quaedam — De tactionibus et de proportionibus libros cum enarratione quorundam problematum geometricorum.* — SECUNDA CONTINET, INDIVISIBILIUM METHODO, *Stereometria et eentrobaryca.* — TERTIA, *Tractatus de lineis novis.* »

« In quarto luogo saranno alcune *Lezioni Accademiche* italiane e Lettere familiari. Ciò che io abbia faticato e contribuito a quest' Opere si conoscerà apertamente, ma non mai tanto, quanto da chi le vedde disordinate e imperfette » (ivi).

Sono ormai passati, dalla data di questa lettera al Baldigiani, dugento e vent' anni, e delle opere postume del Torricelli, quivi annunziate e solennemente promesse come di prossima pubblicazione, non si son vedute che le Lezioni accademiche, per cura di tutt' altri che del Viviani. Erano forse una menzogna le sue promesse, o era vero quel che dissero alcuni, che cioè vi si trovasse contro sua voglia impegnato, e che per invidia e per rivalità col Torricelli menasse così la cosa in lungo, da riuscire a eludere i desiderii del Serenai, e i comandi del principe Leopoldo?

La calunnia si dissipa senz' altro, osservando che non fa maraviglia se mancò al Viviani, per curare le opere altrui, quel tempo o quella comodità, che non seppe trovar per le proprie: benchè non si venga a togliere con ciò qualche dubbio, che rimarrebbe intorno alla sincerità del titolo, che tenevasi preparato per mettersi innanzi alla stampa del libro. S' avevano veramente in ordine tutti i trattati matematici secondo le tre parti, nelle quali il diligente compilatore pensava di distribuire le opere postume del Torricelli? Si risponderebbe di no, se la maggior parte de' fascicoli non manca ne' raccolti volumi manoscritti. E fra quei che ci sono abbiamo avuto occasione nel precedente capitolo di parlare dei centrobarici, confessando di averli trovati così negligentemente condotti nelle parti loro più sostanziali, da non sembrar credibile che avesse permesso di stamparli a quel modo il Viviani. Il medesimo giudizio è, secondo noi, da fare di quegli altri trattatelli, per i quali si richiedeva l' opera del compilatore in compiere, in ordinare e in illustrare i varii teoremi. E perchè fra questi i più importanti per noi son quelli di argomento meccanico, intorno ad essi soli restringeremo le nostre osservazioni.

All' argomento ora detto appartiene principalmente quel trattatello intitolatosi dal Viviani *De motu ac momentis,* di cui ci è rimasto un abbozzo informe, e che, sebbene abbia ripescato per tutto il campo della scienza del

moto, de' solidi non solo, ma e de' liquidi; non giunge più che a diciassette o a diciotto proposizioni. Ci sarebbe ne' manoscritti torricelliani materia da raddoppiarne senza dubbio, e da triplicarne, non forse il numero solo ma l' importanza, e noi avremmo anche volentieri presa a fare questa fatica, se l' ufficio nostro di storici, e non di editori, non ci consigliasse di tener, nella scelta e nell' ordine dei teoremi, quelle ragioni, dalle quali appariscano i progressi fatti fare o preparati alla scienza meccanica dal Torricelli. Quelle cose perciò, che si riferiscono alle leggi e alle proprietà del moto in generale, abbiamo voluto presentar separate da quell' altre, che si riferiscono particolarmente ai momenti, e sacrificando all' ubertà della messe, che volentieri lasciamo a chi vorrà dietro a noi tornare a respigolare nei manoscritti; ci siamo solamente curati di fare apparir come il pensiero dell' Autore s' ingrada via via, e si estende nella varietà degli esempi. Tende efficacemente a conseguire il fine, che ci siamo proposti, la terza parte aggiunta alle due dette dei moti e dei momenti, nella qual terza parte si metteranno i teoremi relativi a quella, che dai Francesi, quasi un secolo dopo, si appellò col nome di Meccanica nuova.

I primi esempi, che da noi qui si scelgono per il trattatello *De motu*, si tenevano dall' Autore preparati per inserirsi, e per aggiungersi come corollari alle proposizioni del primo libro *De motu gravium*, quand' occorresse di far dell' opera una ristampa, e perciò il risaperli non par che serva se non a sodisfare alla curiosità degli eruditi. Nè, trattandosi di un Torricelli, si può così fatta erudizione reputare aliena dagli uffici della Storia, i quali sarebbero in ogni modo scusati, in grazia di quegli altri uffici, ch' ella passa a fare di maggiore importanza, mostrandoci quel che avesse speculato il Torricelli stesso intorno all' impeto dei punti geometrici in descrivere il circolo e l' iperbola, e sull' esempio loro altre curve; intorno al dimostrar che la catena, insenandosi, s' adatta alla figura di una parabola, e intorno al crear nuove leggi nel moto accelerato, per cui le parabole descritte dai proietti naturali si variano in parabole di qualunque potenza, descritte da corpi appartenenti a mondi immaginari, ma ai quali pure la Geometria prescrive, non men che per il presente nostro mondo reale, certezza impreteribile di leggi.

Cominciando dunque dai primi promessi esempi ci occorre a notare nel nostro Autore un concetto nuovo, per concluder che la forza in sè stessa è infinita: imperocchè, diviso il subietto materiale in ch' ella si propaga, in parti minutissime infinite, non perciò rimette nulla del suo primo vigore, ma si mantiene in ciascuna divisione intera, e sempre uguale a sè stessa. Ciò si dimostra particolarmente avvenire nel tirare una corda, fatta però un' ipotesi, la quale non si vede come possa facilmente verificarsi nella materia.

« Proposizione I. — *Che la forza sia infinita.* »

« Sia il gran sasso A (fig. 236) e sia attaccata ad esso una lunga corda BG. Io suppongo che un uomo abbia forza di tirare la corda BG, cioè di conferire a tutta essa corda una tal tensione, qualunque ella si sia: e questo si vede per esperienza. »

« Io considero qui primieramente che tutta la corda BG averà la medesima tensione in ogni sua parte, cioè tanto sarà tirata nel principio B, quanto nel mezzo D, e quanto verso il fine C. Questo è assai chiaro, astraendo però da qualche varietà, che potesse fare il proprio peso della corda, ed anco astraendo dalla differenza, che potesse nascere dal toccamento della corda sopra il piano a lei sottoposto, che però la considereremo in aria, e senza la gravità propria. Non di meno si può con questo discorso dimostrar così: »

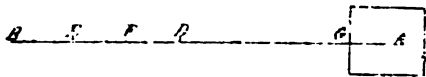



Figura 236.

« L'uomo traente conferisce al punto B tanta forza, quanta ne ha esso uomo: il punto B tira poi con tanta forza il punto E suo congiunto, quanta ne ha esso B, cioè quanta è la forza dell'uomo, e il punto E tira il punto F suo congiunto con quanta ne ha esso E, cioè quanta è la forza dell'uomo, e così si può andar discorrendo di tutti i punti, cioè di tutta la corda BG, e concluderemo che l'ultimo punto G, e perciò il gran sasso A, vien tirato con altrettanta forza per appunto con quanta vien tirato il punto B, cioè con la forza dell'uomo traente, non accresciuta nè diminuita. »

« Stabiliremo dunque questo principio: che qualunque volta avremo una lunghezza, cioè una estensione di punti continuati, e che il primo di essi punti venga tirato e spinto con una tal forza, anco tutti gli altri successivamente saranno tirati e spinti con la medesima forza, senz'accrescerla o diminuirla, ma trasmettendola sino al fine. »

« Consideriamo poi che, se fosse possibile tagliar la corda BG in due parti, senza guastargli quella tensione, che ella aveva avanti fosse tagliata, e se si potesse attaccare la parte tagliata BE in F, e fosse vero che l'una e l'altra corda, tanto BE, quanto EF, ritenesse la medesima tensione di prima; sarebbe vero che il punto F verrebbe tirato, non più da una, ma da due forze uguali a quella dell'uomo traente. Nello stesso modo, chi facesse, non due parti della corda, ma dieci o cento, e le attaccasse tutte nel punto F, e ciascuna parte ritenesse la medesima tensione, che aveva la corda avanti fosse divisa in parti; certo è che il punto F sarebbe tirato con forza dieci, e cento volte maggiore di quella, dalla quale era tirato in principio. Gli altri punti poi susseguenti tutti sarebbero tirati dalle medesime forze, che vien tirato il punto F, e così per conseguenza il sasso ancora » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVII, fol. 123).

A questa, che intende ad esplicare la recondita natura della forza, faremo succedere un'altra proposizion generale, da premettersi alle dimostrazioni dei moti accelerati, conducendola dal principio degl'indivisibili. La detta proposizione è scritta *pro confirmanda prima Galilei,* e per mostrare a coloro, i quali non si fidavano del metodo del Cavalieri, come anche i punti, benchè indivisibili, hanno ragioni fra loro infinite, come tutte le altre terminate grandezze. « Quod puncta, et reliqua indivisibilia, così preavverte

l'Autore, habeant rationes inter se infinitas, sicuti habent magnitudines terminatae, atque divisibiles, mihi iam satis superque patet, quamquam semper sint indivisibilia » (ivi, T. XXXI, fol. 61).

« Proposizione II. — *Esto tempus AB* (fig. 237), *moveaturque mobile, et tempore AB percurrat rectas GF, OH, ted rectam GF currat motu aequabili, cum gradu velocitatis semper eodem AV, rectam vero OH currat motu non aequabili, cum gradibus velocitatis homologis ad lineas AC, sive ME; dico spatium OH, ad GF, esse ut figura ACDB, ad figuram AVDB.* »

Figura 237.

« Nam totidem sunt puncta in spatio GF, quot sunt in spatio OH: nempe totidem, quot fuerunt instantes eiusdem temporis, sed illa puncta sunt inaequalia. Jam, sumpto quolibet instanti temporis, puta M, sint puncta peracta hoc instanti ipsa L et N, eritque ut recta MI ad ME, hoc est, ut impetus, ita spatium L ad spatium N, et hoc semper. Suntque antecedentes aequales, ergo, ut AVDB ad ACDB, ita quantitas omnium punctorum GF, ad quantitatem omnium, nempe totidem punctorum OH, sive ita GF ad OH » (ibid.).

Che questa propriamente, nella sua universalità, confermi il vero della prima proposizione galileiana *De motu naturaliter accelerato,* è manifesto, perchè, se il moto comincia in D dalla quiete, e vanno le velocità crescendo a proporzione dei tempi, la DEC è una linea retta, e la figura DVC un triangolo. Se suppongasi inoltre che la linea EG, nel medesimo tempo AB, sia corsa con moto equabile, così cioè che i gradi delle velocità sian sempre i medesimi, e tutti uguali a VC, ultimo grado della velocità acceleratamente acquistata; sarà la figura AD doppia della DVC, e tale anco sarà l'uno spazio all'altro, come nella detta proposizione prima si dimostra da Galileo.

In tal proposizione, che si legge scritta nel terzo diologo delle due Scienze nuove, è noto come sia costituito uno de' fondamenti alle dottrine galileiane dei moti accelerati, ma il principale di quei fondamenti è nel Teorema così detto *meccanico,* il quale si voleva dal Torricelli illustrare nel modo che segue:

« Proposizione III. — *Qual si voglia gran peso da qualunque piccola forza può essere tirato su, per un piano elevato utcumque.* »

Figura 238.

« Sia nel piano dato l'orizontale AB (fig. 238), e ad essa la perpendicolare CE, e sia in E il peso dato, quale pongasi essere come EC, e la data forza sia come FH, minore di CD, perchè, se fosse come CD, moverebbe il peso per tutta la linea del piano dato. Facciasi dal centro E, con l'intervallo EC, il semicircolo ACB nel piano, e si tiri l'orizontale FI, e per la linea EI si potrà tirare il peso dalla forza FH,

ovvero IL, poichè, se il peso è come EC, ovvero EI, sarà in EI come IL, e però la forza IL lo agguaglierà. »

« *Corollario I.* — Di qui si ricava che le strade più oblique dei monti sono tanto più agevoli, quanto la IL è minore della CD, ovvero la IM della CE, essendo simili CED, IML. »

« *Corollario II.* — Però, quando l' angolo IEB sarà gradi 30, allora la salita per EI sarà la metà più agevole, che per EC, essendo il sino IM di gradi 30 la metà del sino toto EC: ovvero inferisci che la fatica della salita sarà come i sini degli angoli, che farà la strada con la orizontale. »

« *Corollario III.* — I pesi dei corpi nostri, e delle cose che porteremo, saranno per le strade EC, EI come CD, IL, ovvero, come CE, IM, che sono i sini suddetti » (ivi, T. XXXIII, fol. 87).

Questa proposizione la dicemmo semplicemente illustrativa del Teorema meccanico, la dimostrativa del quale è la prima del trattato stampato, la quale si conduce dal celebre principio che due pesi stanno allora fra loro in equilibrio, quando congiunti insieme, a rimoverli dalla loro prima stazione, il centro di gravità rimane sulla medesima linea orizontale. Condizioni di un tale equilibrio si dimostra esser che i pesi abbiano omologa proporzione con le lunghezze dei piani inclinati: che, se varia l' inclinazione, i pesi stessi necessariamente si muovono, e il Torricelli investiga così qual via si farebbe dal comun centro di gravità nel moto.

« Proposizione IV. — *Si plana AB, BC* (fig. 239) *fuerint utcumque inclinata, et gravia A, C aequalia, aequaliterque a puncto B remota; erit AC via centri gravitatis.* »

« Venerint enim in D et E, et erunt aequales AD, CE: dico centrum esse F. Agatur EH parallela ipsi BD: erit, ut CB ad BA, ita CE ad EH, vel DA ad EH. Sed, cum CB, BA sint aequales, erunt DA, EH aequales, et erunt parallelae. Quare EF, FD aequales erunt. Ergo etc. »

Figura 239.

« *Scholium.* — Quando vero gravia non sint aequalia, aptentur gravia ita, ut sit ut grave A ad grave C, ita AB ad BC, et erit iterum AC via centri. Moveantur usque in D et E: eruntque DA, CE aequales. At grave A, ad grave C, est ut AB ad BC, vel HE ad EC, vel HE ad AD, vel FE ad FD reciproce; est ergo F centrum » (ivi, T, XXXVII, fol. 72).

Vedremo, nel seguente trattato *De momentis,* anche più spiegatamente condotta questa proposizione, che sarà premessa per lemma ad altre proposizioni, ma per ora, proseguendo il divisato ordine nostro, raccoglieremo le poche cose seguenti, relative alle proporzioni che passano tra le velocità e i tempi de' mobili nei piani inclinati, quasi fragrante mazzolino di fiori, di che la Meccanica severa non sdegnerà ornarsene il seno.

« Proposizione V. — *Si duo circuli se se in infimo puncto tangant,*

erunt tempora per AB, DC (fig. 240), *aequalia. Item, cum tota tempora aequalia sint, et ablata ablatis, erunt reliqua BE, CE, etiam si non sint ex quiete, aequalia* » (ivi, T. XXXIII, fol. 82).

Figura 240.

Di ciò che è scritto, insieme con tant' altre cose messe alla rinfusa in quel volume, intitolato dal Torricelli *Campo di tartufi;* manca la dimostrazione, perchè forse troppo facile a ritrovarsi dietro i teoremi meccanici di Galileo, e la CVI del VII libro delle Matematiche collezioni, nella quale Pappo dimostra (ediz. cit., pag. 334) che le corde AB, ED son parallele, e perciò AC : BC = AD : BE. Ma, per le note leggi, stando i tempi come le radici degli spazi, cioè $T^{o}.AC : T^{o}.AD = \sqrt{AC} : \sqrt{AD}$, $T^{o}.BC : T^{o}.BE = \sqrt{BC} : \sqrt{BE}$, abbiamo $T^{o}.AC : T^{o}.BC = T^{o}.AD : T^{o}.EB$. Dunque essendo i tempi per AC, BC uguali, anco uguali saranno i tempi per AD, BE, come voleva dimostrarsi.

Che se le AC, BC intere sono isocrone, e isocrone le loro parti AD, BE; isocrone dovranno essere per conseguenza anche le DC, EC rimanenti: non inutile corollario, in cui la verità dimostrata da Galileo nel caso, che il mobile si parta in D e in E dalla quiete, si conferma, anche quando esso mobile abbia un moto antecedente, e quello per l' appunto, che ha il principio in A, B, sull' altra circonferenza di contatto.

« Proposizione VI. — *Si duo circuli se exterius tangant, in puncto sublimiori et infimo, erunt tempora AB, MD* (fig. 241) *aequalia.* »

La proposizione si dimostrerebbe speditamente dalla CII del citato lib. VII di Pappo (pag. 334), secondo la quale, essendo la AD parallela alla MB, se questa si prolunghi infino a incontrare in H la AH condotta parallela a MD; la figura HD sarà un rettangolo, e perciò AH = MD, e il tempo per l'una uguale al tempo per l' altra, ond' ei non restava al Torricelli che a invocare il lemma alla sua XIII stampata, per concluder senz' altro l' intento. E nonostante seguì una via più lunga e indiretta, dimostrando prima, per modo di lemma, che, tirata la BE parallela alla MD, le FE, ID erano uguali « nam, iunctis AD, DE, una eademque recta erunt, alias, continuata AD, faceret angulum rectum extra E, quod est absurdum » (MSS. Gal., T. XXXIII, fol. 82).

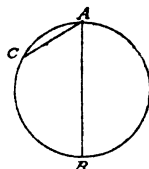
Figura 241.

Dalla dimostrata uguaglianza delle FE, ID, conclude il Torricelli il suo proposito, lasciati sottintesi i principii di mezzo, i quali si riducono a questi: ch' essendo i tempi per le FE, ID, e per le FB, IM uguali, saranno pure uguali i tempi per le intere MD, EB. Ma EB nel cerchio è isocrona al diame-

tro AB, dunque isocrona allo stesso diametro sarà la MD, ciò che doveva provarsi.

« PROPOSIZIONE VII. — *Si latus exagoni sit AC* (fig. 242), *erit velocitas, sive maximum momentum in AB, duplum momenti in AC, qui eodem tempore duplum spatium peragit* » (ivi, T. XXXVII, fol. 94).

Figura 242.

Infatti, per essere i tempi uguali, le velocità stanno come gli spazi. Ma lo spazio AB, diametro, è doppio dello spazio AC, lato dell'esagono; dunque anche la velocità per quella via sarà doppia alla velocità per questa.

« PROPOSIZIONE VIII. — *Si angulus A* (fig. 243) *fuerit angulus trianguli aequilateri, erit momentum in AC duplum momenti per AB* » (ibid.).

Esser A angolo del triangolo equilatero non vuol dir altro che esser di 60 gradi. Dunque, supponendosi AC verticale, e BC orizzontale, e perciò ACB angolo retto; sarà ABC 30 gradi. Si prolunghi AC di altrettanto in D, e si congiunga la DB: è manifesto che ABD è il triangolo equilatero. « Si fuerit AB dupla ipsius AC, erit angulus A angulus trianguli aequilateri. Producatur CD aequalis ipsi CA, et erunt aequalia latera BA, AD. Sed, per IV Primi, etiam BD aequatur ipsi BA; ergo etc. » (ibid.). E qui s'arresta il discorso del Torricelli, che facilmente si compie col seguente costrutto: Il momento o la velocità per AC, al momento o alla velocità per AB, sta come la AC alla AB. Ma AB è doppia di AC, dunque anche quella velocità nel perpendicolo sarà doppia a questa nell'inclinata, com'era il proposito di dimostrare.

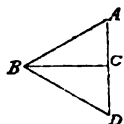



Figura 243.

Queste ultime quattro proposizioni non sono altro per verità che eleganze, preparate dal Torricelli per ornare il suo proprio, e il trattato di Galileo, e l'Autore stesso, in certe sue note interpolate nel manoscritto, le qualificava per bagattelle. Comunque sia, hanno ben altra importanza le proposizioni, che si soggiungeranno, incominciando da quelle intitolate *Dell' impeto de' punti.* L'origine, che queste speculazioni ebbero nel nostro Torricelli e nel Roberval comune, è manifestamente dallo studio della spirale di Archimede, intorno alla quale tratterremo il discorso più a lungo nella terza parte di questo capitolo, contentandoci di notar per ora che, così il Nostro come il Matematico di Francia, ammettevano, con il grande Maestro siracusano, che la resultante de' due moti, dai quali insieme composti viene a descriversi la curva, sia diretta secondo la tangente al punto della curva stessa, la quale proseguirebbe perciò indi il suo moto in linea retta.

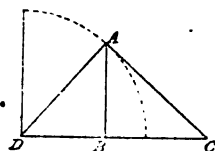



Figura 244.

« PROPOSIZIONE IX. — *Si recta AB* (fig. 244) *super DC perpendicularis semper existat, in eodemque plano, et moveatur motu progressivo aequabili, simulque aliquod ipsius punctum A moveatur in recta AB, ita ut velocitas puncti A, ad*

velocitatem lineae AB sit semper ut recta DB ad BA; punctum A circulum describet. »

« Esto enim tangens lineae curvae in A ipsa AC: et quia impetus puncti A versus B, ad impetum lineae AB versus C, est ut DB ad BA; erit etiam, ob leges motuum, AB ad BC ut BD ad BA: ergo angulus DAC rectus est, sed AD tangens; ergo figura circulus est » (ivi, T. XXXI, fol. 86).

È scritto in principio di questa, dalla mano dello stesso Torricelli: *Porta la conversa, perchè così non prova,* e la conversa si potrebbe formulare, e facilmente provare in questa maniera: *Nel punto mobile, che descrive il circolo, l'impeto discensivo al progressivo sta come il coseno, al seno dell'angolo dell'inclinazione.* Si consideri il punto A, nella medesima figura 244, con l'inclinazione ADB. Condotta la tangente AC, resultante del moto, le componenti di lei saranno AB misura dell'impeto D discensivo e DB misura dell'impeto P progressivo, onde avremo D : P = AB : BC. Ma i triangoli simili ABC, ADB danno AB : BC = DB : AB, dunque D : P = DB : AB: e di qui è che, sempre che si verifichi questa proporzione fra i moti descriventi una curva, la curva stessa sarà un circolo, come il Torricelli si proponeva di dimostrare nella sua diretta.

Intendono bene i Lettori come si sarebbe facilmente potuta applicare questa proposizione ai pendoli, per risolvere il problema, in cui si domanda secondo qual proporzione diminuisca la forza in tirare il filo, via via che il pendolo si rimove dal suo perpendicolo. Eppure non si vede balenar di ciò nessuna idea nella mente del Torricelli, per cui si rimase il Viviani in quelle incertezze, e poi si volse a seguitar quell'errore, da noi notato qui addietro, nella seconda parte del capitolo quarto.

Passa nella seguente il nostro Autore a dimostrar che gl'impeti puri, misurati in due vari punti del medesimo circolo, stanno reciprocamente come le loro tangenti. La dimostrazione, chiamati I.° A, I.° C (fig. 245) gl'impeti puri in A e in C, e chiamato I.° AD l'impeto progressivo equabile della linea AD; procede in questa guisa: Abbiamo per la precedente I.° A : I.° AD = BD : DA; I.° AD : I.° C = CE : EB, le quali due proporzioni moltiplicate termine per termine, danno I.° A : I.° C = BD . CE : DA . EB. Per la similitudine dei triangoli BAD, BAG e BCE, ECF è altresì BD : DA = BA : AG; CE : EB = FC : CB, dalla quale per moltiplicazione resulta BD . CE : DA . EB = BA . FC : AG . CB = FC : AG, d'onde I.° A : I.° C = FC : AG, come propone e dimostra il Torricelli nella seguente

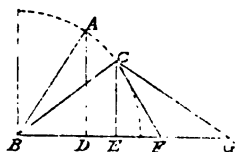



Figura 245.

« Proposizione X. — *Impetus descendens purus in A* (nella medesima figura passata), *ad impetum descendentem purum in C, est ut tangens CF ad AG.* »

« Nam impetus in A ad impetum lineae AD, est ut BD ad DA: impetus autem lineae, qui semper idem est, ad impetum puncti C est ut CE ad EB. Ergo impetus descendens puncti A, ad impetum in C, rationem habet

compositam ex ratione BD ad DA, et ex ratione CE ad EB, sive, ex ratione FC ad CB, et ex ratione BA ad AG. Sed medii termini CB, BA sunt aequales, ergo patet propositum » (ibid.).

« PROPOSIZIONE XI. — *Si recta AB* (fig. 246), *cum eadem semper inclinatione insistat super CD, moveaturque motu aequabili in eodem plano, et punctum aliquod ipsius moveatur sursum vel deorsum, ita ut velocitates sint inter se, ut quadrata distantiarum ipsius a recta CD; hyperbola erit* » (ibid.).

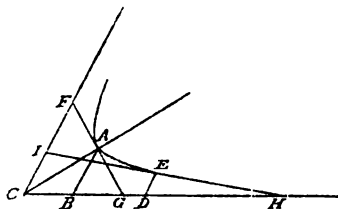



Figura 246.

Porta la conversa, si legge notato in margine nel manoscritto. E infatti si dimostra che, supposto essere la curva un' iperbola, i punti nel descriverla si muovono con la legge assegnata. Di qui è che ogni volta si verifichi nei punti mobili una tal regola di andamento, si conclude dover essere un'iperbola la linea descritta dal loro moto.

« Esto hyperbola AE, cuius axis CA, asymptoti CF, CH, et sit punctum A, quod supponimus pervenisse ad E. Ducantur tangentes FG, IH. Erit impetus compositus puncti E secundum lineam EH. Ergo impetus progressivus lineae, ad impetum descendentem puncti, erit ut DH ad DE (applicandovi la regola del parallelogrammo delle forze come si vedrà meglio appresso) sive ut CD ad DE, sunt enim aequales, ob hyperbolam, IE, EH, et CD, DH. Jam impetus descendens in A, ad progressivum in A, aequalis est, nempe ut AB ad BC: progressivus vero, ad descendentem in E, est ut CD ad DE. Ergo ex aequo impetus descendens in A, ad descendentem in E, rationem habet compositam ex ratione AB ad BC, et CD ad DE. Ergo est ut CD ad DE, nam termini AB, BC sunt aequales, sive ut rectangulum CDE ad quadratum DE, sive ut rectangulum CBA, vel quadratum BA, ad quadratum DE, quod volebam. »

« *Scholium.* — Quando est hyperbola, cum praedictis iis velocitatum legibus punctum movetur: propterea, etiam quando movetur ex se, hyperbolam describet: alias idem punctum motum iisdem semper velocitatibus per diversas inter se lineas curreret, quod probatur esse absurdum » (ibid., ad. t.).

Quel detto che la Natura è geometrica non par s'illustri con altro più efficace esempio, che col descriver ch' ella fa al proietto, il quale può riguardarsi come condensato in un punto, linee curve, con regole simili a quelle, che nelle due precedenti proposizioni il Geometra ha speculato. E perchè la Natura sempre all'Arte è di nuove invenzioni maestra, immaginiamo, pensava il Torricelli, che le velocità non crescano secondo la semplice proporzione de' tempi, come Galileo dimostrò nei gravi sulla superficie di questo nostro Globo cadenti, ma secondo la proporzion de' quadrati, dei cubi, dei quadrato quadrati, o di qualsivoglia altra potenza: è certo che dal moto, composto del descensivo con tali leggi e del progressivo equabilmente per l'orizzonte, resulteranno descritte curve appartenenti senza dubbio alla medesima

famiglia delle parabole quadratiche o naturali. Intorno a che il Torricelli dimostrò che, se la velocità è quadratica, la parabola che descriverebbe il proietto è cubica: se la velocità è cubica, la parabola è biquadratica, e in generale, se la velocità è di grado n, sarà di grado $n+1$ la potenza della parabola relativa. Sebbene sia il concetto assai pellegrino, è nonostante di molto facile dimostrazione, come apparisce dal seguente esempio, applicato al caso della parabola cubica, premessovi questo problema per lemma:

Figura 247.

« Si mobile moveatur deorsum tempore AC (fig. 247), et tempore AB, et augeatur velocitas quadratice, quaeritur ratio spatiorum. »

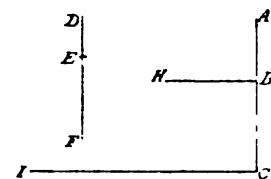
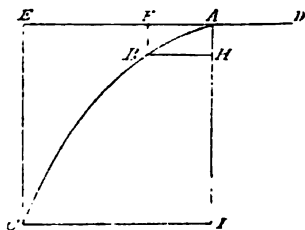
« Dico sic: Spatia peracta habent rationem compòsitam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum. Sint spatia peracta AB, AC, tempora vero DE, DF. Supponamus mobile in B et in C converti horizontaliter. Jam impetus in B, ad impetum in C, erit ut quadratum temporis DE, ad quadratum DF. Ergo spatium BH, factum tempore casus AB, ad spatium CI, factum tempore casus AC, rationem habebit compositam rectae DE ad DF, et quadrati DE ad quadratum DF. Ergo spatium BH ad CI erit ut cubus DE ad DF. Sed ut spatia BH, CI, ita sunt spatia AB, AC, ipsorum submultiplicia aequaliter, ergo patet etc. »

« Proposizione XII. — *Cadat mobile aliquod horizontaliter concitatum ex plano DA* (fig. 248), *ita ut duos impetus habeat, alterum aequabilem horizontalem versus partes EC, alterum descendentem acceleratum quadratice. Dico parabolam cubicam fieri.* »

Figura 248.

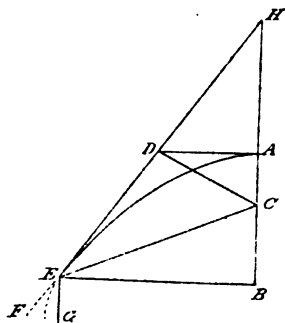
« Hoc ex dictis patet. Nam consideretur mobile in quibuslibet punctis B, C. Cum impetus horizontalis externus sit et aequabilis, erunt CI, BH ut tempora casuum. Sed spatia peracta EC, FB sunt ut cubi temporum; ergo cubi rectarum CI, BH erunt ut EC, FB, sive ut IA ad AH » (ibid., T. XXXI, fol. 341).

Perchè dunque la proposta verità, dato il lemma, è patente, si può quello stesso lemma dimostrare nella sua universalità, d' onde ne derivi la universalità sua anche la proposizione ora scritta. Chiamati S, S′, V, V′, T, T′ due spazi, due varie velocità, due vari tempi, abbiamo, per le note leggi del moto, $S : S' = V \cdot T : V' \cdot T'$. Che se l' accelerazione è lineare, ossia se $V : V' = T : T'$, sarà $S : S' = T^2 : T'^2$; se l' accelerazione è quadratica, e perciò $V : V = T^2 : T'^2$, sarà $S : S' = T^3 : T'^3$: se poi l' accelerazione è cubica, e $V : V' = T^3 : T'^3$, sarà $S : S' = T^4 : T'^4$, e in generale, se l' accelerazione è di grado n, sarà $S : S' = T^{n+1} : T'^{n+1}$. Cosicchè, facendone l' applicazione alla parabola, rappresentata dalla stessa ultima figura, sarà l' equazione di lei espressa da $AH : AI = HB^{n+1} : IC^{n+1}$.

Il concetto, che rifulge assai chiaro per la Geometria di Euclide, e secondo il quale sarebbero le varie figure descritte da un punto, che con certe determinate leggi si muove; ha nella precedente del Torricelli l'applicazione più bella, che si potesse fare alla genesi meccanica delle infinite parabole, comprese fra il triangolo e il parallelogrammo. Di qui si vede che la Geometria è meccanica, come la Meccanica è geometrica: anzi può dirsi che la Scienza, della quale scriviamo la Storia, è una Geometria particolare, di cui i punti mobili, che descrivono le figure, son gravi, soggetti cioè per naturale necessità a ubbidire a certe leggi proprie del moto, dipendenti dall' attrazione centrale della Terra, cosicchè i proietti sulla superficie di lei, tra le infinite parabole possibili, descrivono le quadratiche.

Si può dunque riguardar la proposizione poco fa dimostrata come il principio generalissimo, a cui s' informa il quarto dialogo delle due Scienze nuove, che, non potutosi maturare da Galileo, in quegli ultimi anni della sua vecchiezza, fu mirabilmente illustrato e compiuto dal Torricelli. Egli fu il primo ad applicar la parabola ai moti naturali, come Galileo stesso l' aveva applicata ai moti violenti, e son di questi nuovi teoremi così pieni i due libri *De motu gravium* fra le altre Opere geometriche di lui già stampati, da non avere speranza di trovarne dei rimasti indietro nei manoscritti. Non ci sembra nonostante che siano di leggera importanza quest' altre poche cose che soggiungiamo, la prima delle quali appartiene a quel libretto indirizzato in forma di lettera a Raffaello Magiotti, il qual libretto, che insieme col trattato *De motu proiectorum* passerebbe per proemio e per introduzione; così disgiunto da lui, diceva il Torricelli stesso per modestia, non contenere che baie. Una di queste, che i Lettori ritroveranno tutt' altro che una baia, mandata a esso Magiotti nel libretto a lui dedicato, sarebbe la seguente, con le parole, che trascriviamo premesse alla proposizione:

« Perchè il foco delle parabole ha che fare in alcuni teoremi dei proietti più che qualcuno non pensa, l' inserisco nel mio libretto, e mi pare di dimostrarlo assai più facilmente che Vitellione, Marin Ghetaldo e fra Bonaventura, i quali apportano tutti la medesima dimostrazione: però non vorrei arrogarmi una dimostrazione non mia. Mando questa copia a V. S. acciò mi faccia grazia di vedere se confronta con quella di Oronzio Fineo, se ben credo che lui ancora porterà la comune di Vitellione, che va per via di quei quattro rettangoli del Secondo di Euclide. Oltre a questi quattro autori non so che altri tratti del foco delle parabole. »

Figura 249.

« *Proprietà della Parabola, Lemma.* — Se sarà la parabola, il cui asse AB (fig. 249), e la quarta parte del lato retto sia AC, e preso qualunque punto E si tirino due tangenti AD, ED; dico che l' angolo HDC è retto. »

« Tirisi l'ordinatamente applicata EB: e perchè le AB, AH sono uguali, ed EB, AD parallele, sarà il quadrato EB quadruplo del quadrato AD. Lo stesso quadrato EB è quadruplo del rettangolo BAC, cioè HAC; adunque il quadrato AD è uguale al rettangolo HAC: però l'angolo HDC è retto. »

Mostrato questo, cioè che la linea, che dal punto C va al concorso delle due tangenti, sempre fa angoli retti con la tangente, la quale *non est per verticem parabolae;* si mostra la proprietà del foco, per la quarta proposizione del primo libro di Euclide.

« *Proposizione.* — Sia la parabola, il cui asse AB (nella medesima figura) ed AC sia la quarta parte del lato retto. Prendasi qualunque punto E, e sia EG parallela all'asse, e tirinsi le tangenti ED, AD, e si congiungano CE, CD: dico che gli angoli GEF, CED sono uguali. »

« Poichè, tirata la ordinatamente applicata BE, perchè le BE, AD sono parallele, e BA, AH uguali, saranno ancora ED, DH uguali fra loro, e la DC è comune, e gli angoli in D sono retti. Adunque, per la quarta del primo di Euclide, l'angolo CED è uguale all'angolo DHC, cioè al GEF. »

« In questa dimostrazione il caso è unico, ma nella comune sono tre casi, e sempre bisogna variar la dimostrazione, poichè o la BE casca tra il foco e la cima, ovvero alla parte opposta, ovvero sul foco stesso » (MSS. Gal., T. XL, fol. 20).

Avuto forse in risposta dal Magiotti che il modo di dimostrare era nuovo. e da non reputarsi perciò una baia, pensò il Torricelli di metter così la proposizione in miglior forma, per inserirla nel primo libro *De motu gravium*, innanzi alla XIX, nella quale l'invenzion del foco si suppone per ritrovar dalla distanza di lui sull'asse della parabola le ordinatamente applicate, che s'han da prendere per la misura degl'impeti, in ciascun punto della curva.

« PROPOSIZIONE XIII. — *Sit parabola AE* (sempre nell'ultima figura) *axis AB, ipsique parallela EG. Ponatur AC quarta pars lateris recti, ductisque tangentibus EH, AD, iungantur CD, EC. Dico angulos GEF, CED aequales esse.* »

« Ducatur ordinatim BE: cum enim aequales sint BA, AH, erit quadratum AD quarta pars quadrati BE. Rectangulum etiam CAB est quarta pars eiusdem quadrati BE. Quare quadratum AD aequatur rectangulo CAB, hoc est CAH. Erit igitur angulus HDC in semicirculo, et ideo rectus. Sed cum latera DH, DC aequalia sint lateribus ED, DC, utrumque, et anguli in D recti; erunt reliqua aequalia, per quartam Primi, nempe angulus CHD, sive GEF, aequalis angulo DEC, quod erat demonstrandum » (ibid. ad t.).

Dimostrato così che il foco è veramente sull'asse della parabola, a una distanza dal vertice uguale alla quarta parte del parametro, si confermavano dal Torricelli tutte quelle sue proposizioni, scritte a illustrare i teoremi letti nel quarto Dialogo dal Salviati. Ma un altro ufficio, ben assai più importante, erasi assunto il Discepolo valoroso, ed era quello di perfezionare l'opera del suo proprio Maestro, lasciata di parecchie altre parti, ma principalmente del trattato delle catenuzze ballistiche in difetto. Non deve nemmen egli il

Torricelli aver saputa da quali principii meccanici, e per quali vie riuscisse Galileo a dimostrare che quelle stesse catenuzze si dispongono in figura di parabola: o forse volle alla non facile dimostrazione trovare da sè stesso altri modi, se veramente concludenti, e da doversi preferire ai galileiani, lo giudicheranno i Lettori. Si pone per fondamento al discorso un teorema statico, a cui preluce il seguente

« *Lemma.* — Si angulus ABC (fig. 250) sectus bifariam sit a linea BD, ductaque sit quaelibet AC, et sumatur AE aequalis ipsi BC, inde EH parallela sit ipsi BD; dico AH, DC aequales esse. »

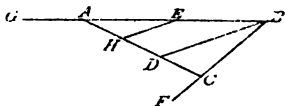



Figura 250.

« Est enim, per tertiam Sexti, ut AD ad DC, ita AB ad BC, vel AB ad AE, vel AD ad AH. Quare aequales sunt AH, DC. »

« PROPOSIZIONE XIV. — *Sit angulus quilibet GBF* (nella medesima figura) *et loca centrorum extrema G, F, linea bisecans angulum sit BD. Deinde, moto loco, sit linea centrorum AC, sumaturque AH aequalis ipsi DC: dico H esse centrum loci.* »

« Nam ut totum locum ad totum, ita dimidium AB ad dimidium BC, vel, per tertiam Sexti, AD ad DC, vel, per praec. lemma, HC ad AH reciproce. Quare H centrum est gravitatis loci sic positum » (ibid., T. XXXVII, fol. 115).

La difficoltà, che debbono tutti i lettori trovare in intendere queste ragioni, dipende dal non essersi ben definito dal Torricelli il significato della parola *loco*, nè del suo centro gravitativo, ond' è che opportunamente soccorre in aiuto nostro il Viviani con questa nota, intitolata *Mia raba, per chiarezza della precedente.*

« Sia l' angolo MBN (fig. 251) fatto da due piani MB, NB, e sia la fune o catena MB, ora distesa da B sino ad M, ora da B sino ad N: è chiaro che il più lontano luogo de' centri di gravità della catena, posta in MB, sarà il punto di mezzo A, ed il più lontano luogo del centro, quando la catena sia in BN, sarà il punto di mezzo C; sicchè questi A, C si diranno *loca centrorum extrema.* Ma, movendo la catena in modo che pigli dell' uno e dell' altro piano, nel sito per esempio OBP, il centro della parte OB sarà nel mezzo E, e della parte BP nel mezzo H, sicchè, giunta la EH, questa si può dire *linea centrorum moti loci,* perchè congiunge i centri di gravità delle parti della catena mossa di luogo. E perchè la EH congiunge i centri delle parti della catena, in essa EH sarà il centro di tutto, ed in luogo, che la parte verso H, alla parte verso E, sia come la parte OB della catena, alla parte BP, cioè come la metà EB, alla metà BH.

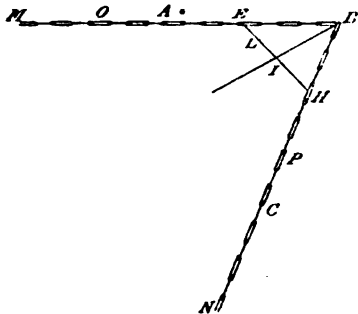



Figura 251.

Ergo, dice il Torricelli, *ut totum locum ad totum,* cioè *ut totum OB ad totum BP, ita dimidium EB ad dimidium BH, vel EI ad IH, vel HL ad LE reciproce. Ergo L centrum gravitatis est loci* » (ibid., fol· 115).

Queste cose premesse e dimostrate, vuole il Torricelli che le condizioni dell'equilibrio della catena, parte disposta sul piano comunque inclinato MB, e parte sul piano BN, siano quelle medesime, che se si tenesse sospesa per i punti estremi A, e C liberamente pendula. La supposizione fatta dal Discepolo è senza dubbio non meno arbitraria di quell'altra fatta dal Maestro, ma è certo che, come dal concedersi a Galileo che gli anelli sian discesi nella catena insaccata, secondo la ragion de' momenti, che avrebbe ciascuno di essi in romper l'asta, nella quale si supponessero orizontalmente infilati, resta legittimamente dimostrato che quella tal saccaia è in figura di parabola; così, dal concedere al Torricelli quella sua ipotesi già detta, si vien pur legittimamente alla medesima conclusione, premesso il seguente *Lemma,* relativo alle proprietà di certe linee, con premeditata intenzione tirate intorno, e dentro alla Parabola.

Figura 252.

« Sia la parabola ABC (fig. 252), il cui asse BH, ed ordinatamente applicata AC, e, presa BD uguale a BH, tirinsi AD, CD, che saranno tangenti. Preso poi qualunque punto E, tirisi l'altra tangente FEG; dimostreremo più cose: »

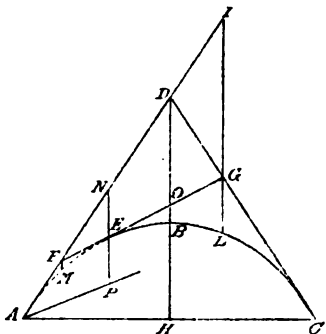
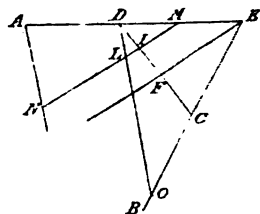
« Per i punti F, E, G tirinsi parallele all'asse FM, NP, IL, e si prolunghi AD, che concorra con LG in I, e si tiri AP parallela a FE. Perchè si è preso nella parabola un punto E, e la EP parallela all'asse, e la AP parallela alla tangente FE, e la AF tangente in A; saranno uguali PE, EN, e però saranno uguali AF, FN fra le stesse parallele. »

« Perchè poi l'angolo ADC è diviso bifariam dalla HD, e la GI parallela alla HD, saranno uguali GD, DI. »

« Perchè CG ad AF ha proporzione subdupla di GL a FM, sarà, come CG ad AF, così GE ad EF, ovvero IN ad NF. Ma perchè i conseguenti AF, NF sono uguali, saranno uguali gli antecedenti CG, NI. Ed aggiunta la comune DG sarà CD, ovvero AD, uguale alle NI, DG. E levata la comune ND, sarà AN uguale alle ID, DG, e però la metà AF uguale alla metà DG. »

« Stante questo, dico che anco FE sarà uguale ad OG. S'è mostrato che GE a EF sta come CG ad AF, ovvero come FD a DG, ovvero FO ad OG, *ob angulum D bifariam sectum.* Come dunque GE ad EF, così FO ad OG. E componendo, GF ad FE, come FG a GO, e così sono uguali FE, GO. »

Figura 253.

« Proposizione XV. — *Siano i due centri primarii A, B* (fig. 253) *e sia mossa la catena,*

sicchè i centri siano C, D, e sia la EF che seghi l' angolo bifariam, e prendasi DI uguale a CF: è chiaro che I sarà il centro comune. Dico ora che I sta nella parabola. »

« Se non ci sta, passi la parabola sulla MIN, parallela all' asse EF in L, e si prenda LN uguale ad LM, e si tiri la retta DLO. È certo che, essendo uguali MD, DA, come ora proverò, ed uguali NL, LM, saranno parallele AN, DL. Dunque DLO sarà la seconda tangente della parabola, e per la proposizion precedente saranno uguali AD, EO, *quod est absurdum* perchè AD, EC sono uguali. »

« Provo ora che MD, DA sono uguali fra loro. Sono uguali AD ed EC *per hypothesim,* e CF, DI *per constructionem.* Ora ED a DA sta come ED a EC, vel DF ad FC, vel FD ad DI, vel ED ad DM. Però sono uguali AD, DM, come avevo promesso di dimostrare » (ivi, T. XXXVII, fol. 122).

II.

Abbiamo riserbato a parte il trattar de' momenti sì per essere argomento nella nostra Storia della principale importanza, e sì per avere intorno a tali dottrine patito il Torricelli le maggiori contradizioni. Incominciarono queste, lui vivente, in Francia, per opera del Roberval, con l' intermedio del padre Mersenno, e le resuscitò, contro lui già morto, in Italia, Alessandro Marchetti. Il Borelli ammoniva il discepolo suo prediletto che, almeno per l' avvenire, imparasse a procedere *con più cautela e modestia* (Tondini, Lettere, T. I, Macerata 1782, pag. 90), e Sfefano Angeli, tirato dagli stessi amici suoi e del Marchetti a prender parte al pericoloso giudizio, inclinava a difendere il Torricelli (ivi, pag. 131).

Ma il Torricelli stesso, che conosceva non dipendere da altro le censure, che dall' aver lasciate in qualche parte mancanti, e in qualche altra non bene spiegate le sue proposizioni; col ritornar sopra l' opera già stampata, per perfezionarla, intendeva di difendersi, nel migliore e più virtuoso modo, contro i Francesi. Col fatto poi veniva dal silenzioso sepolcro a sbugiardare i vanti del Marchetti, il quale erasi compiaciuto a principio di aver egli dimostrato il primo che i momenti hanno la ragion composta delle distanze e dei pesi: poi, fatto avvertito che la dimostrazione l' aveva data parecchi anni prima, e in una solenne opera sua stampata il Cavalieri, si consolava che non gli avrebbe nessuno contesa la gloria dell' avere egli veramente il primo applicato alle dottrine del moto il teorema. Ma il Serenai e il Viviani maneggiavano intanto quelle carte torricelliane, nelle quali leggevano fatta già dall' Autore la stessa applicazione ad alcune nuove proposizioni baricentriche, e per dimostrar dai principii geometrici la regola centrobarica del Guldino. Di qui nasce la triplice partizion delle cose, che s' ordineranno in questa se-

conda parte del presente capitolo, per servire alla storia de' concetti postumi del Torricelli, e dei loro svolgimenti fecondi.

Incominciamo dalla prima parte, in cui ci si rappresenta il Nostro tutto in sollecitudine di aggiungere la desiderata perfezione a quelle proposizioni *De motu gravium naturaliter descendentium,* nelle quali si dimostrano le proprietà e le leggi de' momenti dei gravi, mentre scendono lungo i piani inclinati. Dipendono queste leggi, come da loro universale principio, dal *Teorema meccanico,* che dice stare allora due gravi in equilibrio, sopra due piani ugualmente alti, quando le loro lunghezze siano alle gravità omologamente proporzionali. Alla dimostrazione di ciò, che in primo luogo ricorre nel libro stampato, voleva il Torricelli aggiungere un tal corollario: « Ergo gravia tunc habebunt aequalia momenta, quando ipsa fuerint ut secantes complementorum anguli elevationis. Posito enim sinu toto AB (fig. 254) erunt AC, AD dictae secantes » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIII, fol. 83). È infatti $AC : AB = 1 : \cos . CAB = \sec . CAB : 1$; $AD : AB = 1 : \cos . BAD = \sec . BAD : 1$. D' onde $AC : AD = \sec . CAB : \sec . BAD$.

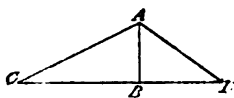



Figura 254.

Nella seconda *De motu gravium,* avendo già dimostrato l'Autore che i momenti di due gravi uguali, sopra due piani di uguale altezza, stanno come le loro lunghezze reciproche; poi pensò di mettere la medesima conclusione sotto altra forma, dicendo che que' momenti hanno la proporzione omologa dei seni degli angoli delle elevazioni. Si trova il pensiero sotto il n.° XXX del citato *Campo di tartufi,* notato in questa forma: « Quando vero gravia aequalia fuerint, erunt momenta ut sinus angulorum elevationis. *Nota che vi è (nel libro stampato), ma la prova è più bella così:* nam, cum sint momenta ut ED, FD (fig. 255), hae sunt sinus angulorum DAC, DBC » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIII, fol. 82).

Come però AD, BD, a cui contrariamente rispondono i momenti, abbian la proporzion medesima delle loro porzioni DF, DE, segate dal mezzo cerchio, che sia descritto intorno a DC; non si trova dimostrato, e non si trova pur dimostrato come le due corde intercette siano uguali ai seni dell'angolo dell'inclinazione de' piani. Nè si può la prima di queste due verità supporre nota dall'isocronismo delle sottese al circolo, non dimostrato ancora, per cui s'argomenta che dalle proprietà geometriche, e non dalle meccaniche, intendesse il Torricelli che fosse da concludere la proporzionalità reciproca tra le lunghezze de' piani AD, BD, e le loro porzioni intersecate. Essendo infatti la BC tangente, la DB secante, e il triangolo BDC rettangolo in C, abbiamo, per le notissime proprietà geometriche, $BC^2 = BD . BF = DB^2 - DC^2$, e perciò $DC^2 = DB (DB - BF) = DB . FD$. Nel medesimo

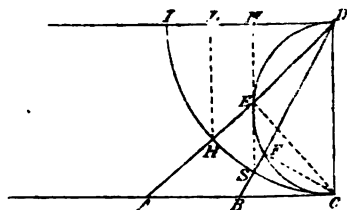



Figura 255.

modo si troverebbe $DC^2 = AD \cdot ED$. Che, se dunque $AD \cdot ED = DB \cdot FD$, $AD : DB = FD : ED$.

La seconda torricelliana si sarebbe potuta perciò mettere anche sotto quest' altra forma, dicendo che i momenti del medesimo grave, sopra i piani AD, BD, stanno omologamente come le loro parti intersecate dal semicerchio, d'onde il corollario bellissimo che, essendo per DF, DE gl' impeti o le velocità proporzionali agli spazi, i tempi sono uguali, per venire alla qual conclusione ebbe Galileo a prepararsi la macchina di parecchie laboriose proposizioni.

Ma la presente intenzione del Nostro era, come si diceva, quella di dimostrar che i momenti son proporzionali ai seni degli angoli delle elevazioni. Forse la dimostrazione era la medesima o simile, che nel lemma premesso alla proposizione IV (Op. geom. cit., pag. 106), ma più facile e più diretta sovviene dal considerar l' uguaglianza del triangolo HID (nella fatta costruzione) col CED, e del GMD col DFC, d' onde il lato ED viene a dimostrarsi uguale a LH, seno dell' angolo LDH, o del suo uguale DAC, secondo cui s' inclina il piano AD sopra l' orizontale AC; e il lato FD uguale al lato GM, seno di MDG, o del suo uguale DBC, angolo dell' inclinazione dell' altro piano.

A così fatte dimostrazioni, mancanti nel manoscritto, pensò di supplir di buon' ora il Viviani, il quale ordinò così quella, che, fra le occorseci in questo proposito, si contrassegna da noi per la proposizione prima.

« PROPOSIZIONE I. — *Momenta gravium aequalium super plana DA, DB* (nella medesima figura), *sunt ut sinus angulorum elevationis.* »

« Quod, per primum, momenta gravium aequalium super plana DA, DB, de quibus Auctor loquitur, sint inter se ut ipsorum segmenta ED, FD, in semicirculo DEC inscripta, dum sit DC ad horizontalem AC perpendicularis; patet sic: Nam iunctis CE, CF, rectangula ADE, BDF inter se sunt aequalia, utrumque enim aequatur quadrato diametri DC. Quare ut BD ad DA, ita est ED ad DF. Sed ut BD ad DA, ita est reciproce momentum gravis super DA, ad momentum aequalis gravis super DB, per secundam propositionem eiusdem libri primi *De motu;* ergo ut ED ad DF, ita est momentum super DA, ad momentum super DB. »

« Insuper, quod ipsae DE, DF sint sinus angulorum elevationis DAC, DBC, ita ostenditur: Descripto enim, ex centro D, ac intervallo DC, quadrante circuli DCI, secante plana in G, H, atque ex GH ductis GM, HL, sinubus angulorum GDI, HDI, vel sibi aequalium DBC, DAC; hi aequantur ipsis inscriptis DF, DE, singuli singulis, quoniam, in triangulis DLH, CED, angulus LDH, a tangente et secante constitutus, aequatur angulo in alterna portione ECD: anguli ad M, E sunt recti, latus vero DH aequatur lateri DC, cum utrumque sit radius quadrantis; ideoque et latus HL aequatur lateri DE. Eademque ratione GM aequale ipsi DF, quod supererat, demonstratur » (ibid., T. XXXVII, fol. 93).

Di qui si conclude, intendendo significato con M^0 il momento, e riferen-

doci alla medesima figura, M° . DB : M° . DC = sen. DBC : sen. DCB = DC : DB, che vuol dire il momento parziale sopra il piano inclinato stare al totale, nel perpendicolo, contrariamente come la lunghezza di esso perpendicolo sta alla lunghezza del piano. Che se il grave s'immagini essere una sfera, posata sul declivio BG (fig. 256), e si faccia dal diametro di lei rappresentare il momento totale, sarà il parziale, dice il Torricelli nel corollario alla citata proposizione (Op. geom. cit., pag. 102), rappresentato dalla corda AB, cosicchè, intendendosi significati con M° . T, M° . P i due detti momenti, avremo M° . T : M° . P = HB : AB. Moltiplicando ora la seconda ragione per la circonferenza di un cerchio massimo, e osservando che essa circonferenza moltiplicatà per il diametro è uguale a tutta intera la superficie sferica, e moltiplicata per la corda AB è uguale all'armilla descritta dall'arco AB, supposto che la rivoluzione si faccia intorno al diametro EF; avremo dimostrata la proposizione che segue:

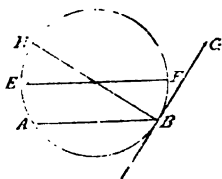



Figura 256.

« Proposizione II. — *Momentum totale ad momentum in hoc situ* (quale cioè vien rappresentato dalla figura) *est ut tota sphaerae superficies ad armillarem sphaerae superficiem, quam subtendit AB,* si *sphaera volvatur circa EF* » (MSS. Gal. Disc., T. XXX, fol. 79).

Questa e la precedente, incluse come in loro principio nelle proposizioni già divulgate, aggiungevano al trattato eleganza, ma quella, che ora in terzo luogo porremo, suppliva una notizia importante, della quale anche Galileo aveva lasciato il suo dialogo in difetto, ed è: secondo qual proporzione stiano i momenti, quando, essendo i piani quali si sono descritti, i mobili però sono in mole e in gravità differenti: per rispondere al quale quesito aveva il Torricelli distesa la seguente

« Proposizione III. — *Si AB, BC* (fig. 257) *duo plana fuerint inaequaliter inclinata, et AC horizontalis, sintque in planis duo gravia quaecumque D, et E; dico momentum D, ad momentum E, compositam habere rationem ex ratione molis D, ad molem E homologe, et ex ratione longitudinis CB ad BA, reciproce.* »

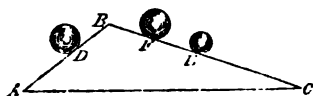



Figura 257.

« Ponatur enim grave F aequale ipsi D, in altero plano BC, et erit, per propositionem secundam libelli nostri *De motu*, momentum D, ad momentum F, ut est CB ad BA. At momentum F, ad momentum E, est ut molis F ad molem E; ergo momentum D, ad momentum E, compositam rationem habet ex ratione CB ad BA, et ex ratione molis D ad E, q. e. d. »

« *Scholium.* — Sed quia CB ad BA est ut sinus anguli A, ad sinum anguli C, dicemus etiam rationem momenti D, ad momentum E, componi ex ratione molis D, ad molem E, et ex ratione sinus elevationis plani AB, ad sinum elevationis plani CB » (ibid., T. XXXVII, fol. 72).

Aveva il Mersenno rimproverato, in una sua lettera, il Torricelli perchè egli suppone nel corollario, dopo la proposizione terza, una cosa, senz'altrimenti dimostrarla. Di che avendo esso Torricelli giustamente riconosciuto essere il suo trattato in difetto, pensò di supplirvi in questa maniera:

« PROPOSIZIONE IV. — *Posita eàdem figura, quae in libello* (per noi la 258), *dico momentum A, ad momentum B, ita esse ut CD ad DE.* »

« Sumantur enim ID, DH aequales ipsis CD, DE, et in punctis I, H duae sphaerae constituantur aequales, tum inter se, tum ipsis B, A, et connectatur recta BH, quae tamquam libra concipiatur. Patet quod recta BH bifariam secabitur in L, per secundam Sexti, ergo punctum L erit centrum gravitatis gravium B, H, et est L in perpendiculo per punctum suspensionis ducto: ergo gravia sic connexa, sive colligentur recta BH, sive linea inflexa BDH, non movebuntur, nulla enim maior ratio est cur ad dextram descendant, potius quam ad sinistram. Si manent, ergo momentum in B aequale est momento in H. »

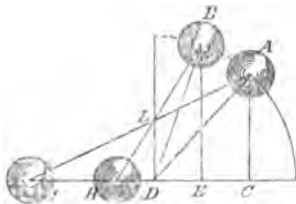



Figura 258.

« Idem dicendum de gravibus A, I. Propterea momenta in A, B erunt ut momenta in I, H, nempe ut distantiae ID, DH, sive ut CD, DE » (ibid., T. XL, fol. 77).

Il Torricelli per far prova della sua fecondità in quello stesso, che da' suoi proprii censori si giudicava difetto, volle dimostrare così la medesima cosa, anche in un altro modo assai più bello, per via della costruzione, ch'è data assai facilmente ad intendere dalla nostra figura 259, senza che ci sia bisogno di altre parole: « Momentum partiale descensivum per DF, ad totale per DK, est ut DK ad DF, vel ut AK ad AD, vel AC: et totale per DK, vel EI, ad partiale descensivum per EG, est ut EG ad EI, vel ut AE ad AI, vel ut AC ad AI. Ergo ex aequali partiale descensivum per DF, ad partiale descensivum per EG, est ut AK ad AI, vel ut totale appensum in K, ad totale idem appensum in I » (ibid., T. XXXIV, fol. 134).

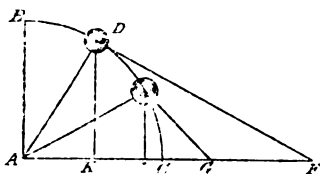



Figura 259.

Così gl'importanti corollari della proposizione terza venivano ad essere anche meglio nella loro verità confermati. Ma il Torricelli pensava di arricchire anche più questa parte del suo trattato, aggiungendovi le seguenti, che noi raccoglieremo qui fra le nostre proposizioni meccaniche dei momenti.

« PROPOSIZIONE V. — *Sint duo plana utcumque AB, AC* (fig. 260) *et duo gravia utcumque B, C. Iungatur BC, et fiat ut grave B ad C, ita CD ad DB. Tum per D ducatur EF, ita ut secet ipsas EA, AF in ratione gravis B ad grave C: dico EF esse viam centri gravitatis.* »

« Primo ostendemus BE, FC aequales esse. Ducatur BI parallela ad AC: erit EB ad BI ut EA ad EF, hoc est CD ad DB, hoc est FC ad BI eamdem. Quare aequales erunt EB, FC. »

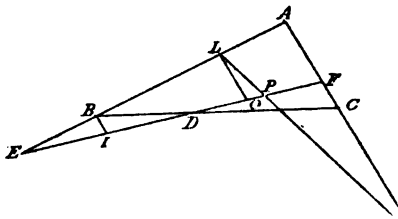



Figura 260.

« Moveantur iam gravia, et sint B in L, C in M: erunt aequales totae EL, FM. Ducatur LO parallela ad AM, et iungatur LM. Erit grave L, ad grave M, ut EA ad AF, vel EL ad LO, vel MF ad LO, vel MP ad PL. Ergo centrum est P » (ibid., T. XXXVII, fol. 69).

« Proposizione VI. — *Datis ut supra, fiat ut grave A* (fig. 261), *ad grave B, ita quaelibet CD ad DE: et erit planum CE tale planum, quod si in ipso grave A sit, erit momentum gravis A in plano CE idem ac momentum gravis A in plano CD* » (ibid.).

La dimostrazione è taciuta, perchè forse la credeva il Torricelli ovvia alla mente di ognuno, che vada ripensando come, per la prima *De motu,* i due gravi rimarrebbero allora fra loro sopra i due piani in equilibrio, ossi asenza momento, quando la linea di congiunzione CE tornasse in posizione orizzontale. E se sopra essa orizzontale s' intendesse posato il grave A o E rimarrebbe ivi egli pure senza momento. Inclinando poi la figura, in quel modo che si è rappresentata, è manifesto che l' impeto di discendere lungo il piauo DC è, per il grave A congiunto col grave B, quel medesimo che sarebbe di scendere lungo il piano CE, essendo A libero. Che se fosse la figura piegata e volta alla parte contraria, in modo cioè che il punto E si abbassasse, anche il grave E sarebbe quello disposto a scendere col già detto momento.

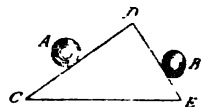



Figura 261.

Questa, con la precedente, della quale non è che un corollario, servivano a preparare la proposizione che segue, la quale doveva inserirsi nel libretto stampato, dopo la dimostrazione che, passandosi le corde, nel circolo col diametro verticalmente eretto, nel medesimo tempo; le velocità o i momenti son per esse corde proporzionali agli spazi passati.

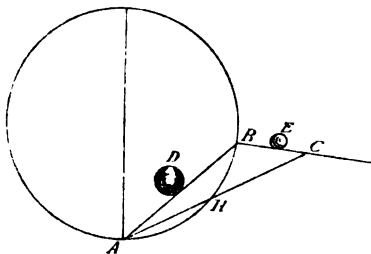



Figura 262.

« Proposizione VII. — *Sit planum AB* (fig. 262) *utcumque inclinatum, et grave D sit in ipso, sitque aliud plannm BC utlibet inclinatum. Fiat circulus quilibet, cuius tamen infimum punctum sit in AB, et concipiatur momentum gravis D esse ut AB: si ponatur grave aliud E connexum cum D, et fiat, ut grave D ad E, ita AB ad BC, erit AH momentum gravis D connexi* » (ibid.).

La dimostrazione, che manca nel manoscritto, si supplisce assai facilmente dopo le cose già dette, imperocchè il momento di D in AB, al momento di D in AH, sta come AB ad AH. Ma il momento di D sopra il piano AH è, per la V di questo, uguale al momento di D congiunto con E sopra il piano AB; dunque il momento di D libero, al momento di D congiunto, sta come AB ad AH, ciò che dimostra la verità di quel che il Torricelli dianzi annunziava.

Le sette proposizioni intorno ai momenti, fin qui da noi raccolte dai manoscritti del Torricelli, sono ordinate alla storia del trattato *De motu gravium,* secondo la prima nostra data intenzione. La seconda era quella di mostrar come avesse lo stesso Torricelli, tanto prima del Marchetti, non solamente saputo dedurre dai principii statici che i momenti hanno la ragion composta delle distanze e dei pesi, ma come egli ne avesse, nel medesimo tempo, fatta l'applicazione ad alcuni teoremi concernenti la Baricentrica e la Centrobarica guldiniana. Di che il primo documento, per quel che riguarda i centri di gravità, ci è offerto dalla seguente lettera, scritta da Firenze il dì 7 Aprile 1646 al Cavalieri:

« Quando, nella lettera di V. P., veddi che ella trattava di quei centri di gravità intorno a quel suo solido, ebbi paura che ella mi avesse scoperta una passione, che io trovai. Ora perchè ella non abbia a trovarla, io la dirò: Il centro della gravità, in tutte le figure piane e solide, purchè abbiano l'asse o il diametro, sega sempre l'asse, o il diametro che sia, con la medesima regola. La Natura non è così ricca d'invenzioni, come a noi sembra per la nostra propria debolezza. Ella non bada che la proporzione delle parti del diametro in alcune figure sia dupla, in altre tripla, in altre sesquialtera, come cinque a tre, come sette a cinque, e tante altre sorti di proporzioni, anco incommensurabili. »

« Questi sono corollari, ma il Teorema universale non so se sia sovvenuto ancora a nessuno: anzi credo che nessuno abbia mai pensato che ci possa essere, eppure vi è, ed è tale:

« Proposizione VIII. — *Centrum gravitatis in qualibet figura, sive plana sive solida, dummodo axem habeat vel diametrum, secat. axem vel diametrum semper hac lege, ut pars versus verticem sit ad reliquam quemadmodum sunt omnes ductus applicatorum, in omnes axis vel diametri portiones versus verticem abscissas, ad omnes ductus eorumdem applicatorum in reliquas axis vel diametri portiones. Intelligimus autem, nomine applicatorum, in figuris planis, lineas applicatas, in solidis, plana.* »

« Ella vede che quelli *ductus* in figure piane saranno rettangoli, in solidi poi saranno solidi. Ella conoscerà subito che questo è un corollario della dimostrazione, ch'io gli mandai intorno al solido segato per traverso in un piano, che passi *per extremas applicatas.* Infatti, esto semifigura qualis definita est ABC (fig. 263), cuius diameter AB, vertex B, fiatque suum solidum cylindricum cavalerianum BD, ita ut altitudo AE sit aequalis diametro AB, seceturque plano ACG. Ostensum est a nobis quod, si F sit centrum gravi-

tatis totius figurae, ita esse solidum ADEG, ad reliquum, ut BF ad FA. His positis, omnia rectangula, quorum unum HL (nempe sub applicata HI et sub IL, sive sub portione IG diametri abcissae versus verticem), ad omnia rectangula, quorum unum LP (nempe sub applicata OP, et OL, sive reliqua portione diametri OA) sunt ut solidum ADEG, ad solidum ABCG: ergo patet ita esse BF ad FA ut omnia praedicta rectangula. Benchè dunque si potesse dal solido cavaleriano dimostrare in questo modo il Teorema, nulladimeno io ne ho trovata un'altra dimostrazione apposta, ed è tale: »

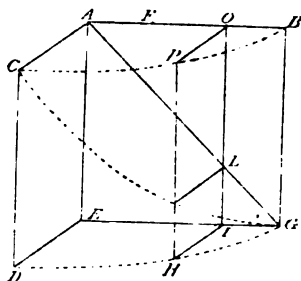
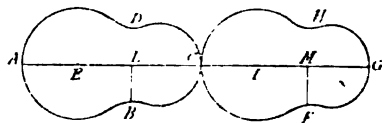



Figura 263.

« Esto figura quaelibet ABCD (fig. 264), sive plana sive solida, dummodo axem vel diametrum habeat AC, sitque centrum gravitatis E: dico CE ad EA esse ut dictum est supra. »

« Nam ponatur ei in directum alia similis et aequalis figura CFGH, cuius centrum sit I, sumaturque homologa applicatae LB, MF, et intelligatur suspensa libra ex C, sive aequiponderet, sive non. »

Figura 264.

« Jam, ex principiis mechanicis, erit momentum applicati LB, ad momentum applicati MF, ut ductus applicati LB in distantiam LC, ad ductum applicati MF, in distantiam MC, et hoc semper verum est, ubicumque sumpta fuerint homologa applicata. Ergo momentum omnium applicatorum, seu figurarum ABCD, ad momentum figurae CFGH, erit ut omnes ductus applicatorum, quorum unum est LB, in omnes diametri vel axis portiones versus verticem abscissas, quarum una est LC; ad omnes ductus eorumdem applicatorum, quorum unum est MF, in reliquas diametri portiones, quorum una est MC. Sed momentum figurae ABCD, ad momentum figurae CFGH, est ut distantia EC ad distantiam CI; ergo EC ad CI, hoc est EC ad EA, erit ut omnes praedicti illi ductus, quorum unum est BL in LC, ad omnes praedictos ductus, quorum unum est MF in MC, quod erat domonstrandum. »

« Nelle figure solide basta mutar nome all' applicato, che non è linea ma piano, e però anco il rettangolo si muterà in solido. La stessa proposizione abbraccia il centro anche delle linee e delle superficie, ma, in cambio delle porzioni del diametro, si adoprano le tangenti. Supplico V. P. a non conferire la cosa con alcuno, perchè proposi il teorema agli amici di Roma, e forse lo proporrò in Francia, e non l' ho conferita se non a V. P. » (ivi, T. XL, fol. 132).

Si sente da queste espressioni che il Torricelli faceva gran conto della sua invenzione, la quale nonostante il Cavalieri diceva che sarebbe da pregiare anche di più, quando vi s' insegnasse il modo di trovare le proporzioni

fra gli uni e gli altri di que' prodotti. Ma il Torricelli ingenuamente rispondeva: « quanto al trovar la proporzione di quelli *omnes ductus, ad omnes ductus,* io non ci ho nulla, e non ho cercato altro, stimandola assai intricata materia » (ivi, fol. 133). Nonostante, dando poco tempo dopo notizia al Carcavy di questo teorema, dop' averglielo formulato così, soggiungeva: « Haec est regula, ex qua centra gravitatis exprimo, cum habeam methodum, non adeo difficilem, pro invenienda ratione, quam habent praedicti omnes ductus, ad omnes ductus » (ibid., fol. 39). Potrebb' essere che si fosse messo a ricercare il metodo, e che fosse riuscito a trovarlo, dop' aver tutt' altrimenti confessato al Cavalieri, ma non se ne conosce da noi il documento, che giustifichi la vantazione datasi innanzi all' illustre Senator parigino, in una sua lettera, dove sono altre vantazioni, che appariranno dalla Storia non giuste.

Ma, per non interrompere ora il filo del nostro discorso, diremo come applicasse il Torricelli il teorema dei momenti a dimostrare la Regola centrobarica. Non aveva intorno a ciò insegnato altro il Guldino, se non che ogni solido rotondo è uguale alla figura genitrice, moltiplicata per il viaggio fatto dal centro di gravità di lei nella sua conversione. Il Cavalieri fu il primo a dimostrare la verità di quella Regola universalissima, per via degl' indivisibili, e il Torricelli, come già faceva allora anche il Nardi, pensò che si poteva concludere il medesimo dai più elementari principii della Geometria e della Meccanica, proponendosi intanto questo semplice esempio:

Si rivolgano co' loro centri di gravità, posti nelle distanze FE, DE (fig. 265) dall' asse comune AE, i due rettangoli AB, BC: è manifesto che si descriverà da quello un cilindro solido, e da questo un anello circolare o cilindro forato, la misura del quale sarà, secondo la Regola guldiniana, BC . 2π DE, come sarà AB . 2π FE la misura delll' altro: ond' è che colui, il quale si proponesse di voler avere i due solidi uguali, dovrebbe fare AB a BC reciprocamente come DE a FE. Ora è appunto ciò che intende di dimostrare il Torricelli nella seguente, per accordare la centrobarica alla geometria.

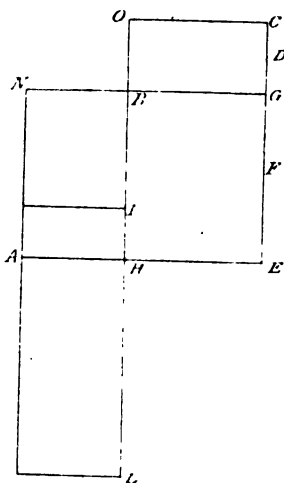



Figura 265.

« PROPOSITIONE IX. — *Si fuerit ut rectangulum AB ad BC, ita reviproce recta DE ad EF, nempe distantia centri gravitatis rectanguli BC, ad distantiam centri gravitatis rectanguli AB ab axe AE, convertaturque utraque figura circa axem AE; dico solida aequalia circumscribi: nempe cylindrum, ex AB factum, aequalem esse solido annulari, sive cylindrico excavato, ex BC facto.* »

« Ponatur HL aequalis ipsi CE, et fiat ut LB ad BH, ita BH ad BI, et compleantur figurae ut in schemate. Jam spatium AB ad BC est ut recta DE ad EF, per suppositionem, sive, in duplis, ut CE, EG, simul, ad EG:

nempe ut LB ad BH, sive ut HB ad BI, per constructionem; hoc est ut spatium idem AB ad NI. Propterea aequalia sunt NI, BC, et eorum latera reciproce, nempe NB ad BG erit ut recta OB ad BI, sive, sumpta BL communi altitudine, ut rectangulum OBL ad rectangulum IBL, hoc est, ut rectangulum OBL ad quadratum BH. Et componendo erit NG ad GB ut quadratum OH ad BH, sive ut circulus ex OH ad circulum ex BH. Cylindrorum itaque, factorum ex AG et HC circa axem AE, reciprocantur bases et altitudines; quare aequales sunt. Et, dempto communi cylindro facto ex HG, reliqua solida aequalia erunt » (ibid., T. XXXI, fol. 38).

Il discorso è chiarissimo, se non che, giunto a concludere la proporzione $NB : EG = OB . BL : BH^2$, dalla quale s'ha, componendo, $NG : BG = OB . BL + BH^2 : BH^2$, suppone il Torricelli che il terzo termine proporzionale di questa sia uguale al quadrato di OH, come cosa che dall'altra parte così assai facilmente si dimostra: Abbiamo $OB . BL = OB (BH + HL) = OB . BH + OB . HL$. Dunque $OB . BL + BH^2 = OB . BH + OB . HL + BH^2 = BH (OB + BH) + OB . HL = BH . OH + OB . HL$. Ma $HL = OH$, dunque $OB . BL + BH^2 = OH (BH + OB) = OH . OH = OH^2$.

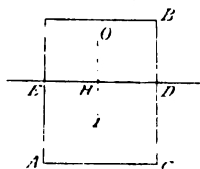
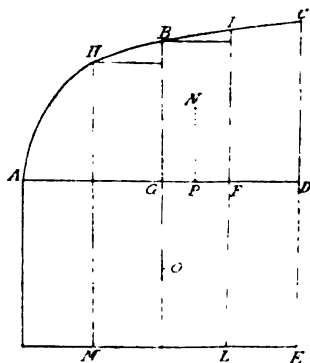
In questo esempio però le superficie genitrici son regolari, e regolari son per conseguenza i solidi generati. Ma la Regola guldiniana si diceva valere per qualunque figura, ciò che rimaneva al Torricelli da dimostrare, specialmente allora, che si disponeva a ritrovar la misura dei solidi rotondi descritti dagli spazi cicloidali. Si conseguiva poi il laborioso intento per via delle tre proposizioni, che si mettono da noi l'ultime fra le raccolte qui, per servire alla Storia, e per compilarne insieme il promesso trattato postumo *De momentis*.

Figura 266.

« Proposizione X. — *Si rectangulum aliquod AB* (fig. 266) *libratum, sive suspensum sit super aliqua recta ED, lateribus parallela, erunt momenta partium rectanguli ut quadrata laterum homologe: hoc est momentum figurae AD, ad momentum figurae EB, erit ut quadratum CD, ad quadratum DB.* »

« Ponantur enim centra gravitatis partium esse I et O, habebiturque momentum AD, ad momentum EB, rationem compositam ex ratione magnitudinum, et ex ratione distantiarum: nempe ex ratione figurae AD ad EB, sive rectae CD ad DB, et ex ratione rectae IH, ad HO, vel CD ad DB. Ergo momentum AD, ad momentum EB, erit ut quadratum CD, ad quadratum DB » (ibid., T. XXXIV, fol. 277).

Figura 267.

« Proposizione XI. — *Si quaelibet figura ABCD* (fig. 267), *habens perimetrum in easdem partes cavum, super aliqua re-*

cta AD aequilibretur cum rectangulo AE, hoc est aequale momentum habeat tam figura ACD, quam rectangulum AE; dico solida rotunda, quae circa axem AD fiunt, tam a figura ABCD, quam a rectangulo AE, aequalia esse inter se. »

Supponendo che siano GO, NP le distanze dei centri di gravità delle due figure dall'asse, avere esse figure il momento uguale non vuol dir altro che essere ABCD . NP = AE . GO, ossia ABCD . 2 π NP = AE . 2 π GO, Ora, per chi ammette la Regola centrobarica, l'uguaglianza fra' due solidi rotondi è di qui manifesta. Ma il Torricelli vuole, indipendentemente da ogni altro principio che non sia geometrico, dimostrare l'uguaglianza dei due solidi rotondi, per confermare la verità della stessa Regola centrobarica.

« Nisi enim (così egli infatti per la via obliqua procede, perchè la diretta era evidente) aequalia sint, erit solidum figurae ABCD vel maius vel minus cylindri rectanguli AE. Esto, si potest, primum maius, et intra ipsum describatur figura solida constans ex cylindris aeque altis, ita ut inscripta etiam figura solida maior sit cylindro facto ex rectangulo AE: quod hoc possit fieri, et quomodo, notissimum iam est apud Geometras. Tunc enim erit cylindrus ex DL, ad cylindrum ex DI, ut quadratum LF ad FI, sive ut momentum rectanguli DL, ad momentum DI, et hoc verum erit de reliquis omnibus cylindrulis et rectangulorum momentis, excepto ultimo AM. Suntque omnes primi ordinis magnitudines, omnesque tertii aequales, propterea erunt, per lemma XVIII libelli nostri *De dimensione parabolae,* omnes primae, hoc est omnes cylindri ex MD simul sumpti, ad figuram solidam inscriptam ex cylindris constantem, ut omnes simul tertiae: hoc est ut momentum collectum omnium rectangulorum MD ad momentum figurae planae inscriptae. Sed omnes cylindri ex AE, ad omnes ex MD, sunt ut momentum omnium rectangulorum AE, ad momentum omnium MD; ergo ex aequo omnes cylindri ex AE, ad figuram solidam inscriptam, sunt ut momenta figurae planae AE, ad momentum figurae planae intra ABCD descriptae, hoc est maiores, quod est contra suppositum. »

« Quando vero solidum rotundum ex ABCD ponatur minus cylindro ex AE facto, tunc circumscribenda erit ipsi solido figura quaedam, ex cylindris aeque altis constans, ita ut circumscripta figura minor sit eodem cylindro ex AE facto, quod fieri potest more solito, eademque demonstratio praecedens adhiberi poterit, brevior tamen et facilior, siquidem numerus cylindrorum et rectangulorum utrimque idem erit, et argumentum illud ex aequo evanescit. Cum ergo solidum figurae ABCD non possit esse neque maius neque minus cylindri rectanguli AE, erit aequale, quod erat ostendendum » (ibid., T. XXVI, fol. 41, 42).

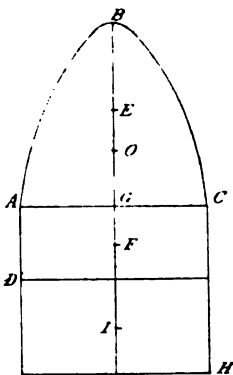



Figura 268.

« PROPOSIZIONE XII. — *Solidum rotundum ex qualibet figura plana ABC* (fig. 268), *cuius tamen perimeter sit ad easdem partes cavus, circa*

axem AC factum, ad cylindrum ex rectangulo quolibet DC circa eumdem axem factum, rationem habet compositam ex ratione figurae planae ABC, ad rectangulum DC, et ex ratione distantiae GE ad distantiam GF: nempe centri gravitatis E et F ab axe communi AC. »

« Ponatur rectangulum AH, cuius centrum I, quod aequale momentum habeat cum figura plana ABC, eritque figura ABC ad AH reciproce ut IG ad GE, cum aequiponderent. Fiat etiam ut IG ad GF, ita EG ad GO. Jam ex praeced. patet quod cylindrus factus ex AH aequalis erit solido rotundo ex figura ABC. Propterea solidum ex ABC, ad cylindrum ex DC, erit ut cylindrus ex AH, ad cylindrum ex DC: nempe ut quadratum IG, ad quadratum GF. Ratio itaque solidi rotundi ex ABC, ad cylindrum ex DC, componitur ex ratione rectae IG ad GF, bis sumpta, sive ex ratione rectae IG ad GF semel, et ex ratione restae EG ad GO, per constructionem. Ergo solidum ex ABC, ad cylindrum ex DC, erit ut rectangulum IGE ad rectangulum FGO, nempe rationem habebit compositam ex ratione laterum IG ad GO, vel, ut infra ostendam, figurae planae ABC ad DC, et ex ratione distantiae EG ad GF, quod erat ostendendum. »

« Quod promisimus ostendemus sic: figura plana ABC ad AH est ut IG ad GE: sed figura AH ad DC est ut IG ad GF, vel ut EG ad GO; ergo ex aequo erit figura plana ABC, ad DC, ut recta IG ad GO » (ibid., fol. 43).

Queste proposizioni erano, come dicemmo, state preparate dal Torricelli per applicarle a ritrovare la proporzione che passa tra il solido rotondo, generato dallo spazio cicloidale, e il cilindro del rettangolo circoscritto, rivolgendosi ambedue le figure insieme intorno al medesimo asse. Essendo infatti FE (fig. 269) la distanza del centro di gravità del rettangolo, e GE quella del centro della Cicloide, come il Torricelli stesso ha insegnato a ritrovarlo nella proposizione LVI da noi scritta nel capitolo precedente; dalla passata resulta che il solido rotondo ha verso il cilindro circoscritto la ragion composta delle figure AD, ABC, e delle distanze EF, EG de' respettivi centri dall' asse della rivoluzione. Ma perchè di ciò avrà da intrattenersi altrove la nostra Storia in discorso importante, passeremo senz' altro a raccogliere dai Manoscritti torricelliani i promessi teoremi di Meccanica nuova.

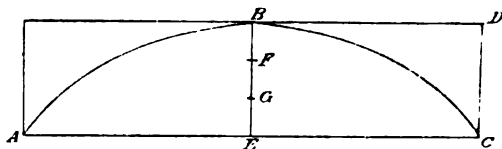



Figura 269.

III.

Quel maraviglioso argomento meccanico di comporre e decomporre le forze fu dai Matematici francesi, sul finir del secolo XVII, creduto cosa nuova, perchè il lungo decorrer dei secoli, e la giovanile baldanza dei progressi,

avevano fatto dimenticare e disprezzare le antiche tradizioni della Scienza. Scaturivano quelle tradizioni dalle fonti aristoteliche, le quali poi vennero a formare due rivi, sullo scoperto margine dell' un de' quali scendevano ad abbeverarsi i Matematici, più seguaci del vero che di questo o di quel Maestro. L' altro rivo parve disperdersi sotto terra, e ivi dentro, quasi a mantenervi perpetua la verdura, ricircolare invisibile nel Libro archimedeo delle Spirali. La XVIII proposizione di questo, e la prima Della dimensione del circolo, per volerne penetrare il segreto, posero, da che riapparirono al mondo, a tortura gl' ingegni dei primi interpetri, i quali vi s' affaticarono inutilmente, perchè, non curando i libri aristotelici, non era a loro venuta a mano la chiave per aprir quei misteri. Ond' a ripensar che fra cotesti non curanti era anche il Torricelli, sarebbe da dir miracoloso il suo ingegno, perch' egli fu, almeno tra noi, il primo a scoprir che il segreto della XVIII delle Spirali dipendeva tutto dal principio dei moti composti. Il miracolo però svanisce osservando che al difetto delle tradizioni aristoteliche supplirono le galileiane, benchè non legittime, come più qua vedremo. Ma per dichiarar meglio i fatti recenti giova risalir col discorso a quell' alta sfera, dove il contemplativo Siracusano ha il suo cielo, se i troppo acuti raggi non c' impediranno la debole vista.

Da che nacque la Geometria sino al tempo nostro (scriveva Antonio Nardi in un suo libro rimasto manoscritto, e di cui daremo qualche notizia in quest' altro capitolo) s' è senza successo cercata la misura precisa del cerchio, e del suo perimetro. È fra cotesti cercatori il più celebre Archimede, gli sforzi del quale, benchè fossero senza successo in ordine al fine che direttamente s' era prefisso, pur lo condussero per via indiretta a quella geometrica invenzione stupenda, nei più riposti segreti della quale osa ora di penetrare la nostra Storia.

Ritornando indietro per XXII secoli, troveremo il nostro Matematico lungo il solitario lido siracusano sedersi contemplativo innanzi alla figura di un circolo, ch' egli ha descritto sopra l' arena. La cura, che al presente lo preme, è di misurare la precisa lunghezza delle linee rette, dall' ambito delle quali si racchiuda uno spazio uguale a quello, che dentro sè racchiude l' ambito della curva. Il primo pensiero che lo lusinga è quello d' inscrivere un poligono regolare, a cui solo mancano, per uguagliarsi al circolo, gli spazi rimasti presi tra i lati inscritti e gli esterni archi sottesi: spazi, che vanno sempre più ad assottigliarsi, quanto i lati del poligono son più suddivisi. Così la circolar superficie differirebbe di poco da quella di altrettanti triangoli, appuntati tutti nel centro, e perciò tutti aventi la medesima altezza poco differente dal raggio, quanti sono i lati del poligono, che a ciascun triangolo servon di base. E qui gli balenò alla mente che si potevano que' tanti triangoli ridurre a uno solo, stirando in dirittura il perimetro dello stesso poligono inscritto. Anzi, perchè non si potrebbe far ciò della medesima circonferenza? la quale immagina Archimede essere diventata un filo flessibile, con le due estremità toccantisi in B (fig. 270), l' una delle quali tenuta in B

ferma, prende l'altra, e la svolge, e la stira nella dirittura BC in modo, che faccia con AB un angolo retto. Or che rimane altro a fare, se non che ricongiungere i punti A, C, per annunziare questa verità al mondo maravigliato? *Omnis circulus aequalis est triangulo rectangulo, cuius radius est par uni eorum, quae sunt circa rectum angulum; circumferentia vero basi.* (Opera cit., pag. 128).

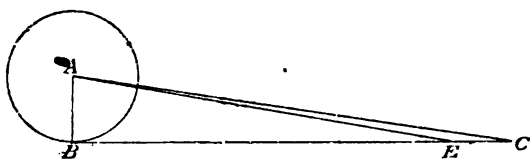



Figura 270.

Conseguiva di qui una verità, la quale, benchè non riuscisse ai Geometri nuova, aveva nonostante abito nuovo, e maniera più familiare, perchè, come sapevasi che il triangolo ha per misura la base moltiplicata per la metà dell'altezza, così rendevasi ora manifesto che lo spazio circolare è misurato dal prodotto della circonferenza per la metà del raggio. Il principale intento però, con quella meccanica stiratura violenta, non era conseguito, dovendosi, tra la curvità e la rettitudine, trovar piuttosto la proporzion naturale nei legittimi termini della Geometria. Parve allora ad Archimede che l'astrusa questione si risolverebbe, quando, invece di dare il punto C alla AC determinato, fosse ella stessa che lo determinasse sopra la BC, condottavi per una certa necessità di legge: a ricercar la qual legge, essendo ora rivolti gli studi del Matematico, dobbiam dire come e quale ei la trovasse.

L'avevano nell'ardua via preceduto Dinostrato e Nicomede, la quadratrice famosa proposta dai quali porse al Nostro occasione di formulare, e di dimostrare matematicamente le leggi dei moti uniformi. Essendo una di coteste leggi che, dove i tempi sono uguali, le velocità stanno come gli spazi, ebbe, assai prima di Pappo, ad accorgersi che nel meccanismo della Quadratrice, inventato apposta per uso della Ciclometria, quel che s'andava cercando già supponevasi noto. Giovò nonostante ad Archimede l'invenzione de' due Geometri, che gli fece rivolgere la mente sopra le curve descritte dalla mistion di due moti. Parve a tutti fra coteste curve sopra ogni altra bellissima quella, che a testimonianza di Pappo (Collect. mathem. cit., pag. 82) aveva già Conone Hamio immaginato descriversi da un punto, il quale, mentre, a mover dal centro, passa equabilmente tutto intero il raggio, nel medesimo tempo compia intorno a esso centro il suo giro.

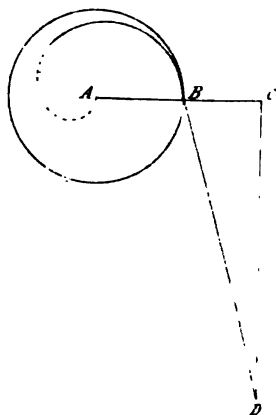



Figura 271.

Suppongasi, diceva Archimede, che sia in B (fig. 271) il termine del moto composto, e che di lì in poi sia il punto mobile lasciato in libertà: avverrà di lui quel che avviene del sasso, nell'atto di sciogliersi dai legami della fionda, o del fango

schizzato dal carro, nel veloce rivolgersi della ruota: avverrà cioè che i detti mobili proseguiranno col preconcetto impeto il loro viaggio in linea retta tangente il punto, dove si separarono dalla curva. Era appunto questa tangente la linea, che Archimede cercava, perchè, resultando per essa il moto unico composto dei due, uno proporzionale alla lunghezza del raggio, e l'altro proporzionale alla circonferenza; tirata al raggio AB, o al suo uguale BC, perpendicolare una linea indefinita, basta condur da B una tangente al circolo, o all'elice, perchè ella intersechi sopra quella linea lasciata indefinita una lunghezza precisamente uguale alla stessa circonferenza. Erano dall'altra parte ad Archimede noti i principii, per giunger direttamente a una tal conclusione, avendo Aristotile insegnato, anzi riconosciuto come cosa per sè manifesta, *quod id, quod secundum diametrum duobus fertur lationibus, necessario secundum laterum proportionem fertur*: onde il punto, mosso dianzi con impeto proporzionale al raggio BC, e alla circonferenza rettificata CD, che sono i lati del triangolo o del mezzo rettangolo; ora ch'egli è libero sarà necessariamente trasportato secondo il diametro BD.

La nuova bellissima proprietà così scoperta s'annunziava nella XVIII proposizione del libro delle Spirali, ma chi legge ivi il modo com'è dimostrata direbbe che qualche malevolo abbia sostituita alla vera quest'altra dimostrazione, andante per vie oblique e intralciate, quasi per trarre studiosamente in agguato l'ingenuo lettore. E avvenne infatti così, perchè i commentatori e gl'interpetri non riuscirono a indovinare qual si potess'essere la mente dell'Autore. Alcuni fra costoro, come il Rivault in Francia, e il nostro Nardi, crederono che la detta proposizione XVIII fosse ordinata alla quadratura del circolo, non per concluderla direttamente, ma per mostrare che ell'era possibile. L'inganno sarebbesi potuto fin d'allora sospettar facilmente, perchè da nessuna parte del libro delle Spirali trasparisce che tal si fosse l'intenzion dell'Autore: ma si rende ora manifesto dall'investigata storia dell'invenzione, la quale, benchè avvenisse propriamente in grazia del circolo, riconosciuta per lui inutile ancella, fu costituita in dignità propria, indipendente e signora. Rimase in ogni modo, per tanti secoli infino al Torricelli, una tale notizia occulta, come occulta rimane tuttavia la ragione, perchè Archimede, alle facili vie dirette, preferisse le oblique.

Il Nardi fa in proposito un'osservazione importante, dicendo, in una delle sue *Ricercate geometriche,* che, se le dimostrazioni indirette o all'assurdo possono nelle menti generare certezza, non valgono nulladimeno a dare alle verità dimostrate evidenza. « E però, soggiunge, io me ne asterrei sempre, quando potessi per altra via arrivare al proprio fine. Imperocchè, pochi penetrando la forza di tali dimostrazioni, dubitasi talvolta del loro fondamento. Archimede con tutto ciò non solo non s'astenne, ma incredibilmente amò tal maniera di dimostrare. Non fu già il primo a servirsene, poichè dal XII degli Elementi l'apprese, dove materie simili a quelle ch'egli tratta si trattano nella stessa guisa, sicchè il contrario di quello che scrisse scriver doveva Luca Valerio, mentre diverso dallo stile di Euclide giudicò quello di Archimede.

Piacque ad Archimede tal metodo, non tanto perchè in pronto non avesse forse sempre il diretto, e pur volesse far uniforme delle sue dimostrazioni il metodo; quanto per più mirabili far le sue proposte apparire, il che non così conseguito avrebbe con l'altro. »

Non tutti forse di questo discorso resteranno sodisfatti, ma comunque sia è tempo di venire al proposito nostro, ch'era quello di narrar come fosse il Torricelli il primo a scoprire che, procedendo per la via de' moti composti, s' incontrò Archimede in quell'ammirabile proprietà delle Spirali. Qual si fosse l' occasione della scoperta è dal Torricelli stesso detto in una lettera a Galileo, scritta da Roma il dì 29 Giugno 1641. « Questi giorni passati, leggendo un manoscritto d' un amico virtuoso, notai uno sforzo ch' egli fa, per trovar l'origine della proposizione XVIII della Spirale di Archimede. Mi parve che io ne cavassi poco frutto, onde ripensandovi dopo mi venne sospetto che quella dottrina pendesse dalla Scienza del moto, e in particolare da una proposizione di V. S. E., posta nel principio *Dei proietti,* la quale facilmente le sovverrà nelle sue tenebre luminose, per essere un semplicissimo triangolo rettangolo, e tratta di questo: che se un mobile camminerà di due moti ecc. il momento della velocità sarà in potenza uguale a quelli due » (Alb. X, 423, 24). E con queste parole accompagna al Maestro il Torriselli *un suo discorsetto,* in cui veniva applicando il detto teorema dei Proietti a dimostrar la proposizione, ch' è in ordine la XVIII dell' antico libro delle Spirali, e la prima di questo nuovo, formulata così nello stesso modo archimedeo :

« Propositio I. — *Si spiralem, ex prima circumvolutione ortam, recta linea tetigerit in termino Spirae, a puncto vero, quod est in principio spirae, quaedam ducatur ad angulos rectos ei, quae est principium revolutionis; ducta incidet in tangentem et ipsius, quae pars media erit inter tangentem et principium spirae, aequalis erit periferiae primi circuli* » (Opera cit., pag. 377).

« Domandiamo che se un mobile sarà trasportato con impeto per alcuna linea curva, liberato ch' egli sia dal legame, che lo necessitava a camminar per la curva, seguiti il suo moto per linea retta, non avendo egli nuova occasione di piegare il suo viaggio da alcuna parte. »

« Domandiamo ancora che tal retta sia tangente della linea curva, in quel punto d' essa, nel quale sarà stato liberato il mobile dalla precedente curvità. »

« Fu la verità di questa domanda provata già con acuti discorsi dal signor Galileo, in altre sue opere. Noi solamente l' esemplificheremo così: Intendasi in un piano orizontale incavato un canalino, e sia di pianta circolare, o parabolica o spirale. Se una palla di metallo perfettamente liscia sarà da qualche impulso spinta nel canaletto, ella trascorrerà in esso, ed obbedirà necessariamente alla piegatura degli argini suoi, sin tanto che durerà l' incassamento di essi. Ma subito finito il canale, mentre la palla resti libera sopra il piano orizontale, dimenticata della strada precedente, seguiterà

con il suo impeto a correre, non più per circolo o per elice, ma sì bene per linea retta. Sarà poi per appunto tal linea retta tangente alla curva del canaletto in quel punto, dove il mobile si sarà liberato dalla sua piegatura. »

« Definizione: *Si recta linea in plano sit ducta, et, quiescente altero eius termino, aequali velocitate circumferatur, donec restituatur in eum locum, unde moveri coeperat, et simul cum linea circumlata punctum feratur aequali velocitate ipsum sibi ipsi, et per se secundum dictam lineam latum, incipiens a termino quiescente; punctum hoc describit in plano lineam, quam Spiralem, sive Helicem vocamus* » (Archim. ad propos. XII De lineis spiralibus).

« Stante questo, io dico che quel punto mobile, il quale descrive l'Elice, averà nel fine della prima revoluzione un momento tale d'impeto, che, se seguitasse a camminare di moto equabile con quello, trascorrerebbe, in altrettanto tempo quanto ne ha speso nella prima conversione, due spazi, uno però progressivo e l'altro laterale, ed il progressivo sarebbe uguale al semidiametro del circolo della prima revoluzione, l'altro, cioè il laterale, sarebbe uguale alla periferia dello stesso circolo. »

« La prova di questo sarà facile, se noi separeremo con l'astrazione i due momenti d'impeto l'uno dall'altro. Immaginiamoci dunque che nell'estremo della prima circolazione il punto mobile seguiti a camminare progressivamente per il semidiametro, slongato fuori del circolo, ma che intanto il semidiametro medesimo stia fermo. Non è dubbio che, in altrettanto tempo quanto il punto mobile averà speso nella prima conversione, camminerà fuori del circolo altrettanto spazio progressivo quanto ne averà camminato nella prima conversione, cioè precisamente un semidiametro del primo circolo. »

« Astragghiamo ora al contrario, ed immaginiamoci che, nella medesima estremità della prima conversione, il punto mobile si fermi nel semidiametro, e resti senza alcun moto progressivo, ma però che il semidiametro seguiti il suo moto conversivo. È chiaro che il punto mobile camminerà ora per la periferia del primo circolo, e la scorrerà tutta precisamente in altrettanto tempo, quanto egli ne aveva speso nella prima conversione. »

« Parmi abbastanza provato che il punto mobile di Archimede, nella estremità della prima revoluzione, abbia un tale momento composto di due momenti, ovvero impeti, cioè uno progressivo e dilungativo dal centro, e l'altro laterale, sicchè questi due impeti abbiano una particolar proporzione fra di loro, come quella del semidiametro alla periferia: cioè tale, che nello stesso tempo, nel quale il punto mobile si avanzerà di moto progressivo, quanto è lungo un semidiametro; in quello stesso tempo per l'appunto si spingerà lateralmente per tanto spazio, quanto è lunga la periferia dello stesso circolo. »

« Si proponga ora la XVIII delle Spirali. Immaginiamoci che il semidiametro AB (nella precedente figura 271), nel quale è il principio e fine dell'Elice, sia prodotto e prolungato fuori del circolo altrettanto, quanto è esso semidiametro, sicchè la BC sia uguale alla AB, e per l'estremo punto

della prolungata tirisi una linea CD ad angolo retto con essa, da quella parte, verso dove camminano l' ultime parti della Spirale. Supponiamo ora che il punto mobile di Archimede, subito giunto all' estremità della prima rivoluzione in B, resti libero dal semidiametro suo deferente, e dalla Spirale fin là descritta, e seguiti a camminare con tutto l' acquistato momento delli suoi impeti: conforme alle petizioni premesse, questo punto continuerà la sua lazione per una linea retta, e questa linea retta sarà tangente alla Spirale. Dico che questa tangente concorrerà con la perpendicolare da noi tirata CD, e che la porzione CD di detta perpendicolare, intercetta tra il concorso della tangente e il semidiametro prolungato, sarà uguale alla periferia. »

« Quanto al primo, che la retta tangente prolungata concorre con CD, è manifesto: poichè se non concorresse, essendo retta, averebbe dunque il punto mobile perso l' impeto progressivo, ch' egli in B aveva verso la linea CD, contro supposizione. »

« Concorra dunque per esempio in D: proverò che la porzione tagliata CD sia uguale alla periferia del primo circolo. Poichè, se fosse disuguale, averebbe il punto mobile compito *eodem tempore* per la diagonale BD tanto di spazio progressivo, quanto è il semidiametro BC, ma non già tanto di laterale, quanto la periferia. E però conseguentemente, quando il punto mobile restò libero in B, non averebbe avuto in sè quel momento, che da noi si dimostrò avere, cioè di correre *eodem tempore* due spazi, uno progressivo quanto il semidiametro, e l' altro laterale quanto la periferia. »

« Che poi il triangolo BCD sia lo stesso che quello di Archimede, sebbene contrariamente posto, non ci è difficoltà. Nello stesso modo si dimostra la verità delle due seguenti proposizioni, nel maraviglioso libro delle Spirali. A noi basterà di avere accennato per qual via Archimede possa essere venuto in cognizione d' una verità tanto astrusa, e per così dire inopinabile, come la suddetta. Credo certo che l' Autore a bello studio volesse occultare ed inviluppare la dimostrazione del teorema a segno tale, che non si potesse conoscere da che origine glie n' era derivata la cognizione. Però nel corso di tanti secoli non fu mai capita evidentemente questa passione della Spirale, non per altro, che per la mancanza della dottrina *De motu,* nota benissimo fino ne' suoi tempi all' Archimede antico, ma pubblicata solamente ne' nostri dal Moderno. »

« Che i mezzi, dei quali l' Autore si serve nella dimostrazione, siano per così dire improprii, e che altrettanto appropriati siano quelli, che procederanno con la dottrina del moto, si può argomentare dalla definizione stessa, la quale altro non contiene che l' immaginazione di due movimenti, dalla mistione dei quali resulta poi quel viaggio spirale. Perciò chi con le cose poste nella definizione, cioè con la scienza del moto, cercasse di provare anco i teoremi dipendenti da quella, mi pare ch' egli si servirebbe dei mezzi propri per arrivare alle conclusioni, e che però produrrebbe scienza evidente, o come dicono, *a priori.* Al contrario, dimostrandosi indirettamente tali proprietà, con mezzi alieni dalla definizione, oltre l' oscurità e la lun-

ghezza, nella quale s' incorrerà, si produrrà al lettore una scienza in certo modo accidentale, di tal sorta che egli conoscerà bene di non poter contradire a quella proposta, ma non intenderà già come, e per qual causa, quella conclusione sia necessariamente vera » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIV, fol. 201-5).

Stato con grande attenzione ad ascoltare questo discorso, dettò Galileo per risposta essergli sembrato maraviglioso il concetto, sovvenuto al Torricelli per dimostrare, con tanta facilità e leggiadria, quello, che Archimede, con strada tanto inospite e travagliosa, investigò nelle sue Spirali: « strada, soggiungeva, la quale a me parve sempre tanto astrusa e recondita, che, dove con lo studio per avventura di cento anni non mi sarei disperato del tutto di trovare l' altre conclusioni del medesimo Autore, di questa sola non mi sarei promessa l' invenzione in molti anni, nè in perpetuo. Ora giudichi V. S. quale mi sia riuscito il suo gentilissimo trovato » (Alb. VII, 366). Delle quali parole di lode, e della lettera in cui furono scritte, tanto si compiacque il Torricelli, che, nello scolio alla sua XVIII del primo libro *De motu,* ne volle fare solenne commemorazione. (Op. geom. cit., pag. 121).

Notabilissima cosa è che in quello stesso Scolio, sottilmente esaminando, si trova una confutazione di quelle dottrine galileiane *De motu,* dimostrate nel Dialogo dei proietti, che il Torricelli diceva essergli servite di chiave per aprire il segreto archimedeo delle Spirali. Il teorema infatti del Maestro insegnava che il moto per l' ipotenusa era uguale in potenza alla somma dei moti per i cateti, e il Discepolo, nello Scolio citato, par che voglia correggere l' errore, dicendo che, non uguali in potenza, ma proporzionali ai due lati BD, DC (fig. 272) di un parallelogrammo son le due forze resultanti nell' unica direzione della diagonale. Ma intorno a ciò, dovendoci trattenere altrove, trapasseremo per ora a dire come, applicando esso Torricelli i principii dimostrati in quel medesimo Scolio, risolvesse varii problemi di Meccanica nuova, incominciando da quello delle tangenti.

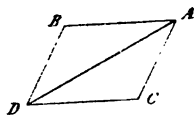



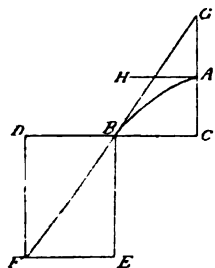
Figura 272.

L' invenzione di condurre per via meccanica le tangenti alle curve occorse al Nostro, come anche al Roberval in Francia, a proposito della Spirale, d' onde venne facilmente il pensiero di farne alla Parabola de' proietti l' applicazione immediata. Sia AB (fig. 273) la curva descritta, al punto B della quale si vuol condurre la tangente. Sarà tale, per le supposizioni premesse alla precedente proposizione, la resultante unica de' due impeti, dai quali è sollecitato il mobile in B, uno progressivo secondo BC, e l' altro discensivo secondo AC, ond' è che tornerà allora sciolto il problema, quando sian ritrovate fra quegli stessi due impeti le proporzioni. Dovendo in ogni modo essere ambedue proporzionali agli spazi passati, se il progressivo è rappresentato da BC, il discensivo sarà, per il primo teorema dimostrato nel terzo dia-

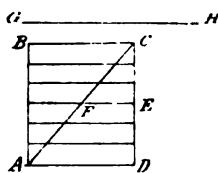
Figura 273.

logo di Galileo, rappresentato dal doppio di AC. Si prolunghi perciò la CB per altrettanto spazio in D, e si conduca BE, che sia alla AC doppia e parallela: compiuto il parallelogrammo DE, e tirata la diagonale BF, se si immagini essere il mobile in B abbandonato a un tratto dall' impeto violento, proseguirà naturalmente nella direzione BF il suo viaggio, tangente in B la curva, da cui s' è sciolto. È dunque la BF o la sua uguale BG la linea cercata, la quale poteva descriversi con più facile costruzione, duplicando in G la lunghezza AC dell' asse della parabola, e congiungendo i punti G, B, come avrebbe insegnato di fare la Geometria.

Così è sciolto dal Torricelli il problema, quando l' incremento della velocità nel moto discensivo è lineare, e la parabola descritta è perciò la naturale, ossia la quadratica. Che se il detto incremento invece è quadratico, cubico, biquadratico, ecc., e le parabole, per quel che fu dimostrato nella XII proposizione della prima parte di questo capitolo, son cubiche, biquadratiche, cuboquadratiche, ecc., immaginando che sia il proietto attratto al centro con qualunque fra gli assegnati gradi di accelerazione, prosegue il Torricelli ad applicare il medesimo metodo per condur le tangenti anco a queste curve paraboliche, che s' ingradano via via. Qualunque poi sia questo grado, l' impeto progressivo è sempre rappresentato da un' ordinata simile alla BC, nella precedente figura, ond' è che tutto si riduce a sapere ne' vari casi qual sia la proporzione, che ha la BE verso l' AC, perchè così anche sapremo quali sono i lati del parallelogrammo, dal diametro del quale è designata la tangente richiesta. Per dimostrar dunque con qual varia proporzione crescon gli spazi, passati equabilmente nel medesimo tempo che si passa lo spazio AC, co' vari gradi di accelerazion discensiva; si premette dal Torricelli per lemma un teorema, che, fra quelli mandati in Francia, è sotto il numero LI formulato in questa maniera:

« Se sarà il parallelogrammo ABCD (fig. 274), col suo triangolo ACD, tutte le infinite linee del parallelogrammo, a tutte le infinite linee del triangolo, sono duple: ma tutti i quadranti sono tripli di tutti i quadrati; tutti i cubi sono quadrupli di tutti i cubi, tutti i quadratoquadrati sono quintupli di tutti i quadratoquadrati, ecc., in infinitum in tutte le infinite dignità dell' algebra » (MSS. Gal. Disc., T. XXXIII, fol. 39). I matematici moderni formulerebbero così, nel loro proprio linguaggio, il medesimo teorema: *La somma di tutte le potenze dell'ordine* n *di una quantità, continuamente crescente, è alla somma di altrettante potenze simili della quantità massima nella proporzione medesima di* 1 *ad* n + 1.

Figura 274

Il Frisi, nelle Operette scelte dal Silvestri di Milano (1825, pag. 239), attribuisce questo teorema al Cavalieri, di cui fa l' elogio: ed è un fatto che nella quarta Esercitazione geometrica le proposizioni XIX, XX e XXI dimostrano verificarsi la cosa annunziata, particolarmente per le potenze lineari, quadratiche e cubiche. Nella XXII poi si propone similmente il Cavalieri di

dimostrare che « Omnia quadratoquadrata parallelogrammi quintupla sunt omnium quadratoquadratorum trianguli, per diametrum constituti » (Bononiae 1647, pag. 274), ma la via da lui presa non lo porta più oltre, ond' è vera l' osservazione storica dopo le parole da noi sopra trascritte, così dallo stesso Torricelli soggiunta:

« Questo teorema fu primieramente inventato e proposto da fra Bonaventura Cavalieri, ma però da esso non fu ritrovata la dimostrazione universale, avendo egli presa una strada che, per quanto intendo, cammina solo infino alli cubi, ovvero alli quadratoquadrati. Il primo, che abbia dimostrato il teorema universalmente in tutte le infinite dignità dell' algebra, è stato monsù Beugrand francese, che ora è morto. La sua dimostrazione però cammina per via di algebra. Dopo questo, per quel ch' io sappia, nessuno ha dimostrato il teorema, fuor che me, e la mia dimostrazione procede senz' algebra, per sola Geometria, e non solo è universalissima, come quella di monsù Beugrand, ma è infinite volte più universale » (MSS. Gal. Disc., T. XXXII, fol. 40).

Essendo alieno dal presente nostro proposito, non ci tratterremo qui a dire in qual modo si dimostrasse dal Torricelli, per sola Geometria, il Teorema, contentandoci più quà di riferire, per i quadrati particolarmente, un esempio. Tenendo perciò il detto Teorema, quale fu proposto ai Francesi, per dimostrato, è da vedere come servisse di lemma a ritrovare quanto della AC, rappresentata nella figura 273 qui poco addietro, debba essere in qualunque parabola molteplice la CG, che s' ha da prendere per la misura dell' impeto verticale, costruendosi sopr' essa, e sopra un' ordinata simile alla BC, il parallelogrammo delle forze. Il Torricelli conclude essere la richiesta moltiplicità uguale al grado della parabola, con un discorso che brevemente riducesi a questo:

Se le velocità crescono come i semplici tempi, lo spazio, che equabilmente è passato dal mobile con l' ultimo grado dell' accelerazione, è doppio, per il teorema primo di Galileo, di quello stesso passato acceleratamente nel medesimo tempo, ossia sta come le infinite linee del parallelogrammo ultimamente disegnato, alle infinite linee del triangolo inscritto. Ma se le velocità crescono come i quadrati dei tempi, lo spazio allo spazio sta come i quadrati ai quadrati, ossia, per il passato lemma, come tre a uno: se le velocità crescono come i cubi, lo spazio sta allo spazio, come i cubi ai cubi, ossia come quattro a uno: e in generale, se le velocità crescono come la potenza n dei tempi, lo spazio allo spazio starà come $n + 1$, ossia, per le cose dimostrate, come l' esponente della parabola ad uno. Di qui la regola torricelliana *Pro tangentibus infinitarum parabolarum,* formulata nell' appresso

« Propositio II. — *Esto in parabola quaelibet AB* (nella passata figura 273), *cuius diameter AC, applicata CB: fiat ut esponens ad unitatem, ita CG ad AC. Dico ductam BG esse tangentem.* »

« Nam, quaecumque sit parabola, velocitas puncti mobilis crescit secun-

dum rationem dignitatis parabolae: hoc est, in quadratica, velocitas crescit in ratione duplicata temporum; in cubica vero crescit in triplicata etc. Ergo, per iam dicta, si mobile B, dum est in B, per tangentem procedat, et recurrat motu aequabili, debet, quo tempore recurrit BC, hoc est tempore casus, duplam, triplam, quadruplam, ipsius AC recurrere, secundum rationem dignitatis parabolae. Ergo tangens pertinet ad G » (MSS. Gal Disc., T. XXXI, fol. 342).

Il processo di questa dimostrazione si trova ordinatamente disposto nel manoscritto esemplificato nelle tangenti la parabola cubica, per dimostrar la via da seguirsi in qualunque altro caso proposto. Mostreremo ora qual sia quel processo nelle sue varie parti, cominciando dal seguente lemma, preparato apposta dal Torricelli per dimostrar che gl'infiniti quadrati delle linee, che compongono il parallelogrammo, son tripli degli infiniti quadrati, fatti sulle linee del triangolo inscritto.

Abbiasi un parallelepipedo, quale si rappresenta nella figura 275, e sopra la medesima base DL si inscriva una piramide appuntata in B, il lato AB della quale farà nel parallelogrammo CD da diametro. Siano ambedue i solidi, a qualsivoglia punto della loro altezza, attraversati da un medesimo piano, che faccia nel parallelepipedo la sezione FH, e la FI nella piramide. È facile dimostrare che il quadrato della linea EF, la quale è una delle infinite del parallelogrammo CD, sta al quadrato della GF, una delle infinite linee componenti il triangolo ADB, come la sezione FH sta alla sezione FI. Chiamate infatti S, S′ le due dette sezioni, sarà S : S′ = EF . EH : GF . GI. Ma, per la similitudine de' triangoli, abbiamo AL : GI = AB : BG = AD : GF, e AL = EH, AD = EF; dunque EH : GI = EF : GF, e perciò S : S′ = EF² : GF², come si doveva dimostrare. Così poi sempre essendo, per qualunque sezione, si potrà concluderne che gl' infiniti quadrati del parallelogrammo stanno agli infiniti quadrati del triangolo, come gl' infiniti piani tutti uguali a FH, componenti il parallelepipedo, stanno agl' infiniti piani simili ad FI, componenti la Piramide, ossia come tre sta a uno.

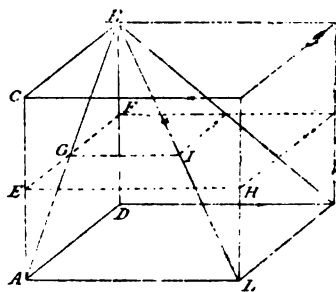



Figura 275.

« Posta la figura come qui (così, attraverso alle parole che trascriviamo, come attraverso a interrotti globi metallici fa il Torricelli passar la folgore del suo pensiero) dico che tutti i quadrati del parallelogrammo AB son tripli di tutti quelli del triangolo ADB. Perchè, tirata la EF a caso, dirai: Il quadrato EF all' FG sta come il piano FH ad FI, et hoc semper, e gli antecedenti sono uguali sempre, dunque etc. Come il parallelepipedo alla piramide, così tutti i quadrati del parallelogrammo a tutti i quadrati del triangolo, quod etc. » (ivi, T. XXXV, fol. 13).

« Propositio III. — *Gravia descendunt ita ut temporibus aequalibus*

aequaliter crescant velocitates, ut optime docet Galileus. Supponamus iam mobile aliquod descendere ita ut velocitates crescant ut quadrata temporum. Ex. gr. esto CD (nella passata figura 274) *tempus descensionis, et sit quadratum AD velocitas, quam habet mobile in fine descensionis. Peracto tempore CE, debebit eius velocitas esse ut quadratum EF, nam quadratum AD et EF sunt ut quadrata temporum CD, CE. Esto GH spatium peracto tempore OD, quaeritur: si grave in fine descensionis convertatur horizontaliter, cum impetu AD, quodnam spatium conficiet tempore aequali tempori descensus? Dico triplum.* »

« Nam, quando mobile, tempore CD, adhibet tot tantasque velocitates, quot quantaque sunt omnia quadrata trianguli ACD, peragit spatium GH. Sed quando eodem tempore adhibet tot tantasque velocitates, quot quantasque sunt omnia quadrata parallelogrammi BD, triplum spatium conficere debebit, nam, per praecedentem demonstrationem, quadrata quadratorum sunt tripla. Idem dicas de reliquis algebrae dignitatibus » (ibid., T. XXXI, fol. 341).

« Propositio IV. — *Esto parabola quaelibet ex. gr. cubica AB* (nella figura 273), *cuius ad punctum B quaero tangentem.* »

« Sumatur CG multiplex ipsius AC iuxta dignitatem parabolae; hoc est in casu nostro tripla, et, iuncta GB, tangens erit. Nam punctum mobile B, quod parabolam describit, in loco B duos impetus habet, alterum horizontalem secundum AH, tangentem, alterum perpendicularem secundum diametrum AC, quorum rationem inquiro hoc modo: Impetus horizontalis, tempore casus, peragit spatium CB: impetus vero perpendicularis, per iam dicta, si aequabilis conservetur, tempore casus, curreret triplum ipsius casus AC spatium. Ergo motus, sive directio puncti B, quae componitur ex duobus velocitatibus, quae sunt ut BC ad CG, erit iuxta lineam BG. Propterea BG non secat curvam, sed tangit. Quae vero, brevitatis causa, exemplivificavimus in cubica, dici posset de quacumque parabola » (ibid., fol. 341).

Haec demonstratio peculiaris est pro parabola poteva qui ripetere il Torricelli, com' aveva scritto nello Scolio alla XVIII proposizione del primo libro *De motu gravium* (Op. geom., P. I, pag. 121), dove, dopo la detta osservazione, soggiunge ch' egli aveva altresì un metodo di condur le tangenti universale per tutte le sezioni coniche, per la Spirale archimedea, e per simili altre curve; fra le quali anche la Cicloide. Riguardo alla Spirale il metodo è stato esposto nella prima proposizione di questa terza parte: riguardo al circolo e all' iperbola, fra le sezioni coniche, nella IX, X e XI della prima parte del presente capitolo, e tra poco ne vedremo fatta l' applicazione alla Cicloide. Ma perchè così fatte invenzioni matematiche del Torricelli compariscono ora, dopo due secoli e mezzo, nella nostra Storia, alla luce; e il metodo del Roberval, infino dal 1668, era stato in Francia dal Bourdelois fatto noto; invece di disputare a quale de' due Matematici si convenga il primato, giova per ora osservare com' ambedue, partiti dai medesimi principii, procedessero indipendenti per vie diverse, ma che pure s' incontrano spesso spesso, come quelle che tendevano al medesimo fine.

Il principio comune al Roberval e al Torricelli è il parallelogrammo delle forze, proposto e dimostrato così nel sopra citato scolio *De motu gravium,* che il latino di lui sembra essere una traduzione del teorema primo *Des mouvemens composez:* « Si un mobile est porté par deux divers mouvemens, chacun droit et uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit et uniforme diffèrent de chacun d'eux, mais toutefois en mesme plan, en sorte que la ligne droite que décrira le mobile sera le diamètre d'un parallelogramme, les costez duquel seront entre eux comme les vitesses de ces deux mouvemens, et la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamètre a chacun des costez » (Roberval, Ouvrages a la Haye, 1731).

Così l'Accademico di Parigi, come quel di Firenze, considerando che le curvità delle linee geometriche risultano di due moti misti, si proposero di sceverarli ne' due lati opposti di un parallelogrammo, per aver dalla diagonale di lui la direzione delle tangenti. Sono i detti moti per le curve in generale ambedue uniformi, cosicchè i punti mobili, che le descrivono nel medesimo tempo, vanno con velocità proporzionali agli spazi. Ma nella parabola in particolare, riguardando il punto mobile come un proietto, uno di que' moti è accelerato, cosicchè, partecipando la linea alle proprietà della Meccanica naturale, sembrava che ad esser trattata col metodo nuovo, dovesse esser la prima. Così fu veramente per il Torricelli, il quale anzi ne derivò un metodo generalissimo per le infinite parabole, da vincere di gran lunga il Roberval, che, facendone anch'egli la prima applicazione alla parabola ordinaria, non la considerò come descritta dalla Natura, ma dall'arte, a quel modo che nella proposizione XXV del suo secondo libro insegnava il Mydorgio.

Per le altre curve la differenza fra' due Autori consiste nella varietà degli esempi, in cui il Francese ha il vantaggio, avendogli estesi a tutte le sezioni coniche, alla coclea, alla spirale, alla cissoide, alla concoide, alla quadratrice, alla parabola cartesiana: e consiste nella facilità, nella quale insuperabile è il Nostro, benchè sia in ambedue simile il processo dimostrativo, specialmente trattandosi di curve della più facile composizione, qual sarebbe la Cicloide, per condurre le tangenti alla quale la regola del Torricelli, come ora vedremo, è conclusa dal Roberval in queste parole: « Pour trouver la tangente de la Roulette en un point donné, je tire du dit point une touchante au cercle, qui passeroit par le dit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considere ensuite le mouvement, que nous avons donné a nostre point, emporté par le diamétre marchant parallelement a soy mesme. Tirant du mesme point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme, qui doit toujours avoir les quatre costez égaux, lors que le chemin du point F (fig. 276)

Figura 276.

par la circonférence est égal au chemin du diamétre FB par la ligne AF, et si du mesme point je tire la diagonale, j'ay la touchante de la figure, qui a eù ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circolaire et le direct » (Ouvrages cit., pag. 211).

La regola è nel *Traité des indivisibles* così semplicemente descritta, perchè dipende dai principii già dimostrati nelle *Observations sur la composition des mouvemens:* principii per applicare i quali al caso presente si suppone questo facilissimo lemma: *Se abbiasi un cerchio col diametro perpendicalarmente eretto all' orizonte, tutte le corde, condotte dalla sommità di esso diametro a un punto della circonferenza, dividono nel mezzo l' angolo fatto dalla tangente e dalla orizontale in quel punto.* Sia IEL, nella medesima figura, il cerchio come s' è detto, E il punto, da cui vengon tirate la orizontale EM, la tangente EN, e la corda EI: è manifesto che gli angoli NEI, IEM hanno per misura ciascuno la metà dell' arco IE, o del suo uguale, e che perciò l' angolo NEM è dalla IE diviso nel mezzo.

Considerando ora il punto E moventesi nella Cicloide, le EN, EM segnano la direzione dei moti componenti, i quali sono fra loro uguali, avendo il circolo nel progredire per la FA quel medesimo impeto, che nel rivolgersi intorno al suo centro. E di qui è che, presa EM uguale ad EN, e costruito il parallelogrammo, la diagonale ED, diretta secondo EI, sarà la resultante del moto, e la tangente richiesta nel dato punto.

Il metodo meccanico fa esatto riscontro col geometrico, il quale dimostra che la tangente alla Cicloide nel punto E è parallela alla corda GH del circolo genitore descritto intorno all' asse. *Quae Cycloidem contingit recta est correspondenti circuli genitoris circa Cycloidis axem positi chordae ad verticem terminatae, parallela.* Il teorema così proposto fu dimostrato, dopo il Cartesio e il Fermat, dal Wallis, nella prima parte della XXII *De centro gravitatis* (Mechanica, P. II, Londini 1670, pag. 424 e 23), ma il Viviani, tuttavia giovanetto, aveva in Italia preceduto tutti costoro. Fece di ciò solenne testimonianza il Torricelli, il quale, in una lettera scritta sul finir dell' Ottobre 1643 al Roberval, gli diceva: « Tangentem Cycloidi iam ostenderat mihi Vincentius Vivianus florentinus, clarissimi Galilaei alumnus, etiam nunc adolescens » (Roberval, ouvrages cit., pag. 360). Alla dimostrazione geometrica del Viviani aggiunse poi il Torricelli la sua meccanica, della quale non pubblicò che l' enunciato in questa forma:

« PROPOSITIO V. — *Tangens ad datum quodlibet punctum primariae Cycloidis ducitur ex puncto sublimiori genitoris circuli, per ipsum datum punctum transeuntis* » (Op. geom. cit., P. II, pag. 92).

La dimostrazione però è rimasta fin qui sconosciuta in una lettera, scritta da Firenze il di 27 Febbraio 1643 a Michelangiolo Ricci. Ivi anzi è annunziato un altro teorema, del quale non fece il Torricelli allora nessun conto, benchè ne avrebbe indi potuto dedur per corollario immediato il tautocronismo della Cicloide. Così, prevenendo l' Huyghens in una scoperta di tanta importanza, si sarebbe meritata molto maggiore, e più sincera gloria, di

quella che s' aspettava dall' invenzion del modo di ripulire per i Telescopi le superficie de' vetri, de' quali diceva al Ricci di aver piena la testa. Quella torricelliana proposizione poi è tale:

« Propositio VI. — *Se una ruota si rivolgerà sopra un piano, le velocità degl' infiniti punti di lei sono come le corde, che da quei punti vanno al contatto.* »

Sia della ruota DBC (fig. 277) il contatto col piano il punto C, da cui, come da centro, e con gl' intervalli DC, AC, BC, si descrivano archi infinitesimi sulla periferia della ruota: la proposizione è manifesta, considerando che i punti D, A, B si movono nel medesimo istante come sopra le circonferenze di tre ruote concentriche, le velocità delle quali, essendo il moto comune, hanno la medesima proporzione dei raggi.

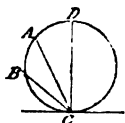



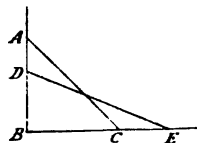
Figura 277.

Passando ora ad applicare la proposizione alla ruota, che descrive la Cicloide nella figura 276, qui poco addietro già disegnata; la velocità dunque del punto G sta alla velocità del punto E, come GA ad EL, o come GHA ad EKL, ossia come AF a FL: ond' essendo le velocità come gli spazi, debbono i tempi necessariamente essere uguali, e perciò la curva cicloidale FEG è *tautocrona*. Il documento di questa, e della precedente proposizione torricelliana, è nella detta lettera al Ricci, che ora diamo alla luce, lasciate indietro le cose, che non appartengono al soggetto presente:

« Dirò a V. S. due bagattelle: Se una ruota si volgerà sopra un piano, come quella delle carrozze, ovvero la ruzzola, le velocità degl' infiniti punti della ruota sono come le corde, che da quei punti vanno al contatto: cioè la velocità di A (nella figura 277) a quella di B, sta come AC alla CB. Ma la dirittura dell' impeto è comune a tutti gl' infiniti punti della ruota, poichè tutti sono diretti verso il punto D. La ruota però va considerata come una semplice periferia. »

« Di qui nasce che la tangente EI della Cicloide, nella figura 276, passa sempre per il punto sublime I del cerchio, che passa per il contatto E. Discorro così: il punto E *duplici latione fertur, nempe directa aequidistanter rectae FL, per rectam EM, et circulariter per periferiam, hoc est per tangentem EN, suntque impetus huiusmodi lationum, sive ipsae lationes, aequales. Ergo neutri illarum obediet, sed aequaliter feretur inter utramque directionem, nempe per lineam EI, quae bifariam secat angulum NEM.* Mi scusi per grazia, perchè ho la testa piena di vetri » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 88).

Figura 278.

« Propositio VII. — *Sia AB* (fig. 278) *un muro eretto al piano dell' orizonte BC, e sia AC una trave appoggiata al muro: cercasi la proporzione del momento, che averanno queste due forze, e dico che la forza A, alla C, sarà come la linea CB alla BA, permutatamente prese.*

Questa medesima proposizione fu da noi trascritta nel Tomo quarto a pag. 64, dove la dimostrazione, rimasta nel manoscritto torricelliano interrotta, si vede supplita dal Viviani, dietro que' cenni, che il Torricelli stesso, in una lettera del dì 20 Gennaio 1643, soggiungeva così a M. A. Ricci, dopo avergli annunziata la scoperta: « La dimostrazione non l'ho scritta, ma pende dalla velocità, poichè movendosi la stanga AC radente le due linee dell'angolo retto ABC, la velocità, nella quale sta costituito il punto A, alla velocità, nella quale sta costituito il punto C, sta come BC alla BA » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 82).

Benchè dunque sia certo che il Torricelli intendeva di dimostrare dai principii statici la verità sopra annunziata, abbiamo voluto nonostante raccogliere la proposizione fra le altre di Meccanica nuova, perchè dette ai Matematici, sul cominciare di questo secolo, occasione d'applicarvi il principio delle forze composte. L'applicazione però, secondo i varii Autori, fu varia, e il problema, proposto già da Leonardo da Vinci, e rinnovellato dal discepolo di Galileo, ebbe, per le complicanze del nodo, maggiori di quel che non parrebbe, soluzioni diverse. Sembra nonostante a noi la più razionale quella, che ne dette Giuseppe Venturoli, desumendola dalle leggi di un sistema rigido in equilibrio, sollecitato da forze parallele. (Elementi di Meccanica, Napoli 1852, pag. 40).

Rappresentino la verticale AC (fig. 279) e la orizzontale CB il profilo del muro, e del pavimento, a cui s'appoggia una trave con le sue testate A, B. Sia in G raccolto il peso P di essa trave e, fatta per G passare la verticale TP, limitata in P dalla orizzontale MP, intendasi in P trasportato il peso, di cui la forza PQ sia decomposta nelle due EP, PD, applicate in AM, BN ai due punti d'appoggio. Si vuol sapere in qual proporzione debbano stare queste forze tra loro, e rispetto al peso, perchè la trave rimanga in equilibrio.

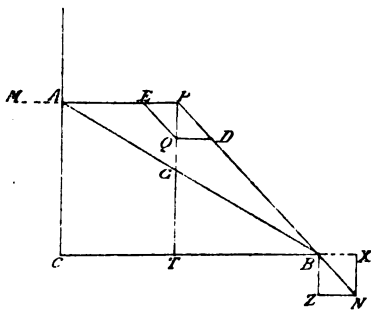



Figura 279.

Si decomponga nuovamente la BN nelle due BX, BZ, e rimossi gli appoggi sieno le forze applicate in direzioni contrarie, così cioè che AM tiri da sinistra a destra, BX da destra a sinistra, e BZ di sotto in su. Le sollecitanti al moto orizzontalmente il sistema sono le AM, BX, mentre le P, BZ lo spingono verticalmente. A farlo poi rotare intorno al centro C, prese le AC, CB per gli assi, tendono da sinistra a destra le forze AM, P, con momenti uguali a AM . CA, P . CT: e a farla rotare da destra a sinistra tende la forza BZ con momento uguale a BZ . BC.

Perchè dunque tutto rimanga in equilibrio, dovranno aversi le tre seguenti equazioni: 1.ª $AM - BX = 0$; 2.ª $P - BZ = 0$; 3.ª $P . CT + AM . CA - BZ . BC = 0$. Dalla prima delle quali si apprende che s'ugua-

gliano le due contrarie spinte fatte orizontalmente: e dalla seconda, che il peso della trave preme con tutto sè il pavimento. Dalla terza poi, sostituitovi P in luogo di BZ, e risoluta rispetto ad AM, avremo $AM = BX = P \cdot \frac{BT}{CA}$. E perchè, chiamato ϕ l'angolo BAC, $BT = BG \operatorname{sen} \phi$, $AC = AB \cos \phi$; sarà $AM = BX = P \cdot \frac{BG}{AB} \operatorname{tang} \phi$, e ciò vuol dire che la spinta orizzontale sta al peso della trave, come la distanza del centro di gravità di lei dal pavimento, moltiplicata per la tangente dell'angolo dell'inclinazione sul muro, sta alla total lunghezza della stessa trave.

Il Torricelli nonostante, avendo a modo suo risoluto il problema, intendeva d'applicarlo a simili altri problemi di Meccanica nuova, e principalmente a quella, che qui segue in ordine:

« Propositio VIII. — *Si cerca per che causa un piccol cerchio di ferro, che fascia una colonna fessa, come nel cortile del palazzo de' Medici, e sotto le logge degli Ufizi, sia bastante a tenere quella colonna che non s'apra, e per conseguenza a reggere quella macchina, acciò non rovini.* »

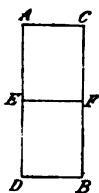



Figura 280.

« Sia la colonna fessa AB (fig. 280) quale si consideri in quattro parti divisa. Certo è che, premendo il peso della fabbrica soprapposta in AC, la colonna procurerà di slargarsi in EF, non potendo AC discendere, se nelle parti di mezzo la fessura della colonna non si slarga. Ora io dico che, ovviandosi presto al disordine, ogni minima forza basterà per fermarla, e che, lasciando fare l'apertura grande, ci vorrà una volta forza eguale al peso, e può anche essere che una volta vi si ricerchi forza mille volte maggiore del peso. »

« Sia la fessura ABCD (fig. 281), l'apertura o larghezza della quale sia BD, e linea perpendicolare sia AC. Per le cose dimostrate nella precedente ponendo un peso in A, ed una potenza uguale in D, il momento della potenza, a quello del peso, sta come la AO alla OD. Per far dunque che i momenti siano uguali, pongasi una potenza, che al peso sia come DO ad AO. Così poi diremo in questo modo: la potenza piccola alla grande sta come DO ad AO, ma la grande al peso stava come AO a DO; ergo ex aequo la potenza piccola è uguale al peso. »

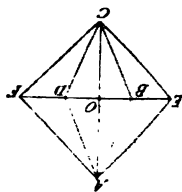



Figura 281.

« Si cava dunque che, per tenere unite le colonne, che non s'aprano maggiormente, ci vuole una forza, la quale al peso abbia la proporzione, che ha il diametro della figura BD, alla perpendicolare AC » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVII, fol. 78).

Sembra che la proposizione sia confermata, anche applicandovi direttamente la regola del parallelogrammo, dalla diagonale AC del quale sia rappresentato il peso. Nella figura ABCD, per far l'equilibrio, ci vogliono due forze

uguali a DA, AB, o ad AB, BC; ma, se la fessura s' allarga in AECF, le forze necessarie a resistere son cresciute come AE, AF, o come AE, EC, e quelle prime stanno a queste, come la diagonale ED sta ad EF. Tali insomma, quali noi gli abbiamo nel fertile campo dissepolti, sono i germi di Meccanica nuova che, spuntati appena nella mente del Torricelli, risecchirono miseramente sotto il gelo della morte.

CAPITOLO VII.

Di altri Discepoli di Galileo promotori della Scienza del moto

SOMMARIO

I. — Di Antonio Nardi, e particolarmente delle sue *Ricercate geometriche:* di Michelangiolo Ricci. II. Digressione intorno alla Cicloide: delle proprietà di lei scoperte dal Roberval, e da altri Matematici francesi. — III. Di ciò che dimostrarono intorno alla Cicloide il Nardi, il Torricelli e il Ricci. — IV. Delle controversie insorte fra il Robervai e il Torricelli, prima intorno alla quadratura, poi intorno al baricentro della Cicloide. — V. Di ciò che a illustrare, a compiere e a divulgare le dottrine galileiane del moto operarono il Cavalieri, il Borelli e il Viviani.

I.

A solo sentirsi annunziare il soggetto del presente discorso non può, chiunque legge, non precorrere con la mente a pensare ai nomi del Cavalieri, del Viviani e del Borelli, che son, per le opere e per la fama, i più conosciuti dopo il Torricelli fra i discepoli di Galileo. La cosa è per sè tanto naturale, che null' altro s' indovinerebbe con maggiore certezza, ma benchè sia un fatto che debbono i tre ora commemorati entrare nell' argomento, non si faranno però i primi, essendo la notizia di essi men desiderata di quella di altri loro colleghi, non punto men valorosi, e rimasti al pubblico sconosciuti.

Di Antonio Nardi aretino non è stato fin qui oscuro fra i Matematici il nome, per essersi scolpito in fronte ai libri torricelliani Dei solidi sferali, ma chi ivi legge, con riconoscenza di discepolo, commemorato l' acutissimo scrutatore dei libri di Archimede non può non sentirsi nascere il desiderio di conoscere, o di avere almeno un saggio delle opere matematiche di colui, che ispirò e dette impulso alla maggiore opera matematica del Torricelli. A

sodisfare al qual desiderio ha conferito in parte la nostra Storia a varie occasioni, e particolarmente discorrendo dei Baricentri, dove si ordinarono dai manoscritti le proposizioni dimostrate dal Nardi, per confermare geometricamente la verità della regola meccanica del Guldino. Altra occasione, per sodisfare ai desiderosi di conoscere un tale uomo, ci si porgeva ora, che trovavasi esso Nardi aver precorso, e in ogni modo concorso col Torricelli nell'invenzione dei centri di gravità di alcune figure, o rimasti ai Matematici fin allora ignoti, o dimostrati con troppo lunghi e faticosi processi. Vorremmo senza indugio dar opera a raccogliere e ordinare così fatti teoremi baricentrici, se non si credesse opportuno il premettere alcune notizie intorno ai manoscritti, da cui sono stati raccolti.

Questi manoscritti son le *Scene accademiche,* penseranno i Lettori, se pur ce ne sono, che dal nostro Discorso preliminare fin qui ci hanno tenuto dietro, e ai quali è noto essere quelle Scene, negli argomenti i più varii, così disordinate, da parere un caos filosofico, piuttosto che un libro. Per tale anzi si riconobbe, e con tal nome si chiamò l'opera dal suo proprio Autore, il quale così ripensava fra sè, e notava in una pagina, giunto a scrivere mezzo il grosso volume:

« Oh quanto confuse sono queste accademiche Scene! Parrebbero l'idea della confusione, se idea la confusione avesse. Ma se ordinate fossino non sarebbero formate da un confuso. Io per me stimo che siano un caos filosofico, il quale facilmente ordinar si possa, purchè la mente gli soprarrivi. Certo che mi sono abbattuto in un luogo loro, d'onde non affatto senz'ordine sembravano. Sovviemmi che, quand'era giovanetto, soleva per ischerzo fingere alcuni disegni che a caso delineati, fuorchè da un sol punto, sembravano. Lo stesso quasi parmi che in questi componimenti accada, di cui la forma un filosofico quasi e tetracordo sistema mi rappresenta. La prima corda è matematica, sopra la quale ricercansi teorie spettanti al numero, misura, momento, movimento ed apparenza delle cose: qual punto della Filosofia con nome di Arismetrica, Geometria, Meccanica, Astronomia e con altri ancora si addita. Quindi la seconda corda segue, che più al concreto ed all'intimo delle cose corporee pertiene, nella quale ricercasi la natura dei veraci corpi, e i loro principii e passioni. Nella stessa maniera si arriva alle particolari nature, incominciando dalle più comuni e men degne, insino all'anima ragionevole si giunge. Qui s'attacca la corda metafisica, ove dell'ente generalmente e de' suoi principii, e del supremo di ogni Ente, con gli aiuti della Natura e della Grazia, discorresi. L'ultima corda aggiunta è varia di critiche, per lo più, e morali materie » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 745).

Di qui si comprende come non fossero le Scene scritte per stamparsi a quel modo, ma per raccoglervi i materiali, da ordinarsi in un libro, dove si ricercherebbero cose di matematica, di fisica, di metafisica e di morale, quasi riducendo la verità nell'armonia di un tetracordo. A raccogliere e a far copiare, tra così fatte *Ricercate,* le matematiche, per darsi alle stampe, attendeva il Nardi nel 1641, come si rileva dalle seguenti parole scritte dal

Cavalieri in una lettera del dì primo Novembre di quell'anno a Giann' Antonio Rocca: « Gli dò poi nuova che mi scrive il Torricelli trovarsi di stanza dal sig. Galileo, ed aspettare in Firenze il sig. Antonio Nardi, credo gentiluomo aretino, che ha da stampare un libro di Geometria, nel quale pretende con modi nuovi di mostrare tutte le cose di Archimede, per via degli indivisibili, quale dice avere fatto una grandissima pratica sopra la mia Geometria » (Lettere a G. A. Rocca, Modena 1785, pag. 268).

Il proposito di venire a Firenze, per aver consiglio col Torricelli, e dividere con lui le cure della stampa, non sembra fosse dal Nardi mandato ad effetto. Un anno e mezzo dopo era tuttavia in Arezzo, dove, scriveva il Torricelli stesso al Cavalieri, attendeva « a far copiare il suo libro geometrico per mandarlo qua a me, acciò io lo faccia pervenire anco in mano di V. P. per sentire una parola del suo purgatissimo giudizio » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 127). A mezzo l'anno 1645, avendo già il Nardi messo in ordine la parte metafisica del suo libro, attendeva alla fisica, ma gli rimaneva tuttavia da tornare sopra alla matematica, come si raccoglie da queste parole, che M. A. Ricci scriveva al Torricelli: « Il sig. Antonio Nardi fatica intorno l'opera sua. Ha dato perfezione alla parte metafisica, ora è d' intorno alla fisica, e poi rivedrà la matematica, il che non potrà seguir prima di dieci mesi, ovvero un anno. E mi duole che tardi tanto ad uscire in luce Opera, che si spera debba essere doviziosa di tutte le speculazioni, cioè pasto per ogni sorta di professori di Scienza » (ivi, T. XLII, fol. 121).

Benchè fossero le Ricercate matematiche state a copiarsi le prime, dice nonostante il Ricci che volle tornar l'Autore in dietro a rivederle, perchè ci aveva certe cose da aggiungere, alcune delle quali, come vedremo, importantissime. Passarono del resto i dieci mesi e l'anno, e le durate fatiche, qualunque se ne fosse la ragione, riuscirono infruttuose. La copia delle Ricercate geometriche, con correzioni e postille autografe, rimase per due secoli e mezzo dimenticata in Arezzo, dove si ritrovarono in questi ultimi giorni alcuni pochi fascicoli mutilati e dispersi, de' quali (non sapremmo con qual consiglio, se non fu quello di mantenere fra le sventurate carte la dispersione) parte fu donato da un Aretino alla Biblioteca nazionale di Firenze, e parte a quella di Roma. Nè ha perciò l' una città nulla da invidiare o da reclamare all' altra, la quale possiede, nella raccolta de' manoscritti galileiani, le Scene intere, inclusevi le Ricercate, no nei loro materiali solamente, ma nell' ordine, secondo il quale volevano essere disposti dallo stesso Autore. È dunque poco da lamentar la perdita, e meno da esultar per l'acquisto, benchè l'aver noi potuto consultare e collazionar con le Scene i manoscritti, donati alle due dette Biblioteche, abbia conferito a darci alcuni utilissimi documenti di storia, come sarebbe per esempio quel che riguarda gli studi fatti dal Nardi intorno alla Cicloide. Così, dall' aver letto nella prima copia delle Ricercate geometriche essersi ritrovata la misura dello spazio cicloidale, per sola meccanica esperienza; abbiamo potuto ragionevolmente argomentare che, dopo il 1641, attese il Nardi a dimostrare geometricamente le proprietà della curva.

Vedremo più qua l' importanza di una tale notizia: ora è da tornar sopra quello, che si diceva, dell' ordine delle materie da trattarsi nelle Ricercate, il quale ordine resulta dagl' indici particolari, scritti dal Nardi stesso per ciascun sistema del suo Tetracordo. Quel che a noi nel presente proposito più importa è l' indice delle Ricercate matematiche, le quali sono otto: le prime tre ordinate a riformare le dimostrazioni di Euclide, le quattro seguenti a dimostrar le ragioni del curvo e del retto, con altro metodo da quello archimedeo, e l' ultima intorno alla dottrina meccanica dei momenti e dei movimenti, alla quale propriamente si riferisce il soggetto del nostro discorso.

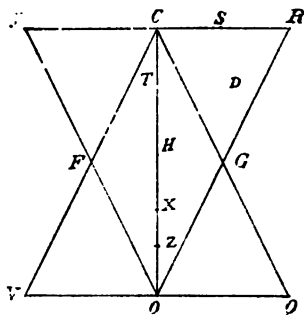
Di questa ottava Ricercata matematica l' indice delle materie è così scritto: *I. Divisione delle Meccaniche. — II. Se Archimede supponga un falso meccanico nella quadratura parabolica. — III. Centro di gravità di alcuni rettilinei, mostrati diversamente dal metodo di Archimede. — IV. Centro di gravità dei triangoli e dei coni. — V. Centro di gravità d' un frusto parabolico. — VI. Centro di gravità del settore di cerchio. — VII. Centro di gravità d' un settore di sfera. — VIII. Centro della potenza, o di gravità, della Cicloide nostra. — IX. Teorema generale meccanico. — X. Forza della percossa. — XI. Di un principio meccanico di Galileo. — XII. Varie osservazioni meccaniche. — XIII. Della scienza esatta del moto. — XIV. Parere del Galilei intorno al moto dei gravi cadenti.* (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 745).

Intorno a varie, fra queste così indicate proposizioni, abbiamo avuto più qua e più là occasione di riferire i pensieri del Nardi, cosicchè non ci rimane altro a dire, che del metodo come furono mostrati dal Nostro i centri di gravità delle varie figure, diversamente da Archimede fra gli antichi, e dal Torricelli fra i matematici moderni. Sarà il trattatello da noi distinto in due parti, secondo che l' invenzione del baricentrico ha per soggetto le figure ordinarie, o quella particolarmente inventata dal Nardi, e che perciò designeremo col nome di *Cicloide nardiana.* La prima di queste parti si compone dei seguenti XII teoremi, da noi raccolti, e qui appresso ordinati:

« Teorema I. — *Nel triangolo VCQ* (fig. 282) *dalla cima C cada CO nella base VQ, dividendola ugualmente: dico che il centro di gravità di esso triangolo è nel punto X, il quale divide CO in modo, che CX è doppio di XO.* »

Figura 282.

« Dividansi ugualmente CV, CQ nei punti F, G, e tirate OFI, OGR, s' eguaglino all' altezza C, sicchè la retta IR passi per C, e sia parallela alla base VQ. Tirisi anche FG, che in H divida CO. I triangoli dunque IFC, CGR sono simili, uguali e similmente posti in riguardo di CH; onde egualmente gravano in CH. Nello stesso modo avviene degli altri VFO, OGQ, che egual-

mente gravano in HO, e ancora il trapezio FVGQ eguale, simile e contrapposto all' altro FIRG, e così graveranno ugualmente in FG, come parimente i triangoli FCG, FOG, o veramente OFC, OGC. Il punto H dunque è centro della figura, e perchè X è centro del triangolo VCQ, il quale è simile a CGR, ed agli altri collaterali e opposti, sarà in essi il centro similmente posto. »

« Sia D il eentro di CGR, e intendasi tirata da D una retta al centro del triangolo IFC, la quale seghi HC in T, e sarà HT uguale a GD. E perchè la retta CX è doppia di XO, anche GD o HT sarà doppia di DS o TC: T poi è il centro della gravità composta dei due triangoli IFC, CGR. Dunque tolti questi, scorrerà il centro H in X, sicchè HX ad HT sarà come i due triangoli al triangolo VCQ. Ma HT è dupla di HX, adunque il triangolo VCQ sarà duplo degli altri due, il che è vero, perchè è vero che il triangolo VCQ è doppio degli altri due » (ivi, pag. 49).

La conclusione, forse dal Nardi non troppo chiaramente scritta, dipende da un principio assai per sè noto, qual' è che due grandezze uguali e similmente poste gravano ugualmente sopra la libbra, e si può ridurre al seguente discorso: Dalla libbra XT col centro in H pendono, dalla parte di T, due sole grandezze uguali, che sono i triangoli IFC, CGR, e dalla parte di X ne pendono quattro di così fatte grandezze, tutte eguali fra loro e alle altre due, che sono i triangoli VFO, FOC, e OGQ, COG. Dunque $TH = 2\,XH$, e perciò $XH = TC$, $CX = CT + TH + XH = 4\,XH$, $XO = CT + TH - HX = 2\,XH$, d' onde $CX : XO = 4 : 2 = 2 : 1$, come dal Nardi intendevasi di dimostrare.

Dipendono da questo primo altri due teoremi, i quali, benchè risalgano a un tratto a figure assai più composte, pur crediamo di doverli ordinar qui, perchè strettamente si ritengono con quello, per modo o di corollari o di scolii.

Teorema II. — *Del trapezio, segato da un triangolo per una linea che ne divide nel mezzo i lati, il centro di gravità così sega l' asse, che la parte verso la maggior base stia a quella verso la minore come quattro sta a cinque.*

Nella precedente figura è GV il trapezio, quale viene proposto, di cui si supponga essere in Z il centro. La libbra ZT, sospesa in X, è dalla parte T gravata del solo triangolo FCG, e dalla parte Z dei tre triangoli VFO, FOG, OGQ, tutti uguali insieme, e con quel primo. Avremo perciò $ZX : XT = 1 : 3$, ossia $ZX = \frac{XT}{3} = {}^2/_3\,XH$. Ora, essendo $ZH = ZX + HX = {}^2/_3\,HX + {}^3/_3\,HX = {}^5/_3\,XH$; $ZO = HO - ZH = 3\,XH - {}^5/_3\,XH = {}^4/_3\,XH$; se ne concluderà l' intento cioè $OZ : HZ = 4 : 5$.

La medesima conclusione si sarebbe, osserva il Nardi, ottenuta dalla XV archimedea del primo libro degli Equiponderanti, applicandovi la formula generale quivi proposta $ZO : HZ = 2\,FG + VQ : 2\,VQ + FG$, imperocchè, fatto $VQ = 4$, e perciò $FG = 2$, sarà $ZO : HZ = 4 + 4 : 8 + 2 = 8 : 10 = 4 : 5$.

TEOREMA III. — *Del frusto che riman del cono, segato per un piano erettamente condotto sulla metà dell' asse, il centro di gravità divide la porzion di esso asse in modo, che la parte verso la base minore sia a quella verso la base maggiore, come 17 a 11.*

Rappresentando, sempre nella medesima figura, VCQ il cono, di cui il centro di gravità X sia, per le note regole, già determinato; apparirà in FQ il tronco proposto, sull' asse HO del quale vuole ora indicarsi il luogo Z del centro. Essendo $CVQ = \frac{\pi\, VQ^2 \,.\, OC}{3} = \frac{4\,\pi\, FH^2 \,.\, 2\, CH}{3}$; $CFG = \frac{\pi\, FH^2 \,.\, CH}{3}$, avremo $CVQ : CFG = 8 : 1$. E, dividendo, $CVQ - CFG : CFG = 7 : 1$, cosicchè il frusto applicato in Z essendo settuplo del cono applicato in T, verrà la libbra TZ, col sostegno in Z, a esser divisa talmente, da aversi $ZX : XT = 1 : 7$; ossia $ZX = \frac{XT}{7}$. Suppongasi ora diviso tutto l' asse CO in 56 parti uguali: sarà $HO = CH = 28$; $XH = 14$; $HT = 7$; $XT = 21$; $XZ = 3$. Dunque $HZ = HX + ZX = 14 + 3 = 17$; $ZO = HO - HZ = 28 - 17 = 11$, e perciò $HZ : OZ = 17 : 11$, com' era proposto.

Vuole omologamente il Nardi far osservare che è incluso anche questo caso nella generalità, proposta in ultimo luogo da Galileo nell' Appendice dei centri di gravità (Alb. XIII, 286), sotto la forma

$$HZ : ZO = 2\,\pi\, VO^2 + \pi\, FH^2 + 2\,\pi\, VO \,.\, FH : 3\,\pi\, FH^2 + \pi\, VO^2 + \pi\, VO \,.\, FH.$$

Dividendo infatti la seconda ragione per π, fatto $VO = 2$, e sostituiti i valori, avremo $HZ : ZO = 12 + 1 + 4 : 3 + 4 + 4 = 17 : 11$. Ma è bene proseguire di là, dove fu da noi lasciato interrotto, a trascrivere il manoscritto, per vedervi i due teoremi dimostrati nelle loro forme originali.

« Per trovare il centro del cono, soggiunge il Nardi, altri si potrà incamminare con proporzional metodo: e qui solo noterò che, nel trapezio FGQV, il centro di gravità, posto per ora Z, divide HO con tal ragione, che ZH ad OZ sia come il doppio di VQ con FG al doppio di EG con VQ. Imperocchè, tolto dal triangolo CVQ l' altro FCG, sarà XZ all' aggregato di XH, HT, posto T centro del triangolo FCG, come il triangolo FCG al trapezio VFGQ; cioè come uno a tre. E così OZ ad HZ sarà come quattro a cinque, cosicchè, posto HT tre, XH tre, sarà l' aggregato sei, e ZX due. Ma posto VQ quattro, sarà il suo doppio otto. Ed aggiuntoli FG due, sarà dieci. Qual somma, al doppio di FG, cioè a quattro e a VQ quattro ha la ragione di cinque a quattro. »

« Anche raccorrassi che del frusto solido VFGQ il centro Z divide HO in modo, che ZH a ZO sia come il triplo del cerchio, di cui diametro VQ, col cerchio, di cui diametro FG, e con due proporzionali di mezzo, al triplo del cerchio di FG, col cerchio di VQ, e con due di mezzo, qual proporzione è di 17 a 11, come qui si vede: »

« Posto VQ quattro, sarà FG due, e i loro quadrati saranno come otto a due. Dunque il triplo di otto, con due e con otto, cioè 34, al triplo di due

con otto due volte, cioè 22, sono come 51 a 33, o come 17 a 11. Ma tal corollario suppone essere il cono VCQ ottuplo dell' altro FCG, e che, essendo X il centro del cono VCQ, sia CX triplo di XO, di che altrove. E frattanto avvertiremo come dalle più semplici e regolari figure l' intelletto nostro saglia alle più irregolari e composte, per poi generalmente le stesse proprietà nelle une e nelle altre dimostrare » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 50).

Teorema IV. — *Cuiuscumque parallelogrammi centrum gravitatis est in recta linea coniungente opposita parallelogrammi latera, bifariam secta.*

Abbiamo annunziato il teorema nelle forme proprie, e con le medesime parole di Archimede, perch' era l' intenzione del Nardi di rendere assai più semplice la proposizione IX del primo libro *De aequiponderantibus*, concludendola da un principio evidente, a cui poi riducesi la petizione X dal Siracusano premessa al detto libro primo, che cioè due grandezze eguali s' equilibrano sull' asse, intorno a cui siano similmente disposte, e sopra esso asse, come sopra loro libra, hanno il centro comune.

Sia il parallelogrammo AD (fig. 283) segato nelle due uguali grandezze AB, CD dall' asse CB, che prolungato seghi allo stesso modo il parallelogrammo EH, uguale in tutto e per tutto all' AD. Preso nel mezzo di CF il punto O, sarà ivi il centro comune, che si rimarrà tale avvicinandosi con egual moto i due parallelogrammi, infintantochè i loro lati non giungano a toccarsi e a confondersi nell' unico ED della figura AH, della quale rimane pur in O il centro, ond' è manifesto che questo segherà, come dovevasi dimostrare, la linea ED nel mezzo.

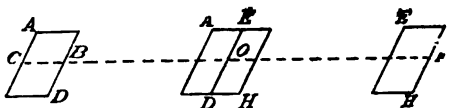



Figura 283.

« Siano, così dice propriamente il Nardi, due simili ed uguali parallelogrammi AD, EH, i quali abbiano paralleli i lati omologhi. Dunque, sospesi dai centri della loro gravità in una retta, di cui il mezzo sia O, peseranno ugualmente da O. Intendasi ora avvicinarsi egualmente l' uno all' altro, senza mutare inclinazione: adunque avverrà che resti sempre l' equilibrio, sino a che il lato D si faccia uno con l' omologo E, e così di due si formerà un solo lato ED, e un parallelogrammo solo AH » (ivi, pag. 1282).

Teorema V. — *Il centro di gravità di una superficie emisferica è nel mezzo dell' asse.*

« Essere il centro di gravità di una superficie emisferica nel mezzo dell' asse, in che sbagliossi il Guldino, provasi da me facilmente con dividere detto asse in particelle eguali, e ciascuna minore della distanza, che l' avversario vuole dal mezzo. Quindi, tirati piani paralleli alla base, per dette divisioni si tagliano parti uguali di superficie, quali, per essere uniformemente gravi, peseranno ugualmente, ed averà ciascuna il centro dentro i termini della sua particella di asse, e quindi dedurrassi brevemente l' assurdo » (ivi, pag. 1360).

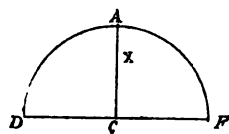
Era dunque la dimostrazione del Nardi quella medesima, che il Torri-

celli diceva di avere imitata da Archimede, ma nell' osservazione aggiunta e che dice *trovarsi anche facilmente il centro delle superficie coniche e cilindriche,* è intesa la dimostrazione a priori, ossia per via degli indivisibili, secondo la quale, considerandosi le due dette superficie rotonde come composte delle infinite circonferenze proporzionali ai raggi, il centro della superficie conica si riduce a quello di un triangolo, e della superficie cilindrica a quello di un parallelogrammo.

Un' altra osservazione anche vi si soggiunge di maggiore importanza, ed è che col *Teorema generale meccanico,* ossia con la regola centrobarica del Guldino si poteva con facilità inaspettata, dimostrare il seguente

TEOREMA VI. — *Il centro di gravità della mezza circonferenza DAF* (fig. 284), *divisa nel mezzo in A, è in X, punto così collocato, che sia CX quarta proporzionale, dopo essa mezza circonferenza, il diametro e il raggio.*

Figura 284.

Valgano per una dimostrazione di ciò le parole: *ed in questa ossservasi la medesima analogia, chi ben l'intende, che nella superficie emisferica* (ivi). Chiamata infatti S questa superficie, la Geometria dà S = DF . π AC, e la Centrobarica S = DAF . π CX, d' onde DAF : DF = AC : CX.

Si diceva essere questa invenzione di maggiore importanza delle altre, non solamente perchè nuova, ma perchè vi si faceva uso di un argomento nuovo, non avvertito nè dallo stesso Guldino, nè ancora dal Torricelli, nè da nessun altro prima del Wallis, preceduto di tanto tempo dal Nardi, il quale avvertiva, nel citato luogo, altresì che, *con l' aiuto di questa centrobarica, si discende alle più particolari proposte intorno alla stessa materia.* Vedremo di così fatte proposte un esempio insigne applicato alla misura dei solidi rotondi generati dalla Cicloide, ma intanto è da proseguire nel nostro proposito, qual' era di mostrare come il Nardi concorresse col Torricelli in facilitare e in promovere la Scienza dei precursori. E quanto alla facilità, abbiamo ora da proporre l' esempio del baricentrico nel frusto di parabola, e nel settore di circolo, da preferirsi alle lunghe e stentate dimostrazioni di Archimede, e del Della Faille.

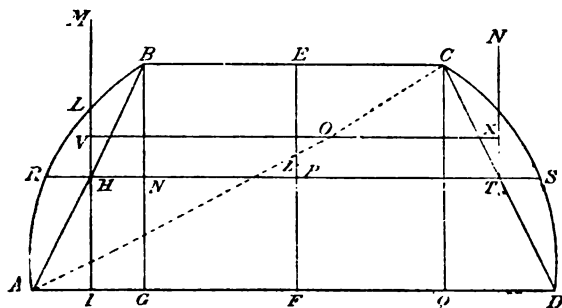



Figura 285.

TEOREMA VII. — *Nel frusto parabolico ARBCD* (fig. 285) *siano inscritte le parabole ARB, CSD col centro comune in O, e il trapezio ABCD col centro in K: se, come il trapezio alle parabole, così faremo reciprocamente OZ a ZK, dico che in Z sarà il centro di gravità del frusto.*

Il teorema s' è veduto già dimostrato dal Torricelli nella IX proposizione da noi raccolta nel capitolo V, e il Nardi accennava con queste parole al medesimo processo dimostrativo: « Difficilissime di gran lunga, fra tutte le altre di Archimede, sono le due ultime del secondo libro dei superficiali equilibri (così traduce l' Autore il titolo, a cui comunemente corrispónde quello *De aequiponderantibus*) delle quali la prima serve per lemma della seguente, ove s' investiga il centro d' un frusto parabolico, potendosi in altro modo proporre, e facilissimamente trovare lo stesso quesito, con dire per esempio così: D' ogni frusto parabolico il centro di gravità sta nell' asse suo collocato tra il centro del trapezio in esso descritto, e tra quello delle due parabole collaterali in modo, che la distanza del centro del frusto a quella delle parabole, alla distanza del centro del frusto a quella del trapezio, sia come il trapezio alle parabole. Il tutto s' intende e si dimostra con ridursi un tratto alla VI^a^ del primo *Dei superficiali equilibrii,* come alla fine fa Archimede, e così risparmiamo cento sillogismi » (ivi, p. 935).

Figura 286.

Passeremo ora al *Centro di gravità del settore di cerchio,* dopo il qual titolo il Nardi così soggiunge: *Dell' invenzione mia del mezzo per provare tal teorema nel modo che segue; Il lettore conoscerà quanto abbreviato siasi il progresso del p. Faille.*

« Teorema VIII. — *Nel settore AECD* (fig. 286), *o maggiore o minore di un mezzo cerchio, sia inscritto il quadrilatero ABCD; ed essendo AB, BC lati uguali, intendansi dal centro D tirate a que' lati le perpendicolari DF, DG, e si congiunga DB. I centri di gravità dei triangoli ABD, BDC siano K, P, i quali si connettano con la KP segante BD in L, che sarà centro dell' inscritto quadrilatero. Dico che FD a DL sarà come AB + BC a $^2/_3$ AC, sottesa dell' arco ABC.* »

« Perchè ne' triangoli rettangoli ABE, KDL l' angolo al centro KDL è uguale all' angolo CAB, alla periferia insistente sopra doppio arco. Dunque KD a DL, come AB ad AE; FD a KD, come AE a $^2/_3$ AE; dunque, per l' ugualità perturbata, FD a DL, come AB a $^2/_3$ AE, ovvero AB + BC a $^2/_3$ AC. »

Figura 287.

« Teorema IX — *Stando la medesima costruzione, immaginiamoci ne' settori AGBD, BHCD* (fig. 287) *i quadrilateri segnati con le*

medesime lettere, de' quali siano i centri di gravità L, R e si connetta LSR, che seghi BD in S, il quale S sarà centro di gravità di tutto il poligono equilatero inscritto nell'ABCD. Ad un lato AG sia tirata dal centro perpendicolarmente DI. Dico che DI a DS, è come l'aggregato de' lati del poligono a $^2/_3$ *AC.* »

« Imperocchè AG + GB a $^2/_3$ AB è come ID a DL, per l'antecedente. LD a DS come $^2/_3$ AB a $^2/_3$ AE, per la similitudine dei triangoli ABE, SLD, essendo LDS al centro insistente alla metà dell'arco AB, ovvero BC; e gli angoli ad E, S retti. Adunque, per l'ugualità di ragione, ID a DS, come AG + GB a $^2/_3$ AE, ovvero AG + GB + BH + HC a $^2/_3$ AC, che sono i doppi, ond'è chiaro etc. »

« Volendo continuare la inscrizione faremo un quadrilatero nel settore AMGD, un altro nel GNBD, ove ne resulterà un poligono di doppi lati, uno de' quali pongasi AM. Per le cose ora dimostrate sarà la perpendicolare dal centro D nel lato AM, alla DLT, supposto che T sia centro del poligono inscritto ultimamente in AGBD, come tutti i lati di esso poligono a $^2/_3$ AB. Tirando poi da T la TV perpendicolare alla BD, si costituiranno, come sopra, i triangoli rettangoli simili ABE, TDV, dal che segue di nuovo TD a DV come $^2/_3$ AB a $^2/_3$ AE, o per l'ugualità la perpendicolare nel lato AM, alla DV, come tutti i lati del detto poligono a $^2/_3$ di AE. E, presi i doppi, come tutti i lati del poligono inscritto in ABCD, uno de' quali AM, a $^2/_3$ AC. E così continueremo l'inscrizione in infinito, essendo sempre vero che il perimetro del poligono, inscritto nel settore nel modo suddetto, a due terzi della suttesa AC, sia come la perpendicolare del centro di un lato alla distanza dal centro di gravità del poligono dal centro del cerchio. Il che etc. Ma ad ogni poligono regolare simile ai suddetti si puote circoscrivere un settore di cerchio; adunque sarà generalmente conchiuso in ogni poligono, e quindi si passa al settore. Avvertisco poi come la mia invenzione di tal mezzo si faciliti nelle prove dal p. Ricci » (ivi, pag. 1003-5).

A dimostrare il centro di gravità del settore, ch'era l'intento principale, si passa dunque secondo il Nardi per corollario dai teoremi precedenti, e specialmente dall'ultimo, perchè, continuata l'inscrizione all'infinito, i lati del poligono si confondono con l'arco, e il cateto uguaglia il raggio, con cui l'arco stesso è stato descritto. Di qui è che il centro di gravità viene in questo caso indicato dall'estremo punto di una linea, che muova dal centro del circolo, e che sia quarta proporzionale dopo l'arco, i due terzi della corda che lo sottende, e il raggio.

Se il Ricci facilitò anche di più la prova del mezzo usato dal Nardi, s'intende quanto si rimanessero i due amici superiori al Torricelli, il quale non riuscì ad abbreviare il Della Faille, se non che anch'egli scrivendo, per il baricentrico del settor circolare, quasi un libro. Nè punto inferiori si rimasero i due detti al valoroso emulo loro, quando vennero insieme con lui al cimento di ritrovare il centro di gravità del settore sferico.

« Nell'aver fatto trascrivere le opere mie (tale avvertenza premette il

Nardi alla sua dimostrazione) occorse che ultimamente si perdesse un quaderno di molta importanza, in riguardo di esse, imperocchè contenevasi in quello il meglio delle mie geometriche contemplazioni, delle quali nemmeno, il che importa, copia ritenuto m' avea. La memoria per alquanto m' è servita, ma non il tempo, sicchè, per ristorarne i danni, mi è stato di sommo aiuto il signor M. A. Bicci, gentiluomo mio amicissimo, e col quale comunico da alquanto tempo in qua, cioè da che conosco un giovane di così alto intelletto, le debolezze de' miei discorsi. Egli non solo ha supplito al bisogno mio, ma anche, più sottilmente e copiosamente di quel che fatto avevomi, ha ristorato ogni perdita, e da vantaggio altre sue nobilissime contemplazioni ha aggiunto alla mia selva, di che a luogo per luogo faccio menzione. Fuor di modo poi me li conosco obbligato, per la dimostrazione rinvenuta di questo mio, forse non volgare, teorema. »

« *Definizioni.* — I. Sotto il nome di *cilindrico* e di *conico* intendo di comprendervi il cilindro e la porzione cilindrica, il cono e la porzione conica. »

« II. Segandosi una sfera o sferoide con piano eretto all' asse, l' una e l' altra delle due parti fatte io chiamo assolutamente *segamento,* di cui sarà base un cerchio o un ellisse. »

« III. Per *solido settore* intendo un segamento maggiore o minore dell' emisfero o emisferoide, insieme con un conico, ovvero toltone un conico, quando il segamento è maggiore, la cui cima sia nel centro di essa sfera o sferoide, e la base sia quella stessa del segamento, e questo segamento si dirà segamento del settore. »

« *Lemma geometrico.* — Espongasi un solido settore HABCKD (fig. 288), ossia il suo segamento minore o maggiore di una mezza sfera, intorno l' asse BF, ovvero BDF, il quale asse, prodotto nel primo caso fino al centro della sfera o sferoide in D, sia segato in F dalla base del detto segamento: Dico che il settor solido, al residuo AHDKC, sarà in ragione di BF ad FD. »

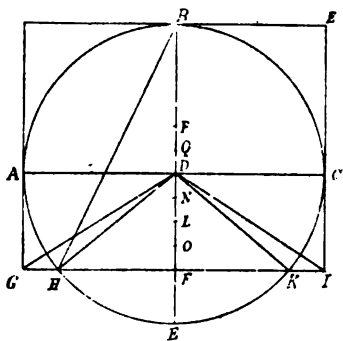



Figura 288.

« Intendasi descritto il cilindro AE intorno il segamento ABC, ed intorno il segamento del settore il cilindrico GE, con simile ed egual base, ed intorno il medesimo asse con l' AE. Immaginiamoci intorno DF come asse tre conici, col vertice D e la base nel piano GFI. Il cerchio o ellisse base del primo abbia per diametro GI, il secondo HK, il terzo una retta che pareggi di quadrato l' eccesso del quadrato GI sopra il quadrato HK. In riguardo però dell' ellisse bisognerà che i diametri siano omologhi. »

« Ora, dei tre conici suddetti, il secondo e il terzo insieme presi s' agguagliano al primo, per l' egualità delle basi e delle altezze; ma il terzo conico è uguale al cilindrico AI, senza la porzione AHFKC, per la XIV^a del

terzo di Luca Valerio. Adunque il cilindrico AI, senza la detta porzione, preso insieme col secondo conico HDK, è uguale al primo conico, e conseguentemente un terzo del cilindrico AI intero, del quale sarà due terzi la residua porzione AHDKC e questa residua porzione sarà doppia del primo conico. Adunque, essendo il cilindrico AE, al segamento ABC, come il cilindrico AI, alla residua porzione AHDKC, cioè in ragion sesquialtera; segue, per la XIX del Quinto, nel primo caso, e per la XII nel secondo caso, che nella medesima ragione sia il cilindrico GE al solido settore, cioè in ragion sesquialtera. E finalmente, permutando e convertendo, il cilindrico GE, al cilindrico AI, cioè l' asse BF all' asse FD, come il solido settore alla residua porzione AHDKC. Il che etc. »

« TEOREMA X. — Nella medesima figura dividasi DF nel mezzo in L, ed LF nel mezzo in O, che DO sia tripla di OF. Sarà L centro di gravità del cilindrico AI, ed O del secondo conico HDK, ed anco del cilindrico AI, senza la porzione AHKC, secondo che dimostra Luca Valerio nel libro citato, alla proposizion XXVII. Facciasi LN, che sia metà di LO. Siccome il secondo conico, insieme col cilindrico AI senza la porzione AHKC, è metà della residua porzione AHDKC, per le cose dimostrate nell' antecedente lemma; sarà, per la ragion reciproca dei pesi con le distanze LN, LO, N centro di gravità della suddetta porzion residua AHDKC. E supponendo DF esser otto, sarà LO due, LN uno, FN cinque, ed ND tre. Per la qual cosa N divide l' asse DF in ragione di cinque a tre. »

« TEOREMA XI. — Espongasi il sopra detto settore HBKD, e tutto il resto della figura, lasciando però i cilindrici e le divisioni fatte in L ed O. Prendasi PD tre ottavi della BD, e saranno P ed N i centri di gravità del segamento ABC, e della residua porzione AHDKC. Nel primo caso facciasi NP a PQ come BF a FD, cioè come il solido settore alla detta residua porzione, reciprocamente, e sarà Q centro di gravità del settore. Nel secondo caso, dividasi PN in Q, che NQ a PQ sia come BD a FB, ovvero, come il segamento ABC alla residua porzione AHDKC, e similmente Q sarà centro di gravità del settore, com' è manifesto. Dico che, prendendosi tre ottavi del semidiametro BD, e tre ottavi della parte FD, l' aggregato loro nel primo caso, o la differenza nel secondo caso, sarà uguale alla distanza DQ, cioè del centro di gravità del settore dal centro della sfera o sferoide. »

« Imperocchè, essendo PB le medesime parti di BD, che DN di DF, sarà permutando BD a DF, come PB a DN. E dividendo nel primo caso, componendo nel secondo, BF a FD, ovvero NP a PQ, come la medesima NP a ND. Adunque PQ è uguale a ND, e però DQ sarà uguale nel primo caso a DP + DN, cioè a $^3/_8$ di BD + $^3/_8$ di FD, e nel secondo caso a DP — DN, cioè a $^3/_8$ di BD — $^3/_8$ di FD, il che etc. Quindi verremo alla dimostrazione del proposto »

« TEOREMA XII. — Sia nella medesima figura il settor di sfera HBKD, il cui centro di gravità il punto Q, il centro della sfera D, l' asse BE, la superficie sferica del settore HBK. Tirisi la retta HB, e sarà il quadrato di HB,

al quadrato di HF, o il rettangolo EBF al rettangolo EFB, o la base EB alla base EF, per esser comune BF, come la superficie sferica HBK, al cerchio del semidiametro HF. Ma questo cerchio, a tre suoi quarti, è come EF a tre quarti dello stesso EF; adunque, per la eguale, la superficie sferica ABK, a tre quarti del cerchio descritto con la distanza HF, è come la retta EB a tre quarti di essa EF. E, presa la metà, come BD a tre ottavi della stessa FE, poichè un ottavo è la metà di un quarto, e tre ottavi la metà di tre quarti, ovvero, nel primo caso, $^3/_8$ di ED + DF, cioè $^3/_8$ di ED + $^3/_8$ di EF; e nel secondo caso, $^3/_8$ di ED — DF, ovvero $^3/_8$ di ED — $^3/_8$ di DF. Ma tale ancora è BQ, per le cose dette, adunque la superficie sferica HBK, a tre quarti del cerchio descritto dal semidiametro HF, sarà come BD a DQ, il che etc. » (ivi, pag. 372-76).

Della conclusione, appena ritrovatasi, dette il Nardi notizia al Torricelli, il quale così scriveva in un poscritto di lettera indirizzata il dì 7 Marzo 1640 al Cavalieri: « Il signor Antonio Nardi mi avvisa di aver dimostrato il centro di gravità del settore solido di sfera, con conclusione più bella della mia, ed è questa: *Facciasi come la superficie sferica del settore alli tre quarti del cerchio sua base, così il semidiametro ad un' altra da prendersi dal centro della sfera, che quel punto sarà centro,* ed è verissima e concorda con la mia » (MSS. Gal. Dis., T. XL, fol. 125).

Smarritesi poi le carte, dove il Nardi aveva disteso quel suo teorema, e volendo anche questo, come uno de' più importanti, inserire nelle *Ricercate geometriche,* vi supplì il Ricci, che, mettendosi a ricercare i centri di gravità nel settor circolare e nello sferico, era con grandissima facilità riuscito alle medesime conclusioni. Sulla fine del 1645, nel mandare esso Ricci, perchè fossero stampati nelle dette Ricercate, i suoi teoremi baricentrici; ne dava compiacentesi avviso al Torricelli, che rispondeva così da Firenze, il dì due di dicembre:

« Mi rallegro che con tanta facilità abbia trovato i centri di gravità delle parti del cerchio e della sfera: taccio l' ellissi e la sferoide, perchè vanno sotto la medesima invenzione. Non so se ella vedesse certi fogliacci, che io, già sono due anni, mandai al signor Raffaello (Magiotti). Dimostravo il centro di gravità nel settore del cerchio in due modi, e brevemente, cioè *more veterum,* e per gl' indivisibili. Quanto al centro di gravità del settore di sfera, mi scrisse il signor Antonio Nardi di Arezzo di averlo mostrato, e annunziato come fa V. S. Io gli risposi di averlo mostrato e annunziato in un altro modo, cioè che sia nell' asse del settore lontano dal centro della sfera per tre quarti dell' asse del cono, e tre ottavi della saetta del segmento. V. S. intende già che il settore è composto di un cono, e di un segmento. La medesima enunciazione credo che mi paresse adattarla anco alla sferoide, ma ora ho la testa lontanissima da simili cose. Dimostrai la concordanza tra la proposizione del signor Nardi e la mia, e devo averla in scritto » (ivi, fol. 101).

Noi infatti abbiamo ritrovato cotesto scritto, in cui le due apparentemente diverse indicazioni del centro di gravità del settore sferico si conciliano fa-

cilmente insieme, con questo discorso, riducendoci la figura 289 sott'occhio. Posto che sia il centro di gravità del settore ABCD collocato in F, mezzo della saetta BE, a una distanza X dal centro della figura, il Torricelli dà $X = {}^3/_4$ DF, e il Nardi $X = \frac{3 \pi AE^2 . BD}{4 . ABC}$, ond'è che la ragion della concordanza si riduce a dimostrare che $\frac{\pi AE^2 . BD}{ABC}$ è uguale a DF. La dimostrazione poi è assai facile, perchè BD : DF = 2 BD : 2 DF = BG : GE = π BG . BE : π GE . BE. Ma il primo termine di quest'ultima ragione è uguale alla callotta ABC, e il secondo al circolo di raggio AE; dunque BD : DF = ABC : π AE², d'onde $DF = \frac{\pi AE^2 . BD}{ABC}$, come in sostanza scrisse così di aver ritrovato il Torricelli stesso, benchè con altre parole:

Figura 289.

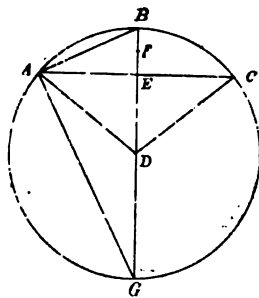
« Sia il settore ABCD, e divisa BE bifariam in F, sarà il centro di gravità nelli tre quarti di DF (ait Torricellius). »

« Facciasi come la superficie ABC, alli tre quarti del cerchio AC, così BD ad un'altra, da pigliarsi dal centro: il termine di questa sarà centro (ait Nardius). »

« Congiungansi AB, AG. E perchè tutta GB, a tutta BD, sta come la levata EB, alla levata BF; sarà la rimanente GE, alla rimanente DF, come tutta a tutta, cioè doppia. »

« Jam BD ad DF est ut, sumptis duplis, BG ad GE, sive, ut quadratum BG ad GA, sive ut quadratum BA ad AE, sive, ut superficies ABC ad circulum AC. Sumptis vero consequentium subsesquitertiis, erit ut BD ad rectam Torricellii, ita superficies ABC ad ${}^3/_4$ circuli AC. Eadem ergo est recta Torricellii cum recta Nardii » (MSS. Gal. Disc., T. XXXVI, fol. 96).

Apparisce dalle cose fin qui esposte che, mentre si credeva di dare i teoremi baricentrici del Nardi, abbiamo dati anche insieme quelli del Ricci, quasi in una mente sola, come in un sol cuore, si fossero trasfusi i due amici. Essi perciò fra i promotori della Scienza meccanica non vogliono essere separati fra loro, come non vogliono essere separati dal Torricelli, insieme col quale compongono quel triumvirato glorioso, che la nostra Storia ha collocato nel suo proprio seggio. Intorno al Ricci sono state le notizie più scarse che intorno agli altri due, perchè, non essendo suo fine di stampare, protestava *di disprezzare le sue speculazioni come in sè stesse di nulla estimazione, e di non scriverne se non che qualcuna, per mantenere il commercio col Torricelli.* (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 60).

Son fra queste speculazioni notabili, per il presente nostro argomento, le considerazioni intorno i frusti conoidali segati con due piani paralleli, comprendendosi dal Ricci, sotto una sola universalissima, varie proposizioni dello stesso Torricelli. Sia richiesto il centro di gravità del frusto AKBCD (fig. 290)

intero, o scavato dal cono AHD. Per risolvere il problema, il metodo era quello di dimostrare qual proporzione abbia il tutto verso la parte, ossia il frusto verso il cono inscritto: proporzione, che il Ricci annunziava in questa forma: « In detto frusto intendasi il frusto conico, ovvero di porzione conica ABCD, il cui asse HE sia diviso nel mezzo dall' applicata KL, e la MI sia differenza delle rette AE, GI. Dico il frusto AKBCD, al suo cono inscritto AHD, essere in proporzione di due quadrati KI ed un quadrato GI col quadrato MI, al quadrato AE » (ivi, T. XLII, fol. 29).

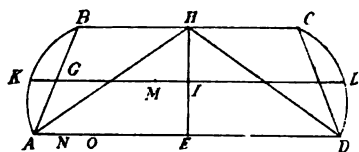



Figura 290.

Suppone il Ricci, per dimostrare che il suo teorema è veramente concluso nella formula esposta, due proposizioni, la prima delle quali è che il residuo del frusto AKBCD, toltone il frusto conico, sia verso il cono AHD come due rettangoli KGL al quadrato di AE: e la seconda, che il frusto ABCD, al cono AHD, stia come i quadrati di AE, BH con un medio tra loro, al quadrato di AE. Riconosce della prima proposizione autore il Torricelli, se non che, invece di ridurre il solido annulare, descritto dal bilineo AKB intorno all' asse, a uno sferoide, ciò che suppone la notizia de' solidi sferali, per non uscir dalle dottrine dei Conici, pensò il Ricci di ridurre il detto solido annulare a un cilindro come RQ (fig. 291), il quale, avendo pari altezza a quella del frusto, e per base un circolo di raggio RE, o TI a mezzo l' asse, il quadrato del quale uguagli il rettangolo KGL; fosse scavato dai due coni PIQ, RIS. La proporzione del resto fra il solido annulare e il cono AHD riman tuttavia quella del doppio rettangolo KGL, al quadrato di AE, data dal Torricelli, perchè, chiamato S quel solido, e C il cono, essendo $S = \pi TI^2 . EH - \frac{\pi TI^2 . EH}{3} = {}^2/_3 \pi XGL . EH$, e $C = \frac{\pi AE^2 . EH}{3}$, abbiamo $S : C = 2 KGL : AE^2$.

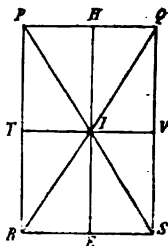



Figura 291.

L' altra proposizione poi, che risolve il frusto conico in tre coni, riteneva, com' era giusto, il Ricci per sua, sapendo di averla egli il primo comunicata al Torricelli, benchè questi poi la dimostrasse di sua propria industria, riducendo ad uno sferoide il terzo cono proporzionale, come si vide nell' ordinare la proposizione XLVI, qui addietro, nel capitolo quinto. Così essendo, premettiamo per maggiore intelligenza gli argomenti analitici alla fedel trascrizione del proposto teorema universale dei conoidali.

Son date le due equazioni $AKBCD - ABCD : AHD = 2 KGL : AE^2$; $ABCD : AHD = AE^2 + F^2 + BH^2 : AE^2$, intendendosi per F^2 il medio proporzionale fra AE^2, BH^2. Conseguono da queste due le tre seguenti:

$$AKBCD - ABCD : ABCD = 2 KGL : AE^2 + F^2 + BH^2;$$
$$AKBCD : ABCD = 2 KGL + AE^2 + F^2 + BH^2 : AE^2 + F^2 + BH^2;$$
$$AKBCD : AHD = 2 KGL + AE^2 + F^2 + BH^2 : AE^2.$$

Facciansi NE, OE uguali alle rette GI, BH. Avremo $AE + BH = 2\,GI = 2\,NE$, d'onde $AE = 2\,NE - BH = 2\,NE - OE$, ossia $AE - NE = NE - OE$, e in conclusione $AN = NO$.

$AE^2 = (AN + NE)^2 = AN^2 + 2\,ANE + NE^2$; $OE^2 = (NE - NO)^2 = NE^2 - 2\,ENO + NO^2$. Sommando queste due equazioni, e sostituendo AN a NO, avremo $AE^2 + OE^2 = 2\,NE^2 + 2\,AN^2 = AE^2 + BH^2$.

$F^2 = AE\,.\,BH = AEO$, e perciò $F^2 + AN^2 = AEO + AN^2 = NE^2$. Dunque $AE^2 + BH^2 + F^2 = 3\,NE^2 + AN^2 + AN^2 + F^2 = 3\,NE^2 + AN^2 = 3\,NE^2 + MI^2$.

E in ultimo, $2\,KGL + AE^2 + BH^2 + F^2 = 2\,KGL + 3\,NE^2 + MI^2 = 2\,(KI^2 - IG^2) + 3\,IG^2 + MI^2 = 2\,KI^2 + IG^2 + MI^2$.

« Sia il quadrato di F (per dar la dimostrazione con le parole proprie del Ricci) medio proporzionale tra li quadrati AE, BH. E perchè il frusto AKBCD, toltone il frusto ABCD, al cono AHD sta come due rettangoli KGL, al quadrato AE, e il frusto ABCD, al cono medesimo, come li tre quadrati AE, F, BH al medesimo quadrato AE; dunque tutto il frusto AKBCD, al cono AHD, è come due rettangoli KGL, con li quadrati AE, F, BH, al quadrato AE. »

« Ora, per ridurli alli termini detti nella proposizione, facciansi NE, OE uguali alle rette GI, BH. Saranno gli eccessi AN, NO uguali, e perciò li quadrati AE, OE, insieme, uguali a due quadrati NE e due quadrati NA, per la X del Secondo. Inoltre, essendo li quadrati AE, F, RH proporzionali, saranno anche i lati, e il quadrato della media F, uguale al rettangolo AEO, giuntovi uno de' quadrati NA, ovvero NO, doventerà uguale al quadrato NE. Sicchè ridotti sono li tre quadrati AE, F, BH a tre quadrati NE ed uno AN, ovvero MI. E congiunti con li due rettangoli KGL, averemo due quadrati KI, un quadrato GI, ed uno MI (in luogo di due rettangoli KGL, e dei tre quadrati AB, F, BH) al quadrato AE, in proporzione medesima che il frusto AKBCD al cono AHD, *quod proponebatur.* »

« Che il residuo del frusto AKBCD, toltone il frusto conico, sia verso il cono AHD come due rettangoli KGL al quadrato AE, suppongo dimostrato da V. S. (cioè dal Torricelli a cui si rivolge il discorso) molto egregiamente, e la maniera mia poco varia, avendolo io dimostrato uguale al qui descritto cilindro intorno l' asse stesso del frusto, e che il suo quadrato TI sia uguale al rettangolo KGL; al cilindro dico, toltine li coni PIQ, RIS, e mi vaglio della medesima proposizione presa dai Conici. Che poi il frusto ABCD, al cono AHD, stia come que' tre quadrati al quadrato AE, il raccolgo da una proposizione mia altre volte accennata a V. S., che un tal frusto sia uguale a tre coni, con l' altezza HE, e sopra i cerchi descritti dagl' intervalli AE, F, BH » (ivi, fol. 30, 31).

Queste ultime parole destarono nell' animo del Torricelli un sentimento, che si direbbe di gelosia, non quale però è generata dall' impotenza, ma dalla prepotenza. Contenne per allora in silenzio i primi moti della sua passione, ma quando il Ricci impaziente tornò una settimana dopo a scrivere in una

lettera queste parole: *un' altra volta la pregherò a voler vedere una mia proposizione intorno li frusti parabolici, iperbolici, sferici, compresi sotto una sola proposizione* (ivi, fol. 27); il Torricelli risoluto rispose che anzi quella universale proposizione era sua, e non poteva patire che nessun altro se la fosse appropriata. S' è veduto quanto equamente avesse nella prima lettera il Ricci distribuite le parti del merito, e perchè di esse non ne toccava altrui che le secondarie, rimanendo le principali per sè; con buon diritto poteva chiamar sua la proposizione delle conoidali. Facile nonostante a cedere, e disposto a riversare nel pingue erario del Torricelli anche questa moneta ingiusta, presa occasione da altre cose, che aveva a dire, così soggiungeva:

« Passo all' altra lettera, per la quale pare che V. S. mi accenni di sospettare un poco che io voglia attribuirmi l' invenzione di cotesta sua proposizione dei solidi conoidali. Non piaccia a Dio che io faccia mai simile azione. Si ricordi pure V. S. di una lettera, che io le scrissi molte settimane sono, dove le dicevo di aver considerato che il modo usato da V. S. per li frusti sferici poteva portarsi in modo più generale: intendo quanto alla sfera scavata dal cono e dal cilindro. Secondariamente dissi a V. S. che, dovendo un tal solido escavato essere uguale ad una tale sferoide, non poteva servire alla proposizion generale, nella quale si cercasse la proporzione di sfera, sferoide, conoide etc. al cono inscritto, poichè bisognava supporre come noto la sferoide essere doppia del rombo inscrittole. Ed a questo pretesi poi di ovviare io con dimostrare que' solidi uguali ad un cilindro, con le determinazioni già avvisatele nell' ultima mia. Si tolga dunque dall' animo tali pensieri. Che se mai avessi neppur ombra che V. S. mi tenesse in concetto di arrogarmi nemmeno un ette d' altrui, vorrei imporre alli miei studii perpetuo silenzio, poichè con essi è solo il mio fine di spassarmi, e di continuare il commercio con V. S., a me senza modo dilettevole..... Roma, 16 Luglio 1644 » (ivi, fol. 36).

Non abbiamo voluto lasciar l' occasione di rivelar verso i più cari amici quell' animo, il mal abito del quale vedremo esser portato dal Torricelli anche in pubblico, nelle contese ch' egli ebbe con gli stranieri. Dopo ciò, ritornando sopra il nostro sentiero, si dovrebbe per le fatte promesse aggiungere la seconda parte di quel trattato dei centri di gravità, a cui dette opera il Nardi, dicendo com' egli investigasse il centro delle potenze nella sua propria Cicloide. L' ordine cronologico però, secondo il quale ha da svolgersi questa nobilissima parte della Storia, ci consiglia a non introdurci ancora dietro il Nostro nel campo, senza prima riconoscere la cultura, e saggiare i frutti raccoltivi da uno straniero, facendo invece una breve sosta fuor della chiusa siepe, in faccia al callare, per osservar gli strumenti che lo dettero aperto.

Principalissimi fra questi sono il Teorema meccanico universale, ossia la Regola centrobarica, e il metodo degl' indivisibili. Nell' altro Tomo e nel presente abbiam veduto come prendesse il Nardi quel primo strumento dalla officina guldiniana, e com' ei lo temprasse e affinasse alla fucina della Geometria, facendo le prime prove delle virtù di lui nel baricentro della mezza

circonferenza. Quanto al metodo degli indivisibili si lusingava il buon Cavalieri di essere egli stato il primo a insegnarlo, ma il Nardi riconosce di così fatte dottrine, che apparvero nuove, più antichi e autorevoli maestri. La cosa, come s' intende, è di tale e tanta importanza, da non doversene passare con sentenza sì asciutta.

La seconda Ricercata geometrica, qual si legge nel manoscritto donato alla Biblioteca di Roma, conclude le risposte alle obiezioni contro Archimede col pronunziare che queste son nulle, o per lo più leggere. Si direbbe nonostante, soggiunge l' Autore, essersi il Siracusano messo a inchieste ardue e lubriche, se non si pensasse agl' impulsi ch' egli ebbe, nello speculare e nell' inventare, dalle precedenti tradizioni, e al molto aiuto che gli venne dall' usare il metodo degli indivisibili, e dal praticar l' esperienze. A queste, risolvendo le questioni accennate da noi nel secondo capitolo della prima parte di questa Storia, attribuisce l' invenzione del centro di gravità nella rettangola conoidale, supposto noto nella II^a del secondo libro *De insidentibus humido:* e a quello, cioè al metodo degl' indivisibili, il segreto di tante geometriche verità, da parer quasi rivelazioni di un Nume.

Da Archimede confessa dunque il Nardi di avere appresa la dottrina dell' infinito, riducendo per essa le quantità lineari a tal piccolezza da trasformare il curvo nel retto. Ma delle particolari applicazioni del metodo gli sparse nella mente i primi semi una pellegrina dimostrazione di Pappo, chi ripensi alla quale sentesi compreso da uno stupore, com' a vedere sotto il sol meridiano scintillare una stella in mezzo al cielo profondo. È data quella dimostrazione dal Matematico alessandrino nel teorema XXI del quarto libro delle *Collezioni,* per concluderne che lo spazio, compreso tra la spirale e la linea condotta al centro dal principio della circolazione, è la terza parte della superficie del cerchio.

Figura 292.

Sia lo spazio da misurare BEFAB, nella figura 292. Divisa tutta la circonferenza in parti uguali, sian due di queste AC, CD, dalle quali e dalle loro concentriche FG, EH sian chiusi quattro settori. Espongasi anche insieme un rettangolo KL, di cui i lati KP, KN sian divisi in tante parti uguali, in quante fu divisa la stessa circonferenza, ed essendo due di queste parti KR, RQ sopra l' un lato, KM, MS sopra l' altro; si conducano RT, QV parallele a KN, e MZ, SO parallele a KP.

Per la genesi della spirale archimedea, per supposizione e per costruzione, sarà, chiamata C la circonferenza, $BC : CF = C : CA = KP : KR = KL : KZ = RT : RZ$. Dividendo la prima e l' ultima ragione e de' loro termini facendo il quadrato, $BC^2 : BF^2 = RT^2 : TZ^2$. Con simile ragione dimo-

streremo $DB^2 : BE^2 = QV^2 : VO^2$, e così sarà vero passando a ricercare le altre parti. Ora essendo ai quadrati de' raggi de' circoli proporzionali i settori, e ai quadrati de' raggi delle basi proporzionali i cilindri ugualmente alti, si potrà concluderne che ciascun settore circoscritto sta al corrispondente, inscritto nella spirale, come ciascun cilindro circoscritto sta all' inscritto nel triangolo KNL, rivolgendosi i rettangoli genitori intorno all' asse NL. E perchè in tutte le proporzionali così dimostrate i primi e i terzi termini sono uguali, staranno dunque le somme dei settori ai settori come le somme dei cilindri ai cilindri, ossia la superficie del circolo, alla somma dei settori inscritti nella spirale, come il cilindro del rettangolo NP, alla somma de' cilindri, de' quali si costruisce il conoide gradinato. Supponendo poi Pappo che sian prese così minime le divisioni, da sparire i trilinei FGA, EHF.... e le addentellature KMZ, ZXO.... riduce in ultimo la proporzione a dire: *circulum, ad eam figuram, quae inter lineam spiralem et rectam AB intercipitur, ita esse ut cylindrus ad conum* (editio cit., pag. 84) cioè come tre a uno. Nella qual supposizione vide il Nardi il metodo degl' indivisibili nascosto come in un nido, da cui, incubato sotto le ali del suo proprio ingegno, vide con lieta maraviglia uscirne un modo nuovo di quadrar la parabola.

Sia la mezza figura 293 intorno al diametro AO, e sopra la base OX, con la quale e col centro in O sia descritto il quadrante OCX, a cui e alla semiparabola circoscrivansi i rettangoli OL, OM. Presa una minima parte AD, si conduca da D una parallela ad AO, e si prolunghi in I. Dai punti poi E, H, ne' quali la detta linea incontra le due curve, si conducano ordinatamente FE, GH. Avremo $OD : OE = DR : RE = AO : RE = OX^2 : OX . RX = OC^2 : RH^2 = \pi OC^2 : \pi RH^2$. E perciò $OD : OE = \pi OC^2 . OR : \pi RH^2 . OR$. E così per tutte le altre infinite divisioni saranno simili proporzionalità fra i rettangoli della figura superiore e i cilindri della inferiore, supponendo questa rivolgersi intorno alla linea OX come a suo proprio asse. Ora, osservando che in ognuna delle dette proporzionalità i primi e i terzi termini sono uguali, avremo la somma di tutti i rettangoli, ai rettangoli, come la somma di tutti i cilindri ai cilindri; ossia il rettangolo OM, alla semiparabola, come il cilindro all' emisfero, che vuol dire, come tre a due. Ma ascoltiamo il Nardi, che non solamente discorre così, ma aggiunge altre importanti notizie al suo discorso.

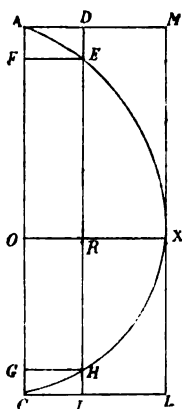



Figura 293.

« Una pellegrina dimostrazione di Pappo, ove egli, con l' aiuto dei solidi e col ridurli occultamente agl' indivisibili, prova la ragione del cerchio allo spazio elico, mi diede occasione, per la conformità dei soggetti, di pensar con lo stesso metodo alla ragione di un rettilineo alla parabola, il che felicemente successemi. »

« Sia una mezza parabola AXO, di cui il diametro AO, e la mezza base OX sia semidiametro d' un cerchio, di cui un quadrante OCB, centro O, e

il rettangolo OL sia circoscritto ad esso quadrante. Dividasi ora tanto la retta AM, quanto la uguale CL, in parti minime, sicchè, essendo una di loro AD, manchi DM da AM meno di ogni proponibile distanza, e lo stesso avvenga di LI rispetto ad LC. »

« Ciò supposto, tirisi DR parallela ad AO, e seghi la curva parabolica in E, e sia FE applicata alla mezza parabola. Lo stesso accada nel rettangolo OL, dove, tirata IR parallela al semidiametro, seghi la periferia nel punto H, e quindi nel semidiametro cada la perpendicolare HG. È poi vero che il parallelogrammo OD, all' altro OE, è come DR ad RE, o come il quadrato OC al quadrato HR, o come il cilindro CR all' altro HO. Adunque, come tutti i minimi rettangoli circoscritti o inscritti nella mezza parabola, ad essa mezza parabola; così tutti i minimi cilindri circoscritti o inscritti nel quadrante di sfera, ad esso quadrante. Onde di nuovo sarà il parallelogrammo OM, alla mezza parabola, come il cilindro OL al quadrante di sfera. È poi il cilindro sesquialtero del quadrante di sfera; adunque il parallelogrammo sarà sesquialtero della mezza parabola. E però, essendo il triangolo inscritto nella mezza parabola tre di quelle parti, delle quali il parallelogrammo OM è sei, e la mezza parabola quattro; sarà questa sesquiterza del triangolo inscritto. »

« E qui ultimamente ho osservato aver avuto l' occhio il dottissimo Torricelli, nel X e XIII modo di quadrar la parabola. Ma, tornando alla dimostrazione di Pappo, confesso che quella fra le antiche fu la prima, che sparsemi nella mente i semi della retta maniera di dimostrare le ragioni del curvo e del retto, e della dottrina degl' indivisibili, quale poi da' moderni, e in particolare dall' ingegnosissimo p. Cavalieri, ho veduta coltivata lautamente » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 141).

Avremmo voluto rendere questo documento sopra gli altri anche più cospicuo, a ritirare il dubbio da nôi altrove, per insufficiente esame, emesso, che cioè fosse il Nardi non troppo favorevole al metodo cavalierano, mentre è un fatto ch' egli ne aveva prevenuta già l' invenzione. Non fa perciò maraviglia se con tale argomento in mano, aggiuntavi la Regola centrobarica, fosse il Nostro in Italia de' primi a penetrare i segreti della Cicloide, aperti con argomenti uguali o simili qualche anno prima in Francia. Ma la sentenza, che da noi s' anticipa, intorno a una questione delle più vivamente agitate fra i Matematici, dopo la prima metà del secolo XVII, e che non ha avuto fin qui altra regola delle preconcette opinioni in fuori, e dell' amor nazionale; vuol essere confermata dai fatti, che sinceramente passeremo a narrare dai loro principii.

II.

Le prime dispute insorsero intorno all' inventore della Cicloide, dicendosi comunemente in Italia essere stato costui Galileo. E veramente sembrerebbe favorire una tale opinione un documento prezioso, ritrovato da noi in

alcuni manoscritti, derivati senza dubbio dalla libreria del p. ab. Guido Grandi, col titolo: *Roba del gran Galileo, in parte copiata dagli originali, e in parte dettata da lui cieco a me Vincenzio Viviani, mentre dimoravo nella sua casa di Arcetri.* Quel documento, che si diceva, è dettato e scritto in dialogo, per inserirsi nella prima giornata delle due Scienze nuove « a facce 25 (dell' edizione di Leida) dopo le parole che dice il Sagredo *Il negozio è veramente molto intrigato.... però diteci quel che ne conviene.* »

« Salviati. — Prima però di dirvi una mia opinione, non voglio lasciare indietro di proporvi un fatto, che mi occorse a notare, speculando io intorno al modo di risolvere, forse più ragionevolmente di quel che non avesse fatto Aristotile, questo problema della ruota veramente ammirando. Per ridurmi la cosa più sotto i sensi, e per aiutare la mia immaginazione, feci quell' esagono, che vi ho detto, di cartone ben sodo, mettendomi a ruzzolarlo lungo una riga, tenuta ferma applicata contro un foglio, sopra il quale due punte di spillo, una infissa nel centro del poligono esterno, l' altra nel soggiacente angolo del poligono interno e concentrico, mi avrebbero lasciate impresse le vestigie degli archi continui e de' saltuari, dei quali ho discorso. Trasformando poi i due esagoni in due cerchi, pur col medesimo centro, per ridurmi più d' appresso alla contemplazione della ruota di Aristotile, mi vennero messi i due spilli in C e in B (fig. 294), e facendo rivolgere la ruota

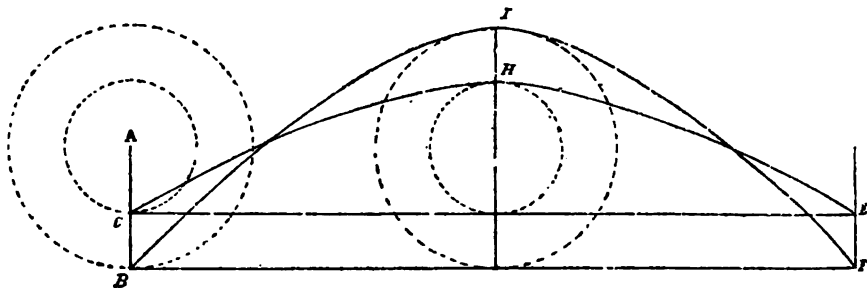



Figura 294.

sopra la riga BF per una intera circolazione, trovai con una certa maraviglia tracciate sopra il foglio le due curve linee BIF, CHE, quali vedete rappresentate in questa figura. »

« Sagredo. — Elegantissime curve in vero, le quali, insistendo sopra due corde di uguale lunghezza, e soprastando ad esse con differente altezza; sembra che possano adattarsi alla costruzione dei ponti, ai quali, mantenendo la medesima luce, si volesse dare o maggiore o minore il rigoglio. »

« Salviati. — Così parve anche a me, e a proposito del disegno del nuovo ponte di Pisa, che si voleva fare di un arco solo, avrei volentieri suggerito all' architetto una centina di quella figura, che mi aveva tanto bel garbo. Ma le mie speranze erano principalmente rivolte a promovere la scienza, ch' era mia professione, perchè forse, dallo spazio compreso fra l' arco della

curva e la base, ne sarebbe potuta derivare qualche utile notizia per la tanto desiderata misura dello spazio circolare. Vero è bene che, partecipando naturalmente ciascun generato delle qualità dei generanti, dubitai non fossero tra loro le due quantità incommensurabili, e fu per questa ragione che, prima di applicarmi agl' incerti e faticosi argomenti della Geometria, volli averne qualche consiglio con l' esperienza. Scelsi dunque un cartone, della più uniforme solidità e superficie che mi fosse possibile ritrovare, e di una parte di esso incisi, come seppi far meglio, una perfettissima ruota. Sopra il rimanente poi con esquisito macchinamento, disegnai la curva, a fil della quale e della linea, ch' era lungo la sottoposta riga servita di base, diligentemente tagliai il cartone. Avuta in fine una bilancetta da orafi, delle più esatte e gelose, pesai, più accuratamente che se fossero stati oro o margarite preziose, i due incisi cartoni, e poco mancò che l' uno non fosse il triplo dell' altro. »

« SAGREDO. — Se fossi stato chiamato io a consulto, quando si posero l' origini delle cose, vi confesso, signor Salviati, la mia temerità, che avrei consigliato la Geometria a fare una tal proporzione esattamente tripla, attemperando all' armonia universale anco questa corda, fin qui rimasta non tocca. Ma ditemi, non si potrebbe attribuire la differenza a qualche inesattezza nello sperimentare, o non potrebbe dipendere dal non avere scelta conveniente materia ? »

« SALVIATI. — Io usai d' incidere le figure anche sopra lamine di metallo, ma sempre l' un peso mi riuscì qualche poco men che triplo dell' altro. Se la differenza avesse avuto origine dall' imperfezione della materia, o dal poco esatto strumento, o dalla mia propria imperizia nel maneggiarlo, non sembra anche a voi che, conseguendo da così fatti inevitabili difetti il dar talvolta di meno, non si fosse tal altra dovuto aver qualche cosa più del giusto ? Or perchè accordarsi perpetuamente in andar nel medesimo eccesso, se non per intrinseca natura della cosa, e perchè insomma le due proposte grandezze non hanno fra loro nessuna misura comune ? E così, parendomi esser certo, abbandonai l' impresa, che mi s' era prima presentata con speranza così lusinghiera. »

« SAGREDO. — Se da questa speculazione non può ricavarsi alcun utile per la Geometria, come voi dite, la lascieremo anche noi volentieri, per tornare a pregarvi, signor Salviati, ci diciate quel che convenga a noi di pensare intorno alla ragione dello scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza. »

« SALVIATI. — Io ricorrerei alla considerazione dei poligoni sopra considerati etc. »

Quanto è certo che fu dettato e disteso questo frammento di dialogo sui principii dell' anno 1639, altrettanto è dubbio quando occorresse a osservare la Cicloide primaria e la secondaria, tracciate sul foglio dal moto dello strumento descritto dal Salviati. Quel che fu detto, essere cioè stata fatta l' osservazione infino dal 1600, è una congettura, una reminiscenza, una giaculatoria de' più devoti discepoli di Galileo. È certo altresì che, sotto il nome

volgare di *Roulette,* si trattava della nuova curva in Parigi, infino dal 1628, e il Roberval attesta averne udito ivi parlare al Mersenno come di cosa intorno alla quale, benchè inutilmente, s'erano da molti anni travagliati gl'ingegni. Hanno alcuni voluto confermare, dietro questa notizia, l'antichità e il primato dell'invenzione galileiana, ma come, essendo fra noi rimasta dimenticata, pellegrinasse a que' tempi in Francia, e ritrovasse fra gli stranieri quell'accoglienza, che non ebbe fra' suoi; secondo l'ordine naturale delle cose, non si comprende.

Ben assai più conforme a quest' ordine è il pensare che il caso occorso al Salviati fosse occorso tante volte prima a quei Matematici, i quali, non avendo altro maestro che Aristotile, e da' libri di lui attingendo i principii da risolvere le più ardue questioni, pensavano di risolvere anche quella della quadratura del circolo dallo speculare intorno alla Ruota famosa, e alla linea descritta, nel rivolgersi, da un punto fisso della sua circonferenza. Inutili conati è vero, ma da' quali si può argomentare come dovesse ai contemporanei di Leonardo da Vinci, del Cardano e del Vieta appresentarsi spontanea, nel meditare sopra la XXIV questione meccanica del Filosofo, la curva gentile. È da ripensare anzi alle occasioni forse più efficaci e immediate d'incontrarsi nella Cicloide, studiando quella meccanica quadratura del circolo, che i Matematici infin dal secolo XIV leggevano con tanto gusto in Archimede, quando s'incominciò a divulgare la prima collezione delle opere di lui. « Dal moto del carro, scriveva in una sua Nota Leonardo, ci è sempre stato dimostro dirizzare la circonferenza de' cerchi. La mezza circonferenza della rota, della quale la grossezza sia uguale al suo semidiametro, lascia di sè vestigio eguale alla quadratura del suo cerchio » (MSS. E, fol. 25 v.).

Comunque sia, da Galileo in Firenze, e dal Mersenno in Parigi ha i suoi principii storici la Cicloide, che però non va, nè all'un celebre uomo nè all'altro, debitrice de' suoi progressi. Il Francese nonostante, a cui non ne venne mai meno la speranza, fu di così fatti progressi assai più benemerito dell'Italiano, che distolse dall'applicarvisi gl'ingegni, reputando la quadratura della Cicloide problema non men disperato di quell'altro della quadratura del circolo genitore. Di qui è che fu causa l'inganno di Galileo dell'essersi indugiato fra noi a riconoscere il vero una diecina di anni dopo i Francesi, come si vedrà resultare dai fatti, che passiamo a narrare imparziali.

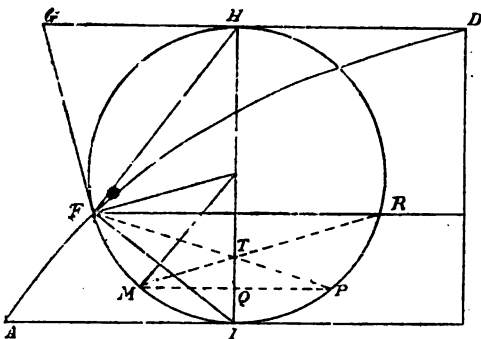
Egidio Roberval era assai giovane, quando il Mersenno gli propose di studiare intorno alle proprietà della curva, descritta dal rivolgersi della Ruota aristotelica, e perciò difficilissima apparvegli allora la proposta. Seguitando intanto gli amati esercizi, apprese dal divino Archimede quella dottrina dell'infinito, che poi il Cavalieri chiamò degl'indivisibili, col retto metodo dei quali sciolse alcuni de' più ardui problemi geometrici, qual'era quello di misurare la superficie conica di uno scaleno. Erano in questo passati sei anni, e il Mersenno tornò a battere sulla Trochoide, rimproverando il giovane amico ch'egli avesse lasciato indietro un così nobile studio, quasi si confessasse dalle difficoltà esser vilmente rimasto atterrito. « Ego sic castigatus, coepi

sedulo ipsam (trochoidem) inspicere, ac tunc quidem, quae absque indivisibilibus difficillima visa erat, ipsis opitulantibus nullo negotio patuit » (*Robervallii epist. ad Torricellium,* Oouvrages cit., pag. 369).

Le proposizioni, che con l'aiuto degli indivisibili il Roberval dimostrò intorno alla Trocoide, furono lette privatamente in scuola, e comunicate agli amici, nè si resero di pubblica ragione, se non che molto tardi, qua e là disperse per le Opere, raccolte poi fra le memorie dell'Accademia di Parigi. Noi ordineremo quelle proposizioni, con i lemmi, da cui alcune son precedute, e di molto abbrevieremo il discorso, usando il metodo analitico, e introducendo il segno $\int$ nel calcolo delle quantità indivisibili, perchè, non essendo altro esse quantità che i differenziali dei Matematici moderni, la loro somma dunque corrisponde a una vera e propria integrazione.

Figura 295.

« PROPOSITIO I. — *Semitrochoides AFD* (fig. 295) *sinus versi IL est quadrupla, seu diametri IH dupla* » (De trochoide, Ouvrages cit., pag. 342).

Conclude il Roberval il suo assunto col dimostrar che, presa qualsivoglia porzione AF della curva, alla quale corrisponda l'arco circolare IMF, essa porzione è uguale al quadruplo del seno verso IQ della metà IM dell'arco. Son mezzi della dimostrazione tre principii, il primo geometrico, il secondo meccanico, e il terzo, che partecipa dell'uno e dell'altro modo.

Il primo principio, di cui fa l'Autore frequenti applicazioni, si trova facilmente dimostrato nel *Traité des indivisibles,* ed è tale: Sia del semicerchio ADB (fig. 296) presa qualunque parte, come per es. CD o AC: diviso l'arco AC ugualmente in E, F, G.... e da ciascun punto della divisione abbassati i seni EL, FM, GN.... « je dis que la ligne AH est à la circonference AC comme tous les sinus ensemble sont à autant des sinus totaux, ou demidiamètres » (pag. 212).

Il secondo principio dipende dal metodo di condur le tangenti, applicandovi la regola del parallelogrammo delle forze, a quel modo che vedemmo nella proposizione V della Meccanica nuova del Torricelli. Secondo questa dottrina si trovano in F, nella figura 295, raccolte le velocità degl'infiniti punti dell'arco IF, e della porzion di cicloide AF: velocità, che resultano delle infinite respettive tangenti. E perchè nei moti equabili le velocità son proporzionali agli spazi AF, FMI, passati nel

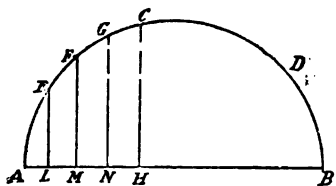



Figura 296.

medesimo tempo « ut ergo omnes tangentes curvae AF ad omnes tangentes arcus IMF, sic ipsa curva AF ad ipsum arcum IMF (pag. 341).

A instituire i terzo principio, essendo FG tangente al circolo nel punto F, FH tangente alla curva, e perciò resultante del moto, si conducano il raggio FL, e la corda FI. I triangoli simili FGH, FLI danno FH ad FG, come IF ad FL. Se ora intendansi fatte nell'arco IMF, e nella porzione di curva AF, le medesime infinite divisioni, e, condotte le medesime infinite tangenti, se ne prenda le somme; ne concluderemo, con l'Autore, per terzo principio, « chordas illas omnes simul sumptas, ad radium FL toties sumptum, sic se habere, ut omnes tangentes curvae AF simul, ad omnes tangentes arcus IMF simul, hoc est, per secundum notatum, ut curva ipsa AF, ad arcum ipsum IMF » (pag. 341).

Premonstrati i quali principii, così facilmente si conduce il Roberval alla desiderata conclusione. Dagli infiniti punti di divisione dell'arco IM, metà di IMF, si conducano sul raggio LI gl' infiniti seni retti corrispondenti, ciascun de' quali essendo la metà della corda, la metà pure sarà quella di questa loro somma. Se perciò si chiamino $s.r$ i seni retti, c le corde, e con $\int$ si significhi la loro somma, avremo $2\int s.r = \int c$. E se con $\int r$ si rappresenti la somma dei raggi, sarà, per il terzo premesso principio, $\int c : \int r = AF : IMF = 2\int s.r : \int r$. E perchè, per il primo degli stessi premessi principii, $\int s.r : \int r = IQ : IM$, ossia $2\int s.r : \int r = 2\,IQ : IM$; dunque $AF : IMF = 2\,IQ : IM = 4\,IQ : 2\,IM = 4\,IQ : IMF$, ond' è veramente $AF = 4\,IQ$.

Potendosi ora una tale dimostrazione applicare a qualunque punto della mezza Cicloide, comunque sia dall'origine A distante, supponiamo che il dato punto sia D. Troveremo ancora, col medesimo processo, $AFD = 4\,IL = 2\,IH$, ciò che vuol dire essere, così com'era il proposito di dimostrare, la mezza Cicloide doppia al diametro del circolo genitore.

Corollario. — Diviso l'arco IR nel mezzo in P, come nel mezzo M è stato diviso l'arco IF, e condotte le due corde FP, RM, è facile vedere che queste s'intersecheranno fra loro e col diametro HI nel punto T, in modo che sia $HF = HT = HI - IT = HI - 2\,IQ$, d'onde $2\,HF + 4\,IQ = 2\,HI = AFD$, essendo la semicicloide, per le cose già dimostrate, uguale al doppio del diametro. E perch' è stato altresì dimostrato che la porzione AF è uguale al quadruplo del seno verso IQ, dunque $2\,HF = AFD - AF = DF$, ciò che vuol dire essere ogni porzione, presa dal vertice, uguale al doppio della tangente. Così il Wallis, quell' *Anglus vir doctissimus, qui et praelo per se, vel per amicos suo nomine vulgavit* (pag. 344), formulò la seconda parte della proposiz. XXII, nel cap. V della sua *Mechanica:* « Curvae semicycloidis portio quaevis, ad verticem terminata, est dupla subtensae correspondentis arcus circuli genitoris » (Londini 1741, pag. 424).

« Propositio II. — *In rota simplici spatium trochoidis triplum est eiusdem rotae* » (Ouvr. cit., pag. 310).

La facilità della dimostrazione dipende dall' invenzion di quella curva, che il Roberval chiamava la *Compagne de la roulette,* e noi la *Comite* della

Cicloide. « Pour décrire cette ligne, dice l'Autore, ayant tiré des point de la Roulette des lignes paralleles à AC (fig. 297), si dans chacune de ces lignes, a commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la mesme ligne comprise entre la demi-circonference du cercle et son axe, l'on avra les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit la ligne GHI, si dans la mesme ligne vous prenez GN

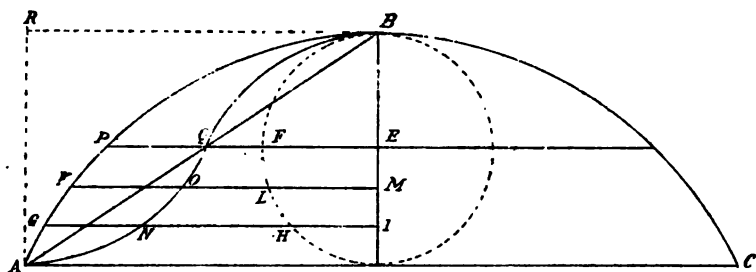



Figura 297.

égale a HI, vous avrez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoide. De mesme prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous avrez un autre point O de la mesme ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire a BD, et si vous la prolongez en P, jusqu'à la Roulette, ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF, dans la mesme ligne PF vous avrez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-cy, et auquel elle change de courbure » (pag. 64).

Apparisce in primo luogo da una tal descrizione che lo spazio rinchiuso fra la cicloide e la comite è diviso dalla linea PQ in due parti uguali, come quelle che sono intessute de' seni retti di due quadranti del medesimo circolo, con transiti, non equabili, ma simili qua e là nelle due figure, ond' è che tutto il detto spazio è uguale a quello dello stesso mezzo cerchio. 2.° Dai punti N, O, Q abbassando perpendicolari sulla base AD, saranno queste linee i seni versi corrispondenti ai seni retti già presi. 3.° La parte superiore QB della comite sarà uguale all' inferiore ANQ, perchè tutte le linee condotte parallelamente alla base son tagliate in parti contrariamente uguali, e di qui è ch' essa comite divide il rettangolo nel mezzo, come l' AB diagonale. Consegue in ultimo dalla fatta costruzione che i due bilinei ANQA, QBQ sono uguali, e che perciò uguale spazio rinchiudono dentro l' angolo retto ADB la comite e la diagonale.

La superficie dunque, che si propone a quadrare, è composta di quella compresa tra la cicloide e la comite, e dell' altra occupata dal triangolo mistilineo AQBD, uguale al rettilineo ABD, che ha per misura $\frac{AD \cdot BD}{2} = \frac{\pi\, DB}{2} \cdot \frac{DB}{2} = \frac{\pi\, DB^2}{4}$, ossia uguale al circolo di diametro BD. Aggiunta a questa l' altra superficie, compresa tra la linea cicloidale e la comite, e che

vedemmo essere uguale al mezzo cerchio, « toute la figure de la Cycloide vaudra trois fois le cercle » (ivi, pag. 211).

Corollario. — Di qui è patente che i quattro spazi compresi tra l'asse e il semicircolo, tra il semicircolo e la comite, tra la comite e la cicloide, tra la cicloide e il rettangolo circoscritto; sono uguali, e che perciò il detto rettangolo contiene quattro di quelle parti, delle quali la cicloide ne contiene tre sole.

Ecco come veramente il Roberval avesse *nullo negotio* risoluto il problema della quadratura della Cicloide, che Galileo aveva abbandonato come impresa, non solo difficilissima, ma disperata. La stereometria però de' solidi, generati dal rivolgersi la figura col suo rettangolo circoscritto intorno alla base, intorno a una tangente al vertice, intorno all' asse; era altro negozio, a trattare il quale, non bastando le forze naturali, bisognava, come a rimovere un corpo troppo ponderoso, ricorrere all' aiuto dei macchinamenti. Il Torricelli, come vedremo, ritrovò questi validissimi aiuti nella Regola centrobarica, ma il Roberval, o che non avesse ancora veduti i libri del Guldino, o che sdegnasse di ricorrere agli stranieri soccorsi della Meccanica, volle tutto ricavare dagl' intimi seni della Geometria pura, dimostrando la seguente proposizione, da servire, alla stereometria de' cicloidali, di primo e principalissimo lemma:

« Si on decrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cet exemple) et qu'on fasse tourner le tout sur un des costez du parallelogramme; le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure » (pag. 222).

Essendo un circolo, col quadrato a lui circoscritto, come nella fig. 298, e HF l' asse della rivoluzione, è manifesto che saranno i solidi generati un anello stretto e un cilindro, la proporzion tra i quali e le figure genitrici si dimostra in questo caso assai facilmente. L' anello infatti si compone delle infinite armille QM, VN.... come il cilindro dei corrispondenti circoli SO, TP.... Intendendosi ora con a significata l'armilla abbiamo a QM $= \pi$ SQ$^2 - \pi$ MS$^2 =$ π (SQ $+$ MS) (SQ $-$ MS) $=$ π SO . QM. Troveremo allo stesso modo a VN $= \pi$ TP . VN, e così di tutte le altre. La somma dunque di tutte queste infinite armille, delle quali si compone l' anello A, sarà, osservando che TP $=$ SO, A $=$ SO (QM $+$ VN...).

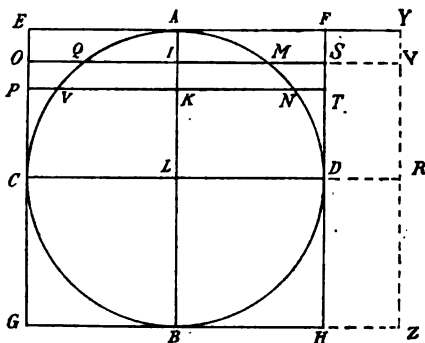



Figura 298.

Il circolo poi descritto da SO è uguale a π SO^2 come il circolo di TP a π TP^2. Della somma di tutti questi circoli componendosi il cilindro C, sarà

dunque $C = \pi SO (SO + TP\ldots)$ e perciò $A : C = QM + VN\ldots : SO + TP\ldots$ Ma di questa seconda ragione il primo termine è la somma di tutte le linee, che intessono il circolo, e il secondo è la somma di tutte le linee, che intessono il quadrato; dunque i solidi rotondi stanno come le figure.

Tale dimostrazione però non s' adatta che al circolo, o a figure segate dall' AB in due parti, non solamente uguali, ma simmetriche intorno all' asse. Però volendo il Roberval dare dimostrazione più generale, applicabile a qualunque figura divisa in due parti uguali, o simmetriche o no intorno all' asse, procede in quest' altra maniera, considerando l' armilla QM composta delle due parti IM, IQ, quella uguale a $\pi IS^2 - \pi SM^2$, questa uguale a $\pi SQ^2 - \pi SI^2$. Si tratta ora di riunire insieme queste due armille, al quale intento si giunge così, abbreviando la via tenuta dall' Autore:

$IS^2 - SM^2 = MI^2 + 2 IM . MS = MI (MI + MS) + IM . MS = MI . IS + IM . MS$, onde (*) $IS^2 - SM^2 + IQ^2 = MI . IS + IM . MS + IQ^2 = MI . IS + MI . MS + MI^2 = MI . IS + MI (MS + MI) = MI . IS + MI . IS = 2 MI . IS$. Abbiamo inoltre $SQ^2 - SI^2 - IQ^2 = 2 SI . IQ = 2 SI . IM$, la quale, sommata con quella notata sopra con asterisco, darà $IS^2 - SM^2 + SQ^2 - SI^2 = 4 SI . IM$. Troveremo nello stesso modo $TK^2 - TN^2 + TV^2 - TK^2 = 4 TK . NK$ e così di tutte le altre infinite armille, che sommate insieme comporranno l'anello $A = \pi SI (IM + KN\ldots) = 2 \pi SI 2 (IM + KN\ldots) = \pi SO (MQ + NV\ldots)$.

Venendo ai circoli, quello descritto da SO sarà πSO^2; quello descritto da $TP = \pi TP^2$, e così di tutti gli altri infiniti, i quali sommati insieme comporranno il cilindro $C = \pi SO (SO + TP\ldots)$, onde

$$A : C = MQ + NV\ldots : SO + TP\ldots$$

Ma nel secondo membro di questa equazione il primo termine è la somma di tutte le infinite linee tessenti il circolo, il secondo la somma di tutte le infinite linee tessenti il rettangolo; dunque l' anello sta al cilindro, come il circolo al rettangolo circoscritto.

Corollario I. — Qualunque sia la figura inscritta nel rettangolo, purchè venga dalla linea AB, parallela all' asse di rotazione, segata in due parti uguali, com' esso rettangolo; i solidi rotondi saranno sempre proporzionali ai piani da cui son generati.

Scolio. — « Nous trouverons la mesme chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne YZ » (pag. 224) e tirate le sezioni come dianzi, per esempio la UO, si dimostra dall' Autore in simile modo che « le quadruple du rectangle UIO sera au quarré de EY comme le cylindre, ou plutost le rouleau GEFH, est au cylindre total EGZY » (ivi, pag. 225).

Se dunque son vere le cose dimostrate, anche quando l' asse della rivoluzione sia una parallela a HF, come per esempio ZY, chiamato R^0 il rotondo, che descrive il parallelogrammo P^0, e A^0 l' anello descritto dal circolo C^0; avremo $R^0 : A^0 = P^0 : C^0$. Moltiplicando la seconda ragione per $2 \pi LP$, ossia per la circonferenza descritta dal raggio LR, sarà

$$R^0 : A^0 = P^0 . 2 \pi LR : C^0 . 2 \pi LR.$$

Ora il Roberval dimosta che, essendo $R^{\circ} = P^{\circ} . 2 \pi LR$, è anche in conseguenza $A^{\circ} = C^{\circ} . 2 \pi LR$, ciò che dà luogo a formulare la proposizione: « Je dis que la roule GF est egal au solide qui a pour base le parallelogramme GF, et pour hauteur la circonference d'un cercle, qui a pour demidiametre la ligne LR » (pag. 228).

Concludesi dall'Autore l'uguaglianza tra $EFGH . 2 \pi LR$ e $R^{\circ} . EFGH$ (ossia il rotondo descritto dal rettangolo EH) dimostrando che ambedue si uguagliano a un terzo solido $C^{\circ} . GY$, che vuol dire al cilindro descritto dal rettangolo GY. La dimostrazione procede facilmente per questa via:

$$C^{\circ} . GY = \pi GZ . GZ . HF ; \; EFGH . 2 \pi LR = HF . GH . 2 \pi LR,$$

onde $EFGH . 2 \pi LR : C^{\circ} . GY = GH . 2 LR : GZ^2 = 4 GB . BZ : GZ^2.$

Ma per lo Scolio precedente 4 GB . BZ sta a GZ^2 come il rotondo di EGFH sta a $C^{\circ} . GY$; dunque questo rotondo è uguale al solido, che ha per base EFGH, e per altezza 2π LR. E perciò dall'essersi così dimostrato $R^{\circ} = P^{\circ} . 2 \pi LR$, ne consegue $A^{\circ} = C^{\circ} . 2 \pi LR$, che vuol dire insomma equivalere i due solidi a due prismi di pari altezza, uguale alla circonferenza descritta dal raggio LR distesa in dirittura, ma l'un dei quali avesse per base il rettangolo, e l'altro il circolo, dal rivolgimento de' quali furono quelli stessi solidi generati.

Questo teorema, che il Roberval intitola *Des anneaux,* apparirà a chiunque vi ripensi notabilissimo, avuto riguardo alla Regola centrobarica, o non conosciuta allora in Francia, o trasposta così di proposito, dal campo della Meccanica, in quello della Geometria, qualche tempo prima che, a confortar di matematiche ragioni le proposte del Guldino, si pensasse in Italia. Ma lasciando stare le applicazioni feconde, che di questo teorema robervalliano della trasformazion de' solidi annulari in prismi si poteva fare alla Stereometria; il principale intento, per cui lo troviamo raccolto fra queste proposizioni, è quello di servire di lemma principale alla misura dei solidi cicloidali. Altri due lemmi però, per agevolar l'ardua via, e da nessune altre orme segnata, erano necessari, e il Roberval così se gli proponeva a dimostrar facilmente, aiutandosi degli indivisibili.

Figura 299.

« *Lemma II.* — Les quarrez des sinus sont au quarre du diametre pris autant de fois comme 1 à 8 » (pag. 251).

Sia il quadrante FLN (fig. 299) diviso in un numero infinito di parti uguali. Noi considereremo le tre divisioni fatte in M, L, K, dalle quali si

conducano i seni retti GM, HL, IK, e i seni retti KQ, LP, MO dei loro complementi. Avremo

$$DM^2 = GM^2 + GD^2$$
$$DL^2 = HL^2 + HD^2$$
$$DK^2 = KI^2 + ID^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sommando queste equazioni, e osservando che tutti i loro primi membri sono uguali al raggio R, avremo $\int R^2 = GM^2 + HL^2 + KI^2 \ldots + GD^2 + HD^2 + ID^2 \ldots$ Ma nel secondo rispetto la prima somma è quella de' quadrati de' seni retti, che potrà significarsi con $\int s \,.\, r^2$, la seconda è quella dei complementi de' seni retti, ed è manifestamente in numero e in quantità uguale all'altra; e perciò $\int R^2 = 2 \int sr^2$. Ora, intendendosi per D il diametro, R^2 è uguale a $\frac{D^2}{4}$: dunque $\int \frac{D^2}{4} = 2 \int sr^2$, ossia $\int sr^2 : \int D^2 = 1 : 8$.

« *Lemma III.* — Le quarré du diametre pris autant de fois est aux quarrez des sinus verses comme 8 à 3 » (pag. 252).

Osservando che $FE^2 = (FI + IE)^2 = FI^2 + IE^2 + 2\,FI \,.\, IE$, e che $FI \,.\, IE = IK^2$, e così di tutte le altre infinite sezioni del diametro EF; avremo

$$EF^2 = FI^2 + IE^2 + 2\,IK^2$$
$$EF^1 = FH^2 + HE^2 + 2\,HL^2$$
$$EF^2 = FG^2 + GE^2 + 2\,GM^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sommando e osservando che $FI^2 + FH^2 + FG^2 \ldots.$ è la somma di tutti i quadrati dei seni versi, che significheremo con $\int s \,.\, v^2$; e $IE^2 + HE^2 + GE^2 \ldots.$ la somma de' loro complementi, e che perciò tutti questi sono uguali a tutti quelli; avremo $\int EF^2 = 2 \int s \,.\, v^2 + 2\,(IK^2 + KL^2 + GM^2 \ldots.)$. Ma la somma dentro parentesi è, per il lemma precedente, uguale $^1/_8 \int EF^2$, dunque $\int EF^2 - {}^1/_4 \int EF^2 = 2 \int s \,.\, v^2$, d'onde $3 \int EG^2 = 8 \int s \,.\, v^2$, ossia $\int EF^2 : \int s \,.\, v^2 = 8 : 3$.

Premessi i quali tre lemmi, le proporzioni, che passano tra i solidi e i cilindri circoscritti, rivolgendosi le figure intorno alla base, e intorno alle tangenti o al vertice o all'origine della Cicloide; tornarono al Roberval così, come noi le compendieremo con discorso analitico, d'assai facile invenzione.

« PROPOSITIO III. — *La raison de 5 à 8 est celle du solide, que fait la roulette AIB* (fig. 300) *au cylindre AM, le tout tournant sur ACB* » (pag. 267).

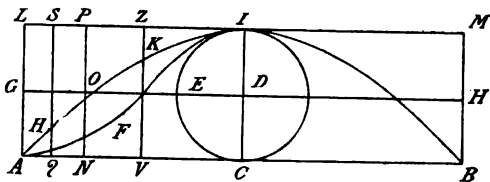



Figura 300.

Considera l'Autore il solido proposto resultar di due parti: di quella descritta dallo spazio AFIRA,

compreso tra la cicloide e la comite, e dell'altra, che vien descritta dal trilineo AFIC. Ora la prima detta figura è, per il corollario della seconda proposizione, un quarto del rettangolo AI, ed ha, come il detto rettangolo, il centro sopra la GD, che sega in due parti uguali ambedue le figure, ed è parallela all'asse AB della revoluzione. Dunque i solidi rotondi, per il corollario primo del primo lemma, stanno come le figure piane, e perciò il solido, che chiameremo S, al cilindro C, come uno a quattro, o come due a otto.

La figura poi AFIC è per costruzione intessuta delle infinite linee parallele a IC, ossia degli infiniti seni versi del mezzo circolo IEC, ed è nel terzo lemma stato dimostrato che la somma de' quadrati di tutti questi seni versi, o de' circoli da essi descritti, sta alla somma de' quadrati del diametro IC, o de' circoli da lui descritti e presi altrettante volte, come 3 a 8. Ora, essendo manifesto che la somma de' primi circoli costituisce il solido T del trilineo, e la somma dei secondi il solido C del cilindro; avremo $T : C = 3 : 8$. Ma è altresì $S : C = 2 : 8$, dunque $S : T = 2 : 3$. Componendo $S + T : T = 5 : 3$, d'onde $S + T : C = 5 : 8$.

Di qui manifestamente resultando

$$\pi\, KV^2 + \pi\, ON^2 + \pi\, RQ^2 \ldots : \pi\, ZV^2 + \pi\, PN^2 + \pi\, SQ^2 = 5 : 8,$$

avremo, dividendo per π, $KV^2 + ON^2 \ldots : ZV^2 + PN^2 \ldots = 5 : 8$.

« Propositio IV. — *Maintenant il faut voir quelle raison il y avra entre le solide de la mesme roulette a son cylindre, lors qu'elle tourne sur LM* (nella medesima figura) *parallele à AB, qui est celle de 7 à 8* » (pag. 268).

Considera l'Autore che il solido descritto dallo spazio cicloidale, in questo caso, uguaglia il cilindro, toltone il solido generato dai trilinei ALI, IMB, a trovar la misura del quale si riduce il presente negozio. E perchè resulta la detta misura dalla somma degl' infiniti circoli, come sarebbro quelli descritti da ZK, PO, SR, ecc., convien prima dunque con le seguenti equazioni predisporre per ciascuno i valori

$$ZK^2 = ZV^2 + KV^2 - 2\, VZ \,.\, VK$$
$$PO^2 = PN^2 + ON^2 - 2\, PN \,.\, ON$$
$$SR^2 = SQ^2 + RQ^2 - 2\, SQ \,.\, RQ$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sommando tutte queste equazioni, e osservando che $ZV + PN + SQ \ldots = \int IC$, avremo

$$ZK^2 + PO^2 + SR^2 = \int IC^2 + KV^2 + ON^2 \ldots - 2 \int IC\, (VK + ON \ldots).$$

Ma, per il corollario della precedente, $KV^2 + ON^2 \ldots = {}^5/_8 \int IC^2$, e, per il corollario della seconda, $VK + ON \ldots = {}^3/_4 \int IC$; dunque

$$ZK^2 + PO^2 \ldots = {}^8/_8 \int IC^2 + {}^5/_8 \int IC^2 - {}^{12}/_8 \int IC^2 = {}^1/_8 \int IC^2.$$

Moltiplicando per π, $\pi\, KZ^2 + \pi\, PO^2 \ldots = {}^1/_8\, \pi \int IC^2$. Ond'è che, compo-

nendosi degl' infiniti circoli di raggio KZ, PO, ecc., come si disse, il solido T descritto dal trilineo ALI, e degl' infiniti circoli, tutti di raggio uguale a IC, il cilindro C; avremo C : T = 8 : 1. Dividendo, C — T : T = 7 : 1, d' onde C — T : C = 7 : 8.

« PROPOSITIO V. — *Il faut maintenant considerer les solides, qui se font quand la figure tourne sur LA.* »

« Où on remarquera que la ligne IC, parallele à la dite LA, coupe le parallelogramme AM et la figure AIB en deux egalement, et partant les solides sont entr'eux comme les plans, et ainsi le solide fait par AIB sera au cylindre, formé par le parallelogramme AM, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3, partant le cylindre sera au solide de la roulette comme 4 à 3 » (pag. 269).

« Haec et multa alia, conclude il Roberval, circa annos 1635 et 1640, vigente animi vigore, detexi » (pag. 342). Tentò altresì la misura del solido generato dalla mezza cicloide e dal cilindro circoscritto, facendosi la rivoluzione intorno all' asse, ma lasciò allora l' impresa per disperata, sembrandogli essere i due solidi fra loro incommensurabili. Vi tornò poi sopra, quando il Torricelli annunziò di aver avuta in proporzioni definite quella misura, di che diremo altrove, prima di por termine a questa digressione.

Intanto lo stesso Roberval e il Mersenno andavano tutti compiacenti diffondendo fra i Matematici la notizia di queste scoperte, e principalmente della quadratura della Cicloide, facendosi intendere com' ella fosse stata dimostrata precisamente tripla del circolo genitore. Ne sentirono allegrezza gli amici, e livore gli emuli e gl' invidiosi, sfogandosi col dire che la cosa era poi tanto facile, da non meritar che se ne facesse tutto quel gran rumore, non ripensando costoro che una tale facilità dipendeva dall' essersi per il Roberval l' ipotesi ridotta a tesi, che ciascuno era certo di poter dimostrare.

Essendo infatti due le vie, che naturalmente si paravano innanzi, l' una delle quali consisteva nel decomporre lo spazio cicloidale DGABD (fig. 301), nel triangolo rettilineo DAB; e nel bilineo DGAD; e l' altra nel decomporre quel medesimo spazio nel mezzo cerchio DHA, e nel trilineo DGAHB; è manifesto che, dovendo essere il tutto uguale a tre mezzi cerchi, de' quali il triangolo, che ha per base la mezza circonferenza e per altezza il diametro, è due; tutto si riduceva a trovar modo di dimostrare come li bilineo fosse uguale a uno, e il trilineo a due di quei mezzi cerchi. Tenne questa via il Fermat, e quella il Cartesio, il quale, in comunicarne la dimostrazione al Mersenno, così gli scriveva: « Inchoasti per inventionem d. De Roberval de spatio comprehenso in linea curva, quam describit punctum aliquod circumferentiae circuli, qui concipitur rotari aut currere super plano quodam, quam mihi fateor nunquam in mentem venisse, et eius annotationem perelegantem

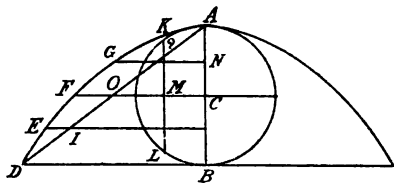



Figura 301.

esse. Caeterum non video rem tanti esse, quae buccina vulgetur, cum sit inventu facilis, quamque vel mediocriter in Geometria versatus certo invenire potest, si eam quaerit » (*Epistolae*, P. III, Amstelod. 1683, pag. 240).

Chiunque infatti può facilmente dimostrare che tutte le infinite linee come GH, EI (nella medesima figura) equidistanti alla FC, che parallelamente alla base attraversa il centro; son coppia a coppia uguali alla corda, come KL, condotta parallelamente al diametro, a una distanza MC, che si uguagli alla NC. Or perchè di quelle infinite linee accoppiate si compone il bilineo, e delle infinite corde, corrispondenti a ciascuna di quelle coppie, il semicerchio; dunque le due superficie sono uguali.

Riduce ingegnosamente il Cartesio a maggior facilità la cosa, disponendo le coppie GH, EI, e tutte le altre infinite in continuità lungo una medesima direzione, col trasportar lo spazio DFO, che nella figura 301 riman di sotto, invece allato, come ACD nella figura 302. Resulta da una tale disposizione

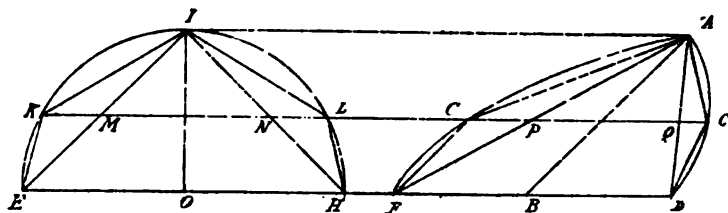



Figura 302.

che la linea FD, divisa nel mezzo in B, uguaglia EH diametro del semicircolo EIH, da cui è generata la cicloide, e che tutte le corde, come KL, sono uguali alle infinite linee, una delle quali è GC essendo queste tanto distanti da FD, quanto dal centro O sono distanti quelle. Ciò che evidentemente prova, dice il Cartesio, essere le due superficie uguali a chi non ignora che due figure, aventi la medesima base e la medesima altezza, e tutte le linee rette parallele, inscritte nell'una, uguali alle infinite inscritte nell'altra; si distendono nello spazio ugualmente. « Verum, poi soggiunge, cum fortasse sint qui theoremati isti non applaudant, pergendum duxi hoc modo (ibid., pag. 228). Il modo consiste nel comune e antico degl' inscritti, facendo osservare che sono uguali qua e là i triangoli EIH, FAD, insistenti con pari altezza sopra basi uguali: e uguali i triangoli SAP, QAC insieme, ai triangoli KIM, INL insieme, e anche il triangolo FGP + QCD uguale al triangolo EKM + NLH, per le medesime assai patenti ragioni. Così essendo vero di tutti i triangoli, che resultano dal moltiplicare all' infinito le iscrizioni, resta provato che lo spazio FGAD, da cui si rappresenta il bilineo della Cicloide, è uguale a mezzo il circolo genitore.

Non vogliamo proseguire il discorso, senza arrestarci un poco a ripensare come il Cartesio è il terzo, dopo il Roberval e il Nardi, a far uso degli indivisibili, prima che se ne istituisse il metodo nella *Geometria nuova*. I primi due commemorati, benchè confessassero di aver non da altri che

da Archimede e da Pappo derivata la dottrina dell' infinito, pur non detrassero poi nulla alla gloria del Cavalieri, la Geometria del quale parve al Nardi *opera gigantea, così oscure verità discopre e in sì nobile maniera* (MSS. Gal., T. XX, pag. 1895), e il Roberval, che pure avrebbe potuto chiamarsi a parte col Cavalieri nel merito dell' invenzione, così generosamente si protestava in pubblico con queste parole: « Ego tanto viro, tantae ac tam sublimis doctrinae inventionem non eripiam, nec possum, nec si possim faciam. Ille prius vulgavit, ille hoc iure suam fecit: ille hoc iure habeat, atque possideat, ille tandem hoc iure inventoris nomine gaudeat » (Ouvrages cit., pag. 367).

Il Cartesio però, nè fra gli antichi nè fra i moderni, non conosce maestro: il metodo degli indivisibili è parto del suo proprio cervello, per cui si ride e sente compassione di questo povero Cavalieri. Nell' Aprile del 1646, essendo in Leida, gli si fa incontro il professore Schoten, il giuniore, per dirgli ch' era recapitata quivi d' Italia la *Geometria nuova.* Prende il Cartesio fra le mani il libro, e lo svolge non più che per un quarto d' ora, *quadrantis horae spatio,* eppure ciò gli basta per formarsi il giudizio che non si faceva lì dall' Autore altro che ripetere cose viete, dimostrandole in quel modo, con cui aveva egli stesso dimostrata la quadratura della Cicloide. Poi si mette a dire che alla chiave di questo Cavalieri mancavano per aprire gli ingegni. « Ego enim multa plura novi maioris ponderis, quorum vim magnam in meam Geometriam contuli: ille autem ea non facile inveniet, neque intelliget unum ex illis, nisi prolixo volumine explicatum » (Epistol., P. III cit., pag. 343). Ma vediamo come il Fermat dimostrasse, non men facilmente del Cartesio, che il trilineo ABFD (fig. 303) nella mezza cicloide è in superficie uguale al circolo genitore.

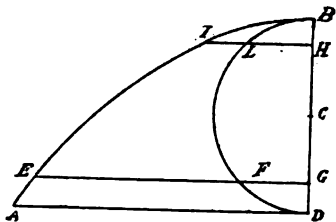



Figura 303.

Essenziale proprietà della curva è che, a partire dal vertice B, dove intendasi fermato il diametro BD del circolo genitore con la sua semicirconferenza DLFD; tutte le ordinate, come IL, EF, sono uguali agli archi intercetti LB, BLF: ond' è che se le due dette ordinate sono ugualmente distanti dal centro C, sommate insieme, saranno uguali alla stessa semicirconferenza, e così sarà vero delle infinite simili coppie. Qui il metodo degl' indivisibili avrebbe somministrato al Fermat una dimostrazione, da non si paragonare, nella brevità e nella eleganza, nè a quella del Cartesio, nè del Torricelli stesso o di qualunque altro avesse voluto concorrere nell' argomento. Imperocchè, soprammesse tutte quelle mezze circonferenze, comporrebbero la mezza superficie convessa di un cilindro, descritto da un quadrato, di cui fosse il lato uguale al raggio CD del circolo genitore, la qual superficie convessa essendo uguale a uno de' circoli, che fanno da base al medesimo cilindro, anche il trilineo AIBFD sarà dunque uguale a quel circolo.

Ma, o che il Fermat non conoscesse questo metodo, o che non l' appro-

vasse, ricorse a un altro espediente, molto allora in voga per gli esempi datine dal Keplero, qual era quello di pigliar delle curve così minime parti, da poterle riguardar come rette. Così dunque divisi i raggi CD, CB nel medesimo numero di particelle, tutte fra loro uguali, e da ciascun punto di divisione, sotto e sopra, a ugual distanza dal centro C, condotti seni come FG, LH, prodotti nelle ordinate FE, LI; la figura ED si potrà riguardar come un trapezio, e tale pure, cioè come un trapezio, la minor base del quale sia ridotta a zero, si potrà riguardare il triangolo ILB, e così dicasi delle altre infinite simili figure intercette. Chiamati ora T, t, que' trapezi ED, ILB, con le altezze GD, BH uguali, e ugualmente distanti dal mezzo C; sommati insieme daranno $T + t = \frac{GD}{2} (AD + EF + IL) = GD . \pi CD$. Suppongasi ora essere n il numero delle divisioni, corrispondente al numero delle coppie dei trapezi descritti nel trilineo AIBFD, e per questo numero n si moltiplichi la trovata equazione. Verrà $n (T + t) = n GD \pi CD$. Ma $n (T + t)$ è manifestamente uguale alla superficie S del detto trilineo, e $n GD = CD$; dunque $S = \pi CD^2$.

Tale facilità di via aprì il Roberval ai matematici di Francia, i quali avevano già nel 1641, infino al punto che abbiam veduto, promossa la scienza della Cicloide. Ma fra noi si rimaneva in quel tempo tuttavia stagnante, impeditone il libero corso da quell' argine contrappostole da Galileo, e descritto dal Salviati nel frammento di dialogo sopra trascritto, il quale argine ora è a narrare quando, da chi e con quali conati fosse superato, d' onde scesero le acque di sopra a irrigar largamente anche i nostri campi.

III.

Il dì 14 Febbraio 1640 scriveva il Cavalieri in una lettera, indirizzata a Galileo da Bologna, queste parole rimasteci come certissimo documento della prima occasione, che il Roberval, aiutato dalle ingerenze del Mersenno, dette ai nostri Matematici di risolvere i problemi intorno alla linea, allo spazio e ai solidi generati dalla Cicloide: « Mi sono stati mandati da Parigi due quesiti da quei Matematici, circa de' quali temo di farmi poco onore, perchè mi paiono cure disperate. L' uno è la misura della superficie del cono scaleno, l' altro la misura di quella linea curva, simile alla curvatura di un ponte, descritta dalla rivoluzione di un cerchio, sino che scorra con tutta la sua circonferenza una linea retta, e dello spazio piano compreso da quella, e del corpo generato per la rivoluzione intorno all' asse e alla base: il che mi ricordo che una volta mi domandò lei, ma che infruttuosamente mi vi affaticai. Di grazia mi dica se sa che queste due cose sieno state dimostrate da nessuno, perchè, per quello che io vedo, mi paiono difficilissime. »

« L' occasione è stata che, passando un padre di S. Francesco di Paola (*il padre Niceron*) qua da Bologna, che è di Parigi, e molto intendente delle matematiche, nel discorrere seco di diverse cose gli venni a dire che avevo trovata la misura del corpo parabolico nato dalla rivoluzione della parabola intorno alla base, e che avevo trovato che il cilindro, generato dal parallelogrammo circoscritto alla parabola, era al detto corpo come 15 a 8, sebbene uno dei principali gesuiti matematici mi aveva già un pezzo fa scritto che era doppio. Ora il detto Padre disse: Lasci di grazia che io lo scriva a quei matematici di Parigi, per vedere se rincontrano questa verità, e così l' hanno, dice, trovata come 15 a 8. E questa è stata l' occasione di propormi questi altri problemi, da me reputati di difficilissima risoluzione, per quel poco che io vedo » (Alb. X, 379, 80).

Galileo rispose, dopo dieci giorni, parere anche a lui i problemi mandati di Francia difficilissimi, nè sapere che ancora fossero sciolti, e soggiungeva: « Quella linea arcuata sono più di cinquant' anni che mi venne in mente il descriverla, e l' ammirai per una curvità graziosissima, per adattarla agli archi d' un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse esser triplo del cerchio che lo descrive, ma non fu così, benchè la differenza non sia molta. Tocca all' ingegno del p. Cavalieri e non d' altro il ritrovarne il tutto, e mettere tutti li speculativi in disperazione di poter venire a capo di questa contemplazione » (Dati, *Lettera ai Filaleti,* Firenze 1663, pag. 4, 5).

Invece il Cavalieri aveva, dietro queste parole, messo sè medesimo in più disperazione che mai. Chi avrebbe creduto ciò dell' Autore degli indivisibili? Fosse allora venuto uno a mostrargli con quanta facilità conduceva il metodo da lui stesso iusegnato a riconoscere, com' aveva fatto il Cartesio, che il bilineo compreso fra la diagonale del rettangolo circoscritto e la mezza cicloide uguaglia il semicircolo che la descrive; o che il trilineo compreso fra le due mezze curve è uguale alla metà della superficie convessa di un cilindro, descritto dal rivolgersi di un quadrato costruitosi sul raggio del circolo genitore! Ma il saper che in tale esercizio s' era per cinquant' anni inutilmente straccato Galileo, e il credere con lui che le proposizioni venute di Parigi fossero problemi da risolversi, e non teoremi già dimostrati, fu causa che il Cavalieri adombrasse puerilmente così, da ritrarsi dalla nobile impresa.

La viltà del capitano impaurì anche gli altri militi, fra quali il Nardi, ch' era pure uno dei più coraggiosi, nè mancò di giovare quel poco di coraggio, di che egli dava gli esempi. Discepolo fedelissimo di Archimede, che aveva secondo lui ritrovato il centro di gravità nel conoide, e in altre strane figure per via di meccaniche esperienze, tornò il Nardi a tentare le prove, che a Galileo non erano mai riuscite. Se non che pensò di paragonare il peso della cicloide con quello del rettangolo circoscritto, piuttosto che del circolo genitore. Così le rasure, dalle quali si temeva che principalmente dipendessero le fallacie, riuscivano molto minori di quelle fatte da Galileo, e d' av-

vantaggio s' avevano due riscontri: prima col rettangolo intero, e poi co' due triangoli aventi un lato curvilineo opposto all' angolo retto, e rimasti dal recider la cicloide dal rettangolo stesso. Fatta dunque l' operazione, trovò il Nardi che il peso del rettangolo era a quello della cicloide come quattro a tre, d' onde credeva se ne potesse concludere esser essa cicloide esattamente tripla del circolo, che movendosi la descrive. Ma rimanendo tuttavia incerto se dicesse il vero la sua o la bilancetta di Galileo, lasciò anch' egli ai geometri il dar sentenza finale.

L' invenzione meccanica della quadratura della Cicloide occorse al Nardi nel 1641, quando faceva copiare la seconda Ricercata geometrica, nella quale era scritto: « Osservo, per le meccaniche esperienze, che un rettangolo di ugual base e altezza con la cicloide sia sesquiterzo di essa, da che, quando vero sia, vero anche sarà che la cicloide sia tripla di quel cerchio da cui descrivesi. » E si termina dall' Autore questo discorso della Cicloide con le seguenti parole: « Finalmente non stimo gettarsi il tempo che s' impieghi nel coltivare tal campo della Geometria, in grazia d' agguagliare il cerchio ad un rettilineo. Ma chiunque per questa strada arriverà a tal segno saprà forse anche trovare la proporzione della linea cicloide verso la base sua, come anche quella del solido e superficie prodotti mentre intorno alla base o all' asse si rivolga lo spazio cicloidale. Lasciamo dunque tali contemplazioni agli altri, e ripigliamo il nostro discorso. »

L' esperienza meccanica, dalla quale resultava essere la cicloide esattamente tripla del circolo che l' ha descritta, fu dal Nardi annunziata al Torricelli, il quale incominciò allora a dubitare che Galileo si fosse ingannato. Da ciò prese animo di posporre l' autorità di lui alla legittima della Geometria, dalla quale, interrogata, ebbe il responso di quel teorema, che, in più maniere, e tutte concludentissime, confermava la verità dell' esperienza. Benchè la dimostrazione riuscisse, per via degli indivisibili, assai facile, com' apparisce dall' appendice *De dimensione Cycloidis,* nella seconda parte delle Opere geometriche, pur il Torricelli, ch' era così felicemente riuscito in un' impresa da' suoi grandi maestri creduta disperata, esultò della scoperta, annunziandola senza indugio, sulla fine del Marzo 1643, agli amici e agli stranieri. Ciò che rispondessero questi, ossia i Francesi, ai quali non riusciva la cosa punto nuova, si dirà altrove, per trattenerci ora a narrare qual effetto producesse nell' animo, e nella mente dei nostri Italiani.

Il Cavalieri si rimase passivo da uno stupore molto simile a quello di colui, che, avendo intorno a un segreto ritrovato scarso ogni sforzo delle mani e delle braccia, veda entrare un altro ad aprirlo col dito, a un legger tocco di molla. Trasparisce un tal sentimento da ciò, che il dì 23 Aprile 1643 così rispondeva all' annunzio: « Finalmente ho sentito nell' ultima sua la misura dello spazio cicloidale, con molta mia maraviglia, essendo stato sempre stimato problema di molta difficoltà, che straccò già il Galileo: siccome io pure, parendomi assai difficile, lo lasciai andare, ond' ella ne averà non poca lode di questo, oltre le tante sue maravigliose invenzioni, che gli daranno eterna

fama. Non resterò poi di dirle intorno a questo che il signor Galileo mi scrisse una volta di avervi applicato quarant' anni fa, e che non aveva potuto trovar niente, e che s' era persuaso che il detto spazio fosse triplo del circolo suo genitore, ma che poi gli pareva che non fosse precisamente, se mal non mi ricordo, poichè, per quanto abbi cercato nelle mie scritture, non ho mai potuto tal lettera ritrovare. Sicchè, se sta, come mi pare di ricordarmi, bisogna che esso molto s' ingannasse a credere che fosse altrimenti che triplo » (MSS. Gal. Disc., XLI, fol. 171).

Ma il Nardi si pentì di avere a così bella e facile contemplazione lasciato altrui correre il campo, in cui, trovandosi ora a dover fare da respigolatore, si studiò di portarvisi da par suo. E come il Roberval alla desiderata quadratura s' agevolò la via con la invenzion della comite, così il Nostro inventò al medesimo effetto una cicloide nuova, in tale artificioso modo descritta, che l' eccesso CFHAGC di lei (fig. 304), sopra il triangolo CAD, fosse uguale al semicircolo genitore. Di qui essendo manifesto che tanto questa curva, quanto la volgare CFEA, circoscrivono uguale spazio, benchè con andamento diverso, e dall' altra parte sapendosi con certezza che il triangolo al semicircolo è doppio; immediatamente si conclude il tutto dover esserne triplo.

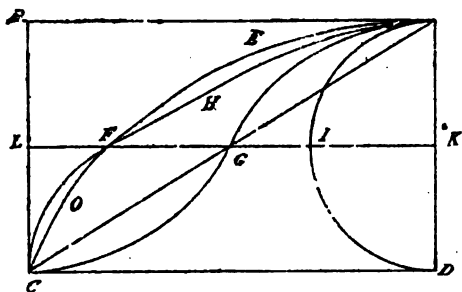



Figura 304.

Nè qui, per confermare altri esempi, è da passare inosservato l' incontro, senza dubbio fortuito, del Matematico francese col Nostro, il quale notava come i seni del semicircolo applicati sopra la diagonale AC terminano di fuori nella cicloide nuova, ma, applicati sulla cicloide volgare, terminano di dentro in una curva, simile a un *S* inclinata, che evidentemente è la comite robervalliana.

Furono le inclinazioni del Nardi, come negli altri studi geometrici così in questo, secondate dal Ricci, il quale dette anzi alla linea, vagheggiata fin qui solitaria, una nobile famiglia di curve, che gli piacque chiamar *cicloidali*. Nel Settembre del 1645 conferiva col Torricelli queste sue nuove speculazioni, dicendogli che rimaneva in dubbio da qual principio far ad esse curve dipendere la *limitazion* necessaria. Che del resto, « quanto a quel che ella dice, scriveva all' amico e al maestro, che la lor quadratura è troppo recondita, pare a me che sia teorema non dispregevole il dire che in tutte le suddette figure l' eccesso della cicloidale, sopra il triangolo, sia uguale alla figura genitrice. E V. S. non si maravigli se queste figure non osservano le leggi delle cicloidali considerate da lei, perchè a quelle son come genere alla sua specie, e sarebbe strano allora che le osservassero, ovvero che le cicloidali di V. S. non avessero le condizioni generali delle figure da me considerate. La facilità, o diciamo la sincerità della mia *definizione*, che scopre a

prima vista tutto il segreto, sappia V. S. che è stata procurata da me, piacendomi assai più di rendere facilissime le cose, dove gli altri hanno affettato l'oscurità, o che non hanno saputo ritrovare il suo natural principio; che di renderle oscure, perchè altri ammiri in questa oscurità quel che non ci si trova » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 138).

Quel principio generale poi, o quella limitazion necessaria, che il Ricci fra il dubbio ricercava, pensò di stabilirla, definendo le relazioni fra la figura genitrice ECDB (fig. 305) e la generata AXC in modo, che tutto il perimetro CDB, alla sua parte EC o CD, avesse la proporzion medesima che la AB, alla EG o alla DF, questa e quella supposte parallele alla base. Se dunque si costruisce sopra i lati AB, BC il rettangolo MB, e sopra la AM la figura MHIA, uguale e simile alla CEDB, e le due ordinate GE, FD sian condotte equidistanti dal centro O; avremo, per la fatta supposizione, AB : EG = BEC : EC = HE : EG. Dividendo, HE : HG = BEC : EDB = BEC : CED = AB : FD. Ma HE = AB, dunque HG = FD, d'onde GE = IF.

Figura 305.

Con queste medesime ragioni dimostrandosi che tutte le altre infinite ordinate, prese a coppia a coppia a ugual distanza dal centro O, son tagliate dalla cicloidale in parti contrariamente uguali; se ne concluderà l'uguaglianza de' trilinei CMIAC, CFABEC, ciascun de' quali sarà perciò la metà del quadrilineo CMIABEC. Ma questo quadrilineo è manifestamente uguale al rettangolo MB, di cui è metà il triangolo ABC; dunque un tal triangolo e il trilineo corrispondente sono uguali, e perciò l'eccesso dello spazio cicloidale, sopra il detto triangolo rettilineo, uguaglierà lo spazio della figura genitrice.

Suppongasi ora che questa figura sia un mezzo cerchio, la semicirconferenza del quale sia stesa nella dirittura AB. La curva AXC sarà allora una cicloide primaria, essenzial proprietà della quale è, non solamente l'uguaglianza tra AB e BEC, ma tra GE ed EC, da cui vien ordinata la proporzione AB : GE = BEC : EC. Dunque anche la cicloide primaria è generata al modo delle altre curve, secondo la data definizione, e dovendo necessariamente esser proprio di lei quel che delle altre sue congeneri s'è dimostrato; l'eccesso dunque dello spazio cicloidale, sopra il triangolo ACB uguaglierà il semicircolo, e tutto intero esso spazio cicloidale a quel medesimo semicircolo sarà triplo.

Una tale uguaglianza tra la base e il perimetro del circolo genitore, e tra qualunque ordinata e l'arco intercetto, a partire dal vertice, passa anche in tutte le cicloidi secondarie, allungate che siano o contratte, e perciò di esse

pure, come appartenenti alla famiglia delle curve descritte, sarà vero che l'eccesso dello spazio sopra il triangolo uguaglia la superficie del semicerchio.

È da notare però che il Ricci non segue queste vie dirette, ma le oblique, riducendo le sue dimostrazioni agli assurdi, e ciò forse con l'intenzione di supplire al difetto, in cui aveva il Torricelli lasciata la scienza delle cicloidi secondarie, confermandone la verità dei principii e delle conseguenze anche nella mente di coloro, che non avessero accettata la dottrina degl'indivisibili. Nello scolio infatti all'appendice *De dimensione cycloidis* s'annunziano tre teoremi, ne' quali si suppone che lo spazio di qualunque cicloide si componga d'un triangolo e d'un bilineo, ambedue i quali presi insieme pareggino il triplo del semicerchio. Chiamati T il triangolo, B la sua base, R il raggio del circolo genitore, S lo spazio cicloidale, resulta dalle proposizioni del Ricci $T = B \cdot R$, $S = B \cdot R + \pi R^2$, onde $S : T = B \cdot R + \pi R^2 : B \cdot R = B + \pi R : B = 2B + 2\pi R : 2B$, che conferma la verità del primo teorema torricelliano, annunziato a pag. 92 della seconda parte delle Opere geometriche. Il secondo, chiamato C il circolo, trova espressa la sua verità dalla seguente equazione: $S : C = B \cdot R + \pi R^2 : \pi R^2 = 2B + 2\pi R : 2\pi R$. Il terzo finalmente, ritenute le denominazioni di sopra, e per S', B', R' intendendosi il secondo spazio cicloidale, la sua base e il raggio del circolo genitore; si conclude facilmente così, dai principii dimostrati dal Ricci, $S = B \cdot R + \pi R^2$, $S' = B' \cdot R' + \pi R'^2$, onde

$$S : S' = R\,(B + \pi R) : R'\,(B' + \pi R') = 2R\,(2B + 2\pi R) : 2R'\,(2B' + 2\pi R').$$

E perchè 2 R, 2 R' son de' due spazi le respettive altezze, è patente che *cuiuscumque cycloidalis spatii, ad quodlibet spatium cycloidale, ratio componitur ex ratione altitudinis ad altitudinem, et ex ratione dupli basis cum periphaeria genitrice, ad duplum basis cum periphaeria genitrice,* come annunziava il Torricelli, tacendone la dimostrazione, perchè, essendosi messo per vie tanto più lunghe di quelle del Ricci, diceva che l'appendice gli si sarebbe trasformata in un libro.

Comuni essendo del Matematico di Arezzo e di quel di Roma gli studi, nemmeno in pubblico volevano andar separati, e perciò il Nardi, riformando nella seconda Ricercata geometrica il discorso intorno alla Cicloide, e facendolo copiare per darlo alle stampe; soggiungeva dopo le sue le speculazioni del Ricci, che trascriviamo qui con fedeltà e con amore, riducendole nella nostra Storia come gemme preziose, che la Scienza italiana viene ora per noi ad aggiungere al suo ricco monile.

« Del rettangolo BD (nella figura 304 qui poco addietro) sia un lato CD uguale alla circonferenza del mezzo cerchio AID, di cui il diametro sia l'altro lato AD del rettangolo. In questo intendasi la mezza cicloide COEA, qual viene disegnata dal punto A, mentre il mezzo cerchio si ruzzola una volta sopra il piano CD. Quando dunque il mezzo cerchio abbia trascorso la

metà di DC, si troverà il punto A in F, il qual punto F tanto più oltre della metà trovasi di DC, ovvero della uguale KL, quanto è il semidiametro IK: da che raccogliesi essere KF uguale alla retta IK, ed alla quarta parte di periferia cioè a ID. Con lo stesso metodo bisogna investigare gli altri siti in altre date distanze. »

« È poi stato da altri insegnato che lo spazio della cicloide CEAD è triplo del mezzo cerchio AID, da cui descrivesi, e per dimostrar tal conclusione serve ancora una nuova, e forse piu naturale cicloide da noi inventata, la cui origine è questa: Del mezzo cerchio AID sia diametro AD, e dagli estremi di esso diametro si partano le tangenti AB, DC, delle quali ciascuna si agguagli alla periferia AID. Intendasi poi la retta AD moversi, senza mutare inclinazione, sino a che arrivi in BC, onde descrivasi il rettangolo BD, e nello stesso tempo A trascorra con moto eguale la retta AD, dall'accoppiamento de' quali due moti si descriva la retta AC, e finalmente da ogni punto di AC si continui verso BC una retta posta in dirittura con la sua corrispondente ed eguale nel mezzo cerchio. E così per esempio la retta FG sia a dirittura con la sua corrispondente ed eguale IK. Dunque tutte le ordinate nel mezzo cerchio s' agguaglieranno a tutte le ordinate nella figura CFHAG, e l' altezza è uguale; adunque il mezzo cerchio s' agguaglierà alla figura suddetta, ed in quella trasformerassi. Il triangolo poi ADC è duplo dello stesso mezzo cerchio, come nella misura del cerchio insegnammo, e ora piacemi anche in quest' altro modo provare, acciò si osservi la varietà delle invenzioni. Intendasi ad un cerchio circoscritto qualsivoglia regolar poligono, e siano il cerchio e il poligono basi co' loro perimetri di una superficie di cilindro e di prisma retti, quali abbiano per altezza il semidiametro del cerchio. Adunque sarà la superficie del prisma il doppio del poligono, e ciò è vero in infinito, sino al trasformarsi il poligono in cerchio, e la superficie del prisma in cilindrica. Adunque di nuovo, per le cose mostrate, la superficie cilindrica sarà anch' essa doppia del cerchio. Questa superficie poi s'agguaglia, come altrove provammo, ad un rettangolo, di cui un lato sia il semidiametro, l' altro lato il perimetro del suddetto cerchio, e del medesimo rettangolo è metà un triangolo rettangolo, che abbia seco comuni i lati comprendenti l' angolo retto. Adunque tal triangolo o il suo uguale ACD s' agguaglierà al cerchio predetto, ossia a due mezzi cerchi AID. Adunque tutta la mezza cicloide sarà tripla dello stesso mezzo cerchio. »

« Qui considerisi come, dal rivolgersi una volta il perimetro del quadrato sopra di una linea retta, descriverassi una figura composta di due triangoli, e di tre quarte di cerchio. Di queste le due estreme hanno per semidiametro il lato del quadrato, e la di mezzo ha il diametro dello stesso. Appellisi tal figura *Cicloide falsa*. Negli altri regolari poligoni il simile proporzionalmente avviene, ed osservisi che dagli isoperimetri al cerchio descrivesi maggiormente la linea curva, e tanto più quanto meno numero di lati ottengono. Ma quanto più s' avvicinano alla condizione del circolo i poligoni, col numero e con la parità de' lati, più regolare la formano. Ma i contrari a questi la

formano più sregolata, sebbene tutti la formano di porzioni circolari, una meno di numero dei lati del descrivente poligono. »

« Or non è cosa mirabile che gli estremi dei cateti o semidiametri dei poligoni descrivano porzioni di cerchi e di periferia, e che gli estremi proporzionali del cerchio descrivano altre linee e figure! Notisi di più che nelle cicloidi, descritte da poligoni di numero pari di lati, le porzioni di cerchio sono impari, e la maggiore altezza è nel mezzo delle basi, e s'agguaglia al diametro del poligono. Ma negli impari poligoni le porzioni sono pari di numero, e l'altezza maggiore non è nel mezzo. »

« Di nuovo, nella figura 304, la curva AHFC rappresenti la linea della cicloide regolare e la curva AEFOC rappresenti la linea della volgare. La differenza consiste perchè, tirata FG parallela a BA, lato del rettangolo comprendente la mezza cicloide, sicchè seghi, prodotta, il diametro AC ugualmente; la volgare racchiude tra BAFG la regolare, e tra FGCD è racchiusa dalla stessa. Parimente la linea simile ad uno ʃ inclinato significa co' suoi punti i termini delle applicate nella volgare, ma i termini delle applicate nella regolare sono nella AC. La cagione poi di tal differenza scorgesi, per trovarsi nella volgare il diametro del cerchio descrivente essa cicloide (qual diametro si supponga parallelo ad AD) avanti CA, verso DC, mentre egli trascorra tra il punto G e il lato AD, ma tra il punto G e il lato BC è posto dopo, e solo nel punto G conviene l'uno e l'altro diametro. Quindi le applicate s'avanzano in una parte e si ritirano nell'altra, con la stessa proporzione, e dando in un luogo quanto tolgono nell'altro, mediante la condizione del cerchio, s'agguagliano tutte le applicate nella suddetta parte della volgare a tutte le applicate nella parte della nostra cicloide. E si osservi come anche sopra basi circolari si possono formare altre cicloidi, di che esempi non mancano nei moti annui e diurni dei mondani corpi. A queste considerazioni, per ultimo, aggiungeremo quest'altra del signor M. A. Ricci. »

« *Lemma I.* — Sia CPB (nella passata 305) una figura intorno all'asse PO, la quale manchi verso la parte P, e l'ordinatamente applicata COB le serva di base, in cui sian prese due porzioni uguali CK, LB, dagli estremi di essa C, B. S'alzino dai punti K, L le perpendicolari KE, LD, che seghino del perimetro EC, DB. Dico che EC, DB sono uguali, come si prova facilmente con la sopraposizione. »

« *Definizione.* — Sia BDC una figura intorno l'asse, che manchi verso la parte P, col cavo indentro, il convesso di fuori, e BC sia una delle ordinatamente applicate. Pongasi BA perpendicolare alla BC, e di che lunghezza si vuole, e nel perimetro della figura sia preso qualsivoglia altro punto E, e supponendo che tutto il perimetro BDC, alla parte CE ovvero CD, stia come AB all'EG, e siano GE, DF equidistanti alla BA; si formerà in tal maniera una figura AFGCEDB, la quale chiamo triangolo curvilineo; AB sua base, e la figura BPC figura genitrice. »

« *Lemma II.* — Sia dunque il suddetto triangolo curvilineo, con la sua genitrice BDC, ed al punto A della base AB sia eretta la AM, base della

figura MHA, simile ed uguale alla medesima genitrice. Si prendano nella BC le parti KC, BL, e si passino le HK, LI parallele alla BA, le quali seghino il triangolo in E, G; D, F, e la MHA ne' punti H ed I. Dico che FD sarà uguale a GH, e GE ad FI. Imperocchè DL, KE segano, per il primo Lemma, le parti BD, EC uguali: dunque BEC ad EC come AB ad EG, cioè HE ad EG. E per conversion di ragione, HE ad HG come BEC a BE, ovvero il suo uguale DC: e così AB a DF. Dunque HE ad HG come AB a DF. Ma BA, HE sono uguali, dunque ancora HG, DF, e conseguentemente i loro residui GE, FI, il che etc. »

« Proposizione. — *Supposte le medesime cose, dico che il triangolo curvilineo ACB sarà uguale all' altro ACM.* »

« Perchè altrimenti sarà maggiore o minore. Pongasi prima eccedente della quantità Y, e si divida con rette parallele alla BA il curvilineo parallelogrammo AHMCEB, finchè troviamo il parallelogrammo IADB minore della Y. Poi s' inscriva nei triangoli una figura composta di parallelogrammi curvilinei, egualmente con l' IADB alti, intendendo che per F passi la figura genitrice con la applicata perpendicolare alla BA, della qual figura, per il primo lemma, LDF ne segherà le parti uguali e congruenti FN, DB, che formeranno un parallelogrammo curvilineo inscritto: e similmente formeranno gli altri inscritti, come MHGS, facendo passar la genitrice figura per il puuto G. Ma questi curvilinei hanno le altezze uguali BL, KC, e le basi FD, GH pur uguali; dunque saranno uguali. Il simile proveremo delli altri parallelogrammi inscritti, egualmente lontani dalle basi AB ed MC. Dunque le inscritte figure ne' triangoli sono uguali e minori de' triangoli, ne' quali s' inscrivono. »

« Inoltre, il parallelogrammo curvilineo FX è uguale all' FR, per l' ugualità delle basi e delle altezze: XG al ZR, CG al ZB. Dunque l' eccesso della figura circoscritta al trilineo ACB, sopra l' inscritto nel medesimo, è uguale ad IADB, e minore di Y. Sarà dunque molto minore di Y l' eccesso dell' ACB sopra la sua inscritta, e però detta inscritta ancora eccedente l' altro triangolo, il che è impossibile, poichè si è provata minore del triangolo. Dunque ACB triangolo non è maggiore dell' altro ACM. L' istesso progresso ci varrà per dimostrare che ACM non sia maggiore di ACB, dunque sono uguali, il che etc. »

« *Corollario I.* — Essendo che facilmente si dimostra il curvilineo AMCB essere uguale al rettilineo parallelogrammo MB, segue che MB sia doppio del triangolo ACB curvilineo, e però uguale al rettilineo triangolo ABC, quando si giunga la retta AC. »

« *Corollario II.* — Perchè la figura AGCKB è uguale al triangolo curvilineo ACB, insieme con la figura genitrice, e il triangolo detto è uguale al triangolo rettilineo ABC; dunque l' eccesso della figura AGCKB, sopra il triangolo rettilineo ABC, sarà uguale alla figura genitrice. »

« Or noto che, ponendosi BDC essere un semicerchio, e la base AB uguale alla sua periferia; la AGCKB sarà una primaria semicicloide. Perchè allora sarà AB, a tutta la periferia BEC, come FD alla DEC, e però la parte

residua FI, ovvero AN, sarà uguale alla parte residua BD, ovvero FN, secondo la passione della Cicloide primaria. »

« Immaginiamoci poi sopra l'AB rivolgersi il semicerchio OHN (fig. 306), per descrivere col punto H una semicicloide primaria AHCB, ed il mezzo cerchio concentrico KGL, in quel moto, descriva, con uno de' suoi punti G, la semicicloide secondaria, di cui sia base DE, uguale all'AB. Mentre OH avrà calcata la parte AO, il punto concentrico avrà calcata la parte DL, con la sua parte GL, la quale è simile alla OH, per l'angolo GIL al centro comune. Dunque LGK a GK, ovvero OHN all'arco HN è come AB, ovvero DE, all'HR o al suo uguale OB, ovvero GF. Dunque EFS ad FS come DE a GF, ed è il punto S vertice della secondaria cicloide, DE sua base. Adunque tanto la cicloide primaria quanto la secondaria sono specie della figura da noi proposta nel principio, e per conseguenza l'eccesso della semicicloide, o primaria o secondaria, sopra il triangolo rettilineo, i lati del quale sono la base e l'altezza di detta semicicloide; è uguale al semicircolo genitore, il che etc. » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 951-59).

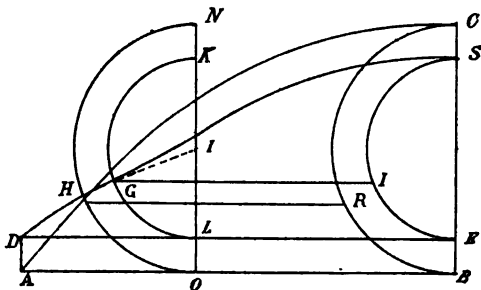



Figura 306.

In queste geometriche speculazioni del Ricci, il merito e l'importanza delle quali si conosceranno facilmente dai nostri Lettori, termina la storia de' progressi fatti in Italia intorno alla quadratura della Cicloide. Non si teneva però ancora per assoluta la scienza di lei, tuttavia rimanendo a definire le proporzioni, che passano tra i solidi rotondi generati dallo spazio cicloidale, e i cilindri a lui circoscritti. Ora è notabile questo passaggio dalla Geometria pura alla Stereometria, a che non pensarono punto da principio nè Galileo nè il Mersenno; ond'è a ricercar l'occasione, per cui dalle semplici superficie si venne, col proporre i solidi, a complicare il problema.

Quell'occasione dai recati documenti è manifesta: ella risale al teorema dal Niceron proposto a dimostrarsi ai Matematici suoi francesi, avutene in Bologna le conclusioni dal Cavalieri. Al Roberval dunque, tutto allora intorno alla Cicloide, cadde facilmente in pensiero che si potesse circoscrivere a lei un rettangolo, come intorno alla parabola, e il bel teorema nuovo venuto d'Italia, delle proporzioni che passano tra il fuso parabolico e il cilindro circoscritto, dette all'ingegnoso Parigino motivo di dimostrare intorno al solido cicloidale un altro simile, e non men bello e nuovo teorema. Anzi il giovanile ardor della mente lo portò a considerare che poteva farsi il rivolgimento non solo intorno alla base, ma intorno agli altri lati del rettangolo circoscritto, d'onde venissero a nascer solidi di varia forma e misura, tra' quali egli ebbe pure a trovare le proporzioni.

Di qui avvenne che, scambiatesi tra il Cavalieri e il Roberval le proposte, quegli le partecipasse non a Galileo solo, ma ai discepoli e agli amici compiute nel numero e nell' ordine dei quesiti, sempre confermando gli altri nella propria opinione, che cioè fossero così fatte proposte francesi problemi da risolversi in Italia, e non teoremi già dimostrati. Con questo falso concetto nella mente, da cui ebbero poi precipua causa i litigi che diremo, s' era il Torricelli messo all' impresa, nella quale aveva appena fatto il primo passo, che ne volle dare al Roberval l' annunzio, dicendogli com' avesse in cinque varie maniere dimostrata la misura dello spazio cicloidale. Ma del resto, soggiungeva il dì primo ottobre 1643, *quoad solida nihil habeo,* ond' è a narrare come e quando gli occorresse l' ambita invenzione, con la quale in mano lo vedremo tornare innanzi allo stesso Roberval, compiacendosi d' aver della Cicloide ritrovata tutta intera la scienza da lui proposta.

Venne anche questa volta la prima occasione dal Nardi, il quale, come si rammemoreranno coloro, che nel Cap. II del precedente nostro Tomo hanno letto il paragrafo IV; aveva dimostrato in che facile modo si potesse, con la regola centrobarica, ritrovar la misura del fuso parabolico rispetto al cilindro circoscritto. I problemi perciò dei solidi cicloidali, quali venivano proposti dai Francesi, vide bene esso Nardi che si sarebbero potuti risolvere con la medesima facilità, quando però si sapesse, come della parabola, il centro di gravità della Cicloide. Si poteva dentro lo spazio inscrivere un triangolo di pari base e altezza della curva, ma rimaneva tuttavia incerto il centro de' bilinei laterali, essendo la Cicloide volgare. Nella regolare però, novamente inventata, era quel centro manifestamente il medesimo che del circolo genitore descritto intorno all' asse, sopra il quale asse il centro di gravità del tutto, per i noti teoremi archimedei, necessariamente consegue da quello delle parti. Propostasi dunque questa sua Cicloide non ebbe il Nardi alcuna difficoltà in ritrovar la stereometria dei solidi rotondi, con quel metodo centrobarico, di cui fu egli il primo a farne, in così fatti quesiti, l' applicazione, sia direttamente dal centro di gravità desumendo i solidi e le superficie dei rivolgimenti, sia conversamente da' solidi e dalle superficie revolute desumendone i centri.

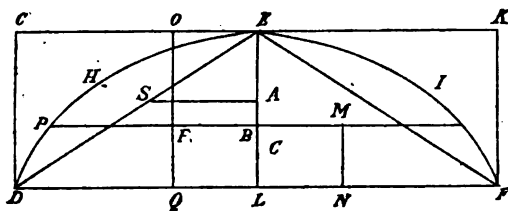



Figura 307.

Abbiasi la Cicloide nardiana DHEF, (fig. 307) col vertice in E, e con la base DF, dal mezzo L della quale s'alzi perpendicolarmente LE, asse della figura e diametro del circolo genitore, di cui il centro A sarà, per la natural costruzione della curva, centro di gravità de' bilinei laterali, i quali uguagliano, per le cose già dimostrate, la superficie dello stesso circolo genitore. Se CE è doppia di CL, avverrà in C il centro di gravità del triangolo DEF, onde il centro di tutto lo spazio cicloidale sarà in B, talmente situato, che

AB abbia a BC la proporzione di due a uno, come reciprocamente ha tal proporzione il triangolo ai due bilinei insieme, o al circolo solo. Che se dividasi LE in 36 parti uguali, AL sarà di queste parti 18, LB 14, e BE 22.

Sia circoscritto ora alla cicloide il rettangolo GF, e si rivolgano ambedue le figure intorno alla DF loro base comune. Verrà da così fatto rivolgimento generato un solido rotondo, che chiameremo S, e che, secondo la regola guldiniana dallo stesso Nardi confermata con le ragioni della Geometria, è uguale a un prisma avente per base il piano cicloidale, e per altezza la circonferenza ridotta in dirittura, e quale si descriverebbe dal raggio LB, distanza del centro di gravità di esso piano dall'asse della revoluzione. Sarà nello stesso tempo generato un cilindro C, uguale per le medesime ragioni a un parallelepipedo avente per base il rettangolo GF, e per altezza la circonferenza descritta dal raggio AL, cosicchè, dietro le equazioni $S = DHEIF \,.\, 2\pi BL$, e $C = GF \,.\, 2\pi\, AL$, potrà scriversi la proporzione $S : C = DHEIF \,.\, BL : GF \,.\, AL$, la quale, essendo lo spazio cicloidale al rettangolo circoscritto come 3 a 4, e $BL = 14$, $AL = 18$; si riduce alla proporzione definita in numeri $S : C = 3 \,.\, 14 : 4 \,.\, 18 = 7 : 12$.

Se il rivolgimento si facesse intorno alla GK, tangente il vertice, è manifesto che rimarrebbero le cose come di sopra, eccettuato che il prisma, a cui s'uguaglia il solido cicloidale, invece di aver per altezza la circonferenza di LB, avrà quella descritta da EB, e la proporzione si trasformerà nella seguente $S : C = DHEIF \,.\, EB : GF \,.\, AE = 3 \,.\, 22 : 4 \,.\, 18 = 11 : 12$. Che se invece si supponga rivolgersi le figure intorno alla GD, parallela all'asse, i solidi rotondi che indi nascono uguaglieranno due prismi aventi la medesima altezza, perchè le distanze de' centri di gravità dall'asse tornano uguali: ond'è ch'essi rotondi staranno come le rispettive basi prismali, cioè come 3 a 4.

Di conseguire con un tal metodo la proporzione de' solidi intorno l'asse non era speranza, bisognandovi il centro di gravità della mezza cicloide, ignoto al Nardi, così nella sua, come nella volgare. Ond'è che soli questi tre problemi fece, così come noi gli trascriviamo, mettere nelle *Scene*, per poi ridurli ai loro luoghi insieme, con le altre matematiche invenzioni, e pubblicarli nelle sue Ricercate:

« Sia la Cicloide nostra, che *regolare* nominiamo, DHEIF, nella medesima figura, di cui la base DF, la sommità E, l'asse EL, ed in essa descrivasi il triangolo DEF, e intorno alla stessa il rettangolo GF. Ora, posto essere EL 18, sarà la metà sua AE 9, ed il punto A sarà centro delle due porzioni DHE, FIE, come per le cose altrove dimostrate, si può intendere. Ma posta EC 12, sarà il punto C centro del triangolo DEF. E perchè questo, alle due porzioni, ha la ragione di due a uno; sarà EB, posta 11, centro della Cicloide. »

« Dunque il cilindro, nato dalla revoluzione del rettangolo intorno a DF, al solido, nato dalla revoluzione della Cicloide intorno alla stessa DF, sarà come 12 a 7. Ma intorno a GE sarà come 12 a 11, e intorno a GD come 4 a 3. « (Mss. Gal. Disc. T. XX, pag. 149).

Fu la nuova invenzione del Nardi prima, che a ogni altro, comunicata al suo carissimo Ricci, il quale facevagli osservare che l'ultimo dei tre teoremi si verifica anche nella Cicloide volgare, essendo il solido, nato di lei mentre ch'ella si rivolge intorno al lato del rettangolo parallelo all'asse, al cilindro circoscritto, come l' una all' altra figura genitrice, cioè come tre a quattro, ossia, secondo che egli diceva, in ragione subsesquiterza. Di qui avvenne che il Nardi, ai tre teoremi relativi alla sua cicloide nuova, v' aggiungesse il quarto relativo alla cicloide antica, nell' annunziargli che fece al Torricelli, il quale, credendo che fosse quell' osservazione sovvenuta allo stesso Nardi, gliene volle rendere pubblica testimonianza, quasi in segno di gratitudine verso colui, che avevagli aperta e dimostrata la via, da giungere al termine desiderato. Che altro infatti gli rimaneva, per risolvere i problemi venuti di Francia, se non che a ritrovare il centro di gravità della cicloide, coraggiosamente affrontando quelle difficoltà, innanzi alle quali s' erano arretrati, o l'avevano tentate solamente di traverso, gli amici suoi pur così valorosi? Come riportasse il Torricelli di ciò lieta vittoria fu veduto nella proposizione LVI, scritta da noi nel capitolo V qui addietro, nella qual proposizione l'Autor dimostrava che il centro di gravità della Cicloide così divide l'asse, che la parte al vertice stia a quella verso la base, come sette sta a cinque.

Or s' intenda nella solita figura 307, disegnata in DHEIF la cicloide volgare, col suo baricentro in B. Essendo EB = 7, BL = 5, e AL = 6, non rimane a far altro che a sostituire questi numeri nelle formule già poste dal Nardi, le quali, per i solidi intorno alla base si riducono a $S : C = 3 . 5 : 4 . 6 = 5 : 8$, e per i solidi intorno al lato opposto alla base a $S : C = 3 . 7 : 4 . 6 = 7 : 8$. Il primo de' quali teoremi, tralasciando l' altro perchè facilissimo con somiglianti metodi a dimostrarsi, si legge manoscritto così, in fine al trattatello torricelliano della Cicloide:

« Solidum cycloidale circa basim revolùtum ad cylindrum circumscriptum est ut 5 ad 8. «

« Esto cycloidale spatium DHEIF, cuius axis EL, centrum gravitatis B, rectangulùm vero circumscriptum sit GF, ipsiusque centrum gravitatis sit A. Demonstratum iam est NL ad BL esse ut 6 ad 5, et spatium GF, ad spatium DHEIF, esse ut 4 ad 3. (Hoc in appendice ad libellum *De dimensione parabolae.*) »

« Convertatur iam utraque figura circa basim DF, habebitque solidum ex DHEIF, ad cylindrum ex GF, rationem compositam ex ratione figurae planae DHEIF ad rectangulum GF, nempe ex ratione numeri 15 ad 20, et ex ratione distantiarum BL ad AL, nempe ex ratione 20 ad 24. Ergo solidum cycloidale circa basim, ad cylindrum sibi circumscriptum, erit ut 15 ad 24, sive in minimis ut 5 ad 8, quod ostendere volebam. » (ibid., T. XXXIV, fol. 278).

De' solidi intorno alla GK parallela alla base dicemmo come il Torricelli ne lasciasse a concludere facilmente la proporzione di 7 a 8, richiamandosi al teorema del Nardi, per i solidi nati dal rivolgersi le due figure in-

torno al lato GD del rettangolo circoscritto. Rimaneva, per aver questo trattatello cicloidale compiuto, a ritrovar la proporzione che passa tra il solido e il cilindro generati ambedue dalla rivoluzione intorno all'asse, ciò che non potevasi con l' intrapreso metodo conseguire, senz'aver prima determinato il punto, in cui la mezza cicloide concentra il suo peso. Da B condotta una parallela alla base, era certissimo che doveva sopra questa linea cadere quel punto, ma a qual distanza precisamente dall'asse pareva difficilissimo, per non dire impossibile, a dimostrare. E nonostante volle il Torricelli far credere di avere anche di ciò certissima matematica dimostrazione, dalla quale, per l'applicazione della Regola guldiniana, conseguiva essere il solido della mezza cicloide, al cilindro circoscritto, nella proporzion medesima di 11 a 18. Troviamo una tal presunzione espressa in pubblico nel documento che citeremo e in un estratto di lettera privata a Raffaello Magiotti, a cui il Torricelli stesso così diceva:

« Il solido della Cicloide rivolta intorno all'asse, al cilindro circoscritto, è come 11 a 18, dimostrazione difficilissima. Il solido *circa basim,* al suo cilindro è come 5 a 8 è più facile. Pur l' una e l' altra si trova per via di meccanica, trovato prima il centro di gravità della figura genitrice, in che linea stia, or parallela alla base, che è difficilissimo, ed or parallela all'asse, che è peggiore. »

« Trovato questo centro, ho poi la dimostrazione dei solidi. La proposizione è questa: *Date due figure piane* DK, (nella ultima figura 307) *di cui sia centro A, e DETF, di cui sia centro M, e si rivolgano intorno all'asse DF; il solido di DK, al solido di DEIF, avrà proporzione composta della figura DK alla DEIF, e della distanza AL alla distanza MN.* Però, supposta questa proposizione che da me si dimostra, (come si vede nella proposizione XII *De momentis,* da noi ordinata nel capitolo precedente) o per dirla è piuttosto invenzione d'altri che mia, e trovato i centri della cicloide e semicicloide, sapendosi già la proporzione delle figure piane e la proporzione delle distanze dall'asse; si trova la proporzione composta, che è quella dei solidi. La dimostrazione del solido *circa basim* l'ebbe il signor Nardi e il signor Ricci dal 1644. » (ivi T. XL, fol. 23).

Erano di una tal dimostrazione in gran desiderio i due amici, specialmente dietro quel che avevano letto fra le varie Opere geometriche, nello Scolio alla proposizione XVIII del primo libro *De motu gravium,* in fine al quale Scolio, dop'aver detto il Torricelli che ometteva la dimostrazione delle tangenti, de' solidi e de' centri di gravità degli spazi cicloidali, *ad evitandam molem,* soggiungeva in tal guisa: « Satis sit interea lectorem hic admonuisse quod, si Cycloidis spatium circa basim convertatur, erit solidum ad cylindrum circumscriptum ut 5 ad 8: si vero circa tangentem basi parallelam ut 7 ad 8. Centrum Cycloidis axem secat, ita ut partes sint ut 7 ad 5. Demonstratur etiam ratio solidi circa axem, ad cylindrum circumscriptum: item in qua linea axi parallela sit centrum semicycloidis. Clar. vir Antonius Nardi ostendit quod, si cyclois circa tangentem axi parallelam convertatur,

solidum ad suum cylindrum erit subsesquitertium. » (pag. 121, 22). Le quali parole leggendo il Ricci nel settembre del 1644 ringraziava l'Autore dell'avergli donato il libro, in cui trovava tutte quelle proposizioni ammirabili, facendogli questa osservazione. « Ho poi veduto citare una proposizione tale: *Il solido nato dalla Cicloide, girata intorno una tangente all'asse parallela, del suo cilindro è subsesquiterza:* cosa dimostrata da me fin da principio che sentii nominar la Cicloide, e, per la facilità con che si dimostra, non ne ho mai fatta stima veruna. » (MSS. Gal. Tom. XLII, fol. 50).

Non deve averne fatta grande stima nemmeno il Nardi, per cui non pensò di avvertire il Torricelli che il teorema del solido intorno alla tangente parallela all'asse era del Ricci. Il sentirsi ora attribuire cosa di sì poco momento; senza far motto del metodo ch'era proprio suo, avuto il quale, il merito del Torricelli non riusciva che secondario; deve essere dispiaciuto al Nardi, il quale però non fece, che da noi si sappia, di ciò lagnanza con nessuno. Rimase perciò nell'animo dello stesso Torricelli dell'ambita invenzione la compiacenza intera, la quale venne nonostante a diminuirsegli da un'altra parte, quando il Mersenno, a proposito della quadratura, gli soggiungeva in una lettera del dì 13 giugno 1644, aver il Roberval da qualche anno dimostrato che il solido cicloidale intorno alla base sta al cilindro circoscritto come 5 a 8.

Se fosse stata dal Matematico parigino ritrovata la proporzione anche fra gli altri solidi il Torricelli era incerto, ma pure si lusingava che no, fermamente credendo che il centro di gravità della Cicloide, e l'applicazione della regola centrobarica, non fosser cose note che a lui. Di qui è che all'unico teorema annunziatogli dal Mersenno aggiungeva la nota dei parecchi altri da sè dimostrati intorno alle proprietà della cicloide, nella qual nota mandata in Francia parve al Roberval di sentire alitarvi uno spirito di arroganza. Altre occasioni s' aggiunser poi ad irritare sempre più gli animi de' due matematici, che finirono per accusarsi obbrobriosamente a vicenda d'usurpazione e di plagio. — Ora imparo a credere, scriveva il Torricelli del Roberval, ch' ei non avesse la quadratura della Cicloide, *ma la prendesse dalla mia.* — E dop'aver minutamente raccontato come passassero le cose fra lui, e quei signori francesi, concludeva, invocando a suo giudice il mondo scientifico: *vedete che furto vergognoso hanno tentato di farmi!*

Il Roherval di rincontro, descritte l'arti degli invidiosi e degli emuli, da lui rassomigliati ai fuchi, che non sapendo elaborare il dolce miele, invadono i favi delle api: « his artibus, soggiungeva, ipsa trochoides, eiusque tangentes, et plana, sed et solida ferme omnia mihi erepta sunt. » (*De Trochoide.* Ouvr. cit. p. 343). E perchè non apparisse dubbio essere contro il Torricelli propriamente diretta l'accusa di furto diceva di serbare ancora le lettere di lui: di lui, *qui prae caeteris sapere videri volebat,* ed ebbesi al contrario, rispetto al solido intorno l'asse, scoperta la propria ignoranza, d'onde gli nacque nell'animo quella indignazione e quella rabbia! (ivi.)

S' ingerirono nella lite avvocati, difensori naturalmente delle ragioni dei

loro clienti, e prima uscì in francese un libretto intitolato *Histoire de la Roulette*, che per dargli anche maggior diffusione, fu tradotto in latino. Si voleva dimostrare in esso che aveva la Cicloide avuto in Parigi la nascita e l'educazione, e che perciò il Torricelli bugiardamente diceva esser sua figlia naturale quella, che in verità non era che adottiva. Carlo Dati, nella sua *Lettera a' Filaleti*, stampata in Firenze nel 1663 sotto il nome di *Timauro Antiate*, rispose alle accuse dello storico francese, che sentenziava senza recar documenti, con i quali in mano concludeva esso Dati col dire che, non dubitando punto della verità delle invenzioni robervelliane e del loro primato, si negava però che il Torricelli fosse giunto a ritrovar le medesime cose, dietro la notizia di quel che era stato fatto dagli altri.

L'apologia del Dati è pienamente confermata dalla nostra Storia, la quale ha già contato passo per passo i progressi fatti dalla scienza della Cicloide, prima in Parigi e poi in Firenze, dove le prime mosse furon date da Galileo. L'incertezze e le fallacie dell'esperienza meccanica essendo state tolte dal Nardi, venne da ciò a incorarsi la speranza della quadratura nel Torricelli, che riuscì a dimostrarla con feconda facilità, e con geometrica accuratezza. Persuasi da questo fatto i dubitosi Galileiani che il problema era solubile per ragioni di Geometria, il Nardi stesso vi s'applicò, immaginando la Cicloide regolare, la quale, per la facile invenzione del suo centro di gravità, dette modo al suo Autore di ritrovar con la regola centrobarica le proporzioni tra i solidi, e i cilindri circoscritti, rivolgendosi le figure ora intorno alla base, e ora intorno alla tangente all'origine e alla cima. Da ciò prese l'esempio il Torricelli di trattar col medesimo metodo la Cicloide volgare, e datosi a ricercare il centro di gravità di lei, e ritrovatolo esattamente, gli vennero con facilità conclusi per questa figura i tre teoremi de' solidi, che analogamente il Nardi aveva conclusi per la sua.

In Parigi l'ufficio di ostetricante fu fatto dal Mersenno, ma il parto lo dette alla luce il Roberval da sè solo, avuta da Archimede la dottrina degli indivisibili, e col teorema geometrico *Degli anelli* supplendo al servigio reso in Italia dal teorema del Guldino. Benchè dunque vari fossero gl'inizi, e vari gli istrumenti, è un fatto ormai dimostrato dalla Storia che si condussero i due Matematici a scoprire le medesime verità, senza che l'uno sapesse nulla dell'altro. E perciò si diceva che l'apologia del Dati era giusta, in quanto l'Autore difendeva il suo proprio amico e maestro dall'accusa d'aver rubato nulla allo straniero. Ma i Lettori imparziali sentono già nella loro propria coscienza che la giustizia non può dirsi intera, infintantoche non sia anche lo Straniero purgato dall'accusa di furto mossagli dal Nostro.

Il Dati manca di far ciò, e anzi conferma le ragioni, con le quali pretendeva il Torricelli che il Roberval si fosse appropriato il centro di gravità della Cicloide, e l'applicazione di lui al metodo di ritrovare i solidi rotondi. L'affezione doveva senza dubbio aver fatto velo al giudizio, ma è da aggiungere di più che il Dati non potè ascoltare, o non avrebbe forse avuta tanta sincerità di mente, da apprezzar le ragioni, che l'irritato Francese adduceva

per dimostrar ch' era suo il metodo inverso di concluder dai dati solidi il baricentro, e altre cose che si possono ora legger da noi fra le Opere robervalliane; nell' ùltima epistola stampata *ad Torricellium*. Di questa epistola sappiamo aver esso Dati fatto ricerca appresso il Ricci, a cui scriveva: « Mi par di sentire che m. Roberval già minacciasse di rispondere con una pienissima lettera a quella che scrisse il Torricelli sotto il dì 7 Luglio 1646, risentendosi dell'usurpato centro di gravità della Cicloide, la quale però non so se mai comparisse, nulla trovando fra le scritture di esso Torricelli, nè incontrando chi l'abbia veduta o sentita nominare. Onde supplico V. S. I. a compiacersi, per l'amore della reputazione dell'amico e della verità, a darmi non solamente notizia di questa lettera di m. Roberval, se però è nel mondo, ma avendola a farmene fare una copia. » (MSS. Palatini, Raccolta Baldovinetti n.° 258, fasc. 2°.) Ma nè il Ricci sapendone nulla, non potè il Dati esaminar le ragioni dell' imputato, le quali imparzialmente s' esamineranno ora da noi, facendo da' suoi principii derivare il processo di questa lite famosa.

IV.

Racconta il Torricelli come, ritrovandosi in Roma nel 1640, avesse occasione di conoscere il padre Giovan Francesco Niceron, de' frati Minimi, valentissimo matematico francese e pittore, con cui, anche trasferito che si fu a Parigi, mantenendo esso Torricelli qualche commercio di virtuosa amicizia, ciò dette opportunità di mandare al detto padre la nota di alcune sue invenzioni geometriche, proponendole semplicemente senz' alcuna dimostrazione. Erano fra quelle proposizioni, ridotte al numero di venti, incluse anche quelle del Solido acuto iperbolico, e della quadratura della Cicloide, che richiamarono particolarmente l' attenzione del Roberval, all' esame del quale le aveva il Niceron sottoposte, per mezzo del coufrate suo Marino Mersenno.

Nella ferma persuasione che non fosse la Cicloide nota altro che in Francia, ebbe il Roberval a maravigliarsi, ripensando in che modo fosse potuta pellegrinare in Italia, e, non trovando in che altro sodisfare la sua curiosità, sospettò che il Beaugrand, ne' suoi viaggi, ne avesse comunicata la notizia o a Galileo o al Castelli o al Cavalieri. In ogni modo la XIV delle dette proposizioni, cioè quella del solido iperbolico, gli parve tanto elegante, che volle applicarvisi a dimostrarla, in che felicemente essendo riuscito, si volse con lieto animo a ringraziare il Mersenno, che gli avesse fatto conoscere un tant' Uomo, da non posporsi, diceva, allo stesso Archimede, e degno di esser fatto conoscere al Fermat, e al Cartesio. Con queste enfatiche espressioni terminava una lettera latina indirizzata allo stesso Mersenno, il quale non indugiò a mandarne fedel copia a Firenze, rallegrandosi col Torricelli che fosse da que' dottissimi Matematici tanto applaudito. Il Torricelli corrispose con non minore ardore dell' animo, andando direttamente a ritrovare il Ro-

berval, e contraccambiandogli il titolo di Apollo dei Geometri. Con tali sentimenti scriveva a Parigi in una lettera latina, sottoscritta da Firenze il dì primo Ottobre 1643, ma fra gli amici si lagnava che si fosse il Roberval arrogato il primato della quadratura della Cicloide, e dicesse che il Beaugrand ne aveva recata la notizia in Italia: lagnanze, che il Cavalieri veniva a consolare nell'animo dell'amico con queste parole:

« Mi è giunto nuovo il nome del Robervallio, tuttavia non lo stimo io manco, mentre ella lo giudica soggetto eminente, il che non può essere di meno, avendogli dimostrate le cose che dice, e massime le sue maravigliose proposizioni.... Mi rallegro poi seco che la fama delle sue ammirabili proposizioni sia arrivata in Francia, sebbene mi dispiace che il detto Robervallio si arroghi il primato circa la Cicloide, o almeno che da esso sia venuta a notizia di V. S., e immeritatamente incolpa in questo il Beaugrand, quale non parlò di tal cosa nè a me, nè credo neanco al Galileo o al padre don Benedetto, quando venne in Italia, o scrisse mai, che io sappia, di tal cosa, poichè ne averei pure avuto qualche sentore. Fu bene il Nicerone, che propose a me tal quesito, al quale però non applicai, spaventato dalla lettera del Galileo, quale mi avvisava d'avervi pensato indarno molto e molto tempo, come credo che altra volta gli scrivessi. Se poi fosse il primo il Galileo a pensare a un tal quesito, o gli fosse proposto da altri, veramente non lo so.... È ben vero che, scrivendo ultimamente al p. Nicerone, gli dissi come V. S. aveva dimostrato la misura dello spazio cicloidale in tre modi, ma non accennai già qual fosse la proporzion ritrovata, nè altro mi ricordo di avere scritto colà, parendomi che da questo solo, come *ex ungue leonem,* potessero essere ragguagliati di qual sorta d' ingegni produca l' Italia, e che progressi farebbono, se qua vi fosse il fervore in questa scienza, che tra quei virtuosi e studiosi di Parigi » (MSS. Gal. Disc., T. XLI, fol. 177-81).

La causa tra' due competitori, nella quale, a favore del Torricelli, entrava, così, testimone di mezzo il Cavalieri; s' agitò da principio sommessamente, o come si direbbe dietro le spalle: in faccia il Roberval non si fece altro uscire dalla bocca, che queste parole: « In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec recte percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus » (Epist. Rob. ad Mersennum. Ouvrages cit., pag. 350): a che il Torricelli stesso rispondeva che una tal linea così *natura familiaris erat* (ivi, pag. 360), da non far maraviglia ch' ella fosse pubblicamente nota, senza che nessuno l' avesse mostrata, e voleva con ciò insinuare che le tradizioni erano ben più antiche e più universali di quelle, che correvano allora tra i Francesi.

Dicemmo che così passarono tra il Roberval e il Torricelli le cose sul principio, ma poi tornarono a rinfacciarsi acerbamente le accuse di plagio, quando ne' solidi e nel centro di gravità della Cicloide venne ad aggropparsi la lite, che ora a noi resta a enodare.

Ricevuta il Roberval la lettera da Firenze del dì primo Ottobre 1643, da noi sopra commemorata, ne sentì gran piacere, esprimendo questi suoi

sensi al Mersenno, il quale, dop' avergli significati al Torricelli in una lettera da Parigi del dì 13 Gennaio 1644, così soggiungeva: « Trochoidis vero naturam, vel ut vis Cycloidis, ita penetravit Robervallius noster nihil ut elegantius, vel profundius videris: eiusque solidum cum super base convertitur, ad cylindrum eiusdem altitudinis, demonstravit esse ut 5 ad 8 » (Lett. a' Filaleti, pag. 11).

Il Torricelli che pochi mesi fa, ritrovato il baricentro della Cicloide, aveva col metodo del Nardi dimostrato non solamente la proporzione tra il solido e il cilindro circa la base, ma circa le tangenti all' origine e alla cima, e anche, come si lusingava di far credere, intorno all' asse; per contrapporre a quella, che appariva aridità nel Francese, la sua vena feconda, prese, il di primo del Maggio 1644, in mano la penna. per annunziare al Mersenno, e mediante lui al Roberval la serie di questi teoremi, dal primo in fuori compiacendosi che tutti gli altri fossero sue proprie invenzioni.

« Solidum, quod fit a spatio cycloidali circa tangentem axi aequidistantem revoluto, ad cylindrum eiusdem altitudinis eiusdemque diametri, est subsesquitertium. Demonstratio non est mea, sed inventum demonstratumque fuit hoc ab Antonio Nardio, patritio aretino, olim Galilei amicissimo. Reliqua mea sunt. »

« Solidum, quod fit a spatio cycloidali circa tangentem basi parallelam revoluto, est ad cylindrum eiusdem altitudinis et diametri, subsesquiseptimum. »

« Solidum, quod fit a spatio cycloidali circa axem revoluto, ad cylindrum eiusdem axis et diametri, est ut 11 ad 18. Solidum idem circa axem, ad solidum circa basim, est ut circulus aliquis ad quadratum sibi circumscriptum. »

« Hinc est solidum etiam circa basim, ad cylindrum eiusdem axis et diametri, ut 5 ad 8. »

« Centrum gravitatis spatii cycloidalis axem ita dividit, ut pars, quae ad verticem, sit ad reliquam ut 7 ad 5 » (MSS. Gal. Disc., T. XL, fol. 42 ad tergum).

Presentata questa nota di teoremi al Roberval, i nostri Lettori, che hanno già vedute le cinque proposizioni, dimostrate da lui infino dal 1640 in questo medesimo soggetto, indipendentemente dalla Regola centrobarica, allora a lui forse ignota; possono indovinar facilmente che nulla gli dovesse apparire, fra quelle cose, nuovo, fuor che il centro di gravità della Cicloide, e il solido circa l' asse. Il teorema degli anelli dispensandolo dal pensiero di quello, e intorno a questo abbandonato ogni studio, per parergli la proporzione incommensurabile, confessò ingenuamente, e secondo il giudizio che poteva farne allora dietro quelle semplici enunciazioni, che il Torricelli l' aveva prevenuto nelle due dette cose, nel dimostrar cioè il centro cicloidale, e il solido circa l' asse, delle quali due dimostrazioni perciò ei generosamente lo riconosceva primo e prestantissimo autore. E così, come disse al Mersenno, così il Mersenno scrisse al Torricelli con queste parole: « qui, cum tuas postremas legisset, praedictum solidum, et centrum gravitatis tibi debere fatetur, qui primus invenisti » (Lett. a' Filaleti, pag. 12).

Ma si sentì il Roberval, ripensando a que' teoremi torricelliani, frugato da una gran curiosità di sapere com' entrasse il centro di gravità della Cicloide nelle proposizioni de' solidi generati da lei, per cui, non sapendo se l' invenzione apparteneva come l' altre alla Geometria, o resultava da qualche meccanica esperienza, il Mersenno, che anch' egli era incerto della risposta, interrogò in proposito il Torricelli, così soggiungendo dopo le riferite parole: « Dubitat noster Robervallius an mechanice tantum centra gravitatis Cycloidis inveneris, quae geometrice falsa suspicantur: docebis num ipsius rei demonstrationem habeas? » (ibid.). Che si debbano intendere queste dure frasi mersenniane come noi abbiam detto, non è dubbio, così avendole intese da principio anche lo stesso Torricelli, ma poi, perchè faceva gioco alla sua causa, le interpetrò troppo materialmente, facendo dire a' due francesi la stranezza che possa essere una cosa meccanicamente vera, e geometricamente falsa, quasichè la quadratura della cicloide, ritrovata meccanicamente dal Nardi, non fosse anche vera in Geometria, e quella di Galileo, errata nell' esperienza, anche alla Geometria non riuscisse ugualmente falsa.

Ma non interrompendo il filo della storia, vediamo come rispondesse il Torricelli interrogato se aveva esatta dimostrazione geometrica de' baricentri cicloidali, e del solido circa l' asse. Quanto ai primi fu largo, ordinando le proposizioni, insieme con la dimostrazione dei solidi rotondi, i quali stanno in ragion composta delle figure genitrici e delle distanze de' loro centri di gravità dall' asse della rotazione, tutto premettendo per lemmi al teorema del solido circa la base: e così disposto il trattatelo, quale si legge fra i manoscritti appartenenti ai discepoli di Galileo, nell' autografo e nelle copie del Viviani e del Serenai; lo mandò a Parigi al Mersenno, accompagnando la scrittura con una lettera, nella quale diceva: « Heri (24 Luglio 1644) ad me delatae fuerunt literae tuae, Vir clarissime, ideoque inter paucas horas propositiunculas, quas nunc mitto, composui conscripsique. Constitueram propositiones de centro grav. cycloidis, semicicloidisque, quas in mente tantum tenebam, nulli per aliquot menses communes facere. Attamen victus alteram earum mitto, nempe Cycloidis. Sileo alteram, cum ex ea pendeat demonstrationem solidi circa axem, victus autem fui, quando in illa verba incidi: Dubitat Robervallius noster geometrica ne, an aliqua mechanica ratione, demonstrationem habeas de centro gravitatis » (Lett. a' Fil., pag. 12).

Soprabbondando dunque nel rispondere alla prima parte della domanda, tacque il Torricelli affatto rispetto alla seconda, nè s' intenderebbe il perchè, se non si cominciasse fin d' ora a sospettare che il centro di gravità della semicicloide lo doveva aver davvero, non in altro che nella mente, non potend' essere nella realtà delle cose. Bastò nulladimeno al Roberval l' accenno, che dal detto centro della semicicloide dipendeva la dimostrazione del solido circa l' asse, come gli bastò la lettura delle rimanenti proposizioni, per intendere quale ingerenza avesse negli altri solidi il centro di gravità della Cicloide intera, d' onde vennegli giusto motivo di riformare, intorno all' Autore dei due detti teoremi, quel primo fatto giudizio: cosa che poi tanto dispiacque

a chi ci aveva interesse, qualificandola per una contradizione indegna, e per una meditata rapina.

Il Torricelli, come in questa apparisce e in molte altre parti della Storia, era troppo geloso, sospettoso e prepotente in rivendicare a sè quel che non aveva sempre ragione di chiamar suo, e nonostante avrebbe forse riconosciuto giusto o scusato almeno quel rivoltar giubba, siaci permesso il detto, se il Roberval gli avesse mandate a esaminare le sue cinque proposizioni, come l'altro aveva a Parigi mandato le sue. Tardi riconobbe da sè stesso il Roberval che sarebbe stato bene di far così, per evitare i litigi, e per assicurarsi la proprietà delle invenzioni, e pubblicamente ne disse sua colpa. « Negligentia mea, quod nihil praelo committerem, factum est ut quidam extranei nationis nostrae aemuli, vel potius eidem invidi,... multa mea mihi eripere conarentur, eaque sibi tribuere » (*De Trochoide*, Ouvrages cit., p. 343). E non solamente si sarebbe assicurato dai furti, ma avrebbe meglio provveduto ai progressi e agl'incrementi della Scienza, la quale perciò professa maggior gratitudine al Geometra nostro, che a lui. Eppure anche il Torricelli, temendo di andar troppo per le lunghe, non fece della maggior parte delle cose da sè dimostrate intorno alla Cicloide altro che un motto, il quale nulladimeno bastò a produrre il suo effetto, largamente diffondendosi da due centri impulsivi: in Italia dall'appendice *De cycloide*, in fine alla seconda parte delle Opere geometriche torricelliane; e in Francia dai *Cogitata phisico mathematica*, dov'è notabile che il Mersenno, a proposito dei solidi cicloidali, citi non il suo Matematico ma il nostro, forse perchè questi aveva aggiunto agli altri teoremi e dimostrato « solidum factum a spatio cycloidali circa axem revoluto esse ad cylindrum ut 11 ad 18, atque ideo rationem ineffabilem habere ad solidum circa basim, quippe quae componatur ex ratione 44 ad 45, et rationem circuli alicuius ad quadratum circumscriptum » (Mechan., Parisiis 1644, pag. 24).

Due anni dopo, nel 1646, era in tutto da que'Francesi mutata sentenza. Il Mersenno, scrivendo le *Riflessioni fisico-matematiche*, che l'anno appresso comparirebbero in Parigi alla luce, cantava la palinodia, sostituendo al sottilissimo Torricelli il chiarissimo Roberval, che si proclamava primo e solo autore della Trocoide, della quadratura, e de'solidi di lei, particolarmente di quello circa l'asse, che non sta altrimenti al cilindro circoscritto come 11 a 18, ma come tre quarti del quadrato della mezza base « si dematur tertia pars quadrati altitudinis, ad ipsum dimidiae basis quadratum » (Parisiis 1647, pag. 71). Il Roberval scriveva dall'altra parte, privatamente allo stesso Torricelli, essere dal Beaugrand pervenuta la notizia della quadratura della Cicloide in Italia; aver da gran tempo, per la ricerca de'centri di gravità, dati i solidi o le figure piane, il metodo universalissimo, e finalmente essersi scoperto che la proporzione di 11 a 18 era minor della vera, che si dava formulata dal Roberval in questa lettera nei medesimi termini, pubblicati poco di poi dal Mersenno nel detto libro delle Riflessioni.

Il sospetto, nato nel 1643, che si fosse dal Beaugrand recata la notizia

della Cicloide in Italia, torna ora pel Roberval, sotto l'aspetto di una certezza, aggiuntevi le particolari circostanze del fatto. Il Du-Verdus di Roma aveva ad esso Beaugrand mandati i tre modi di quadrar la Cicloide, quali si leggono stampati nell'appendice alla seconda parte delle Opere geometriche del Torricelli: e perchè il primo di que' modi aveva una certa somiglianza con quello seguito dal Cartesio, e che a' nostri Lettori è ben noto, ciò bastò al Roberval per dire che il Beaugrand aveva consegnato in mano di Galileo, e da questi era venuta nel Torricelli, quella dimostrazion cartesiana. Ma rispondeva a ciò il Torricelli con tali ragioni, che il Roberval stesso s'ebbe facilmente a persuadere non avere il suo sospetto e i suoi commenti nessuna corrispondenza col vero. Rispondeva: se la quadratura della Cicloide Galileo l'ebbe in mano dimostrata, come mai persistè in fino alla morte in dire che non la sapeva? Maggiore insistenza faceva il Nostro contro quel che il Francese diceva ora del baricentro cicloidale, contrapponendogli quel che aveva detto prima al Mersenno, e confessando di non sapere intendere come potesse il Roberval sospettar falsa geometricamente l'indicazione del detto baricentro, se era vero ch'ei ne avesse avuto certezza.

Notabile in questa lettera, pubblicata da Timauro Antiate a pag. 15, che il Torricelli non fa cenno di risposta a ciò che gli si rinfacciava aver egli data la proporzione tra il solido circa l'asse, e il cilindro circoscritto, non esatta. Sembra anzi gli si rintuzzasse da ciò così l'animo, da diffondere anche sopra gli altri punti della difesa un avvilimento, e una fiacchezza, simile a quella di un che sia rimasto stordito da un gran colpo, benchè minore ne dovesse sentir la ferita, per averlo previsto. Il Ricci, sotto il dì 23 Giugno 1645, fra le altre cose, gli scriveva: « Ho poi lettere del p. Mersenno, che saluta caramente V. S., e l'avvertisce come monsù de Roberval ha dimostrato che il solido, fatto dalla rivoluzione di una Cicloide intorno l'asse, non osservi la ragione di 11 a 18 verso il cilindro circoscrittogli, ma, posto che sia questo 11, il cilindro sarà più che 18 » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 155). La robervalliana dimostrazione di ciò è tanta parte di questa Storia, che dobbiam trattenerci ad avvolgere intorno a lei il filo del nostro discorso.

Entriamo nella segreta stanza, dove il Matematico parigino è con grande attenzione a leggere il manoscritto *Della cicloide,* venuto da Firenze, e indoviniamo i pensieri, che gli passano per la mente. La curiosità vuol prima di tutto sodisfarla rispetto al centro di gravità dello spazio cicloidale, e ora finalmente intende il perchè di un tal centro, e quale principale importanza egli abbia nella dimostrazione dei solidi rotondi. Ora è che si leva da quella lettura, per ricercar notizie, e per erudirsi intorno alla Regola centrobarica, con lieta maraviglia ripensando ai riscontri, ch'ella ha col suo proprio teorema degli Anelli. Al diritto, che da ciò glie ne consegue, non ha il tempo di pensar ora, che si vede messo sulla via d'intender quello che più gli premeva, come procedesse cioè il Torricelli a dimostrare il solido circa l'asse.

Ritorniamo anche noi indietro con l'occhio sopra la figura 307, dise-

gnata nel manoscritto torricelliano, e nella quale il punto B sull' asse indica il centro di gravità della Cicloide. Ha inteso il Roberval, e per la sua facilità anche ammirato il metodo ivi tenuto, per giunger dalla proporzione composta delle distanze BL, AL, e delle figure piane, a quella dei solidi, facendosi il rivolgimento intorno alla base. Volendosi per la medesima via riuscire a dimostrare i solidi circa l' asse, ben comprese come doveva il Torricelli attendere a ritrovare il centro di gravità della semicicloide, in che linea stia, ora parallela alla base, e ora parallela all' asse. Quanto alla prima, resultava dalle cose, già dimostrate per la Cicloide intera, dover essere la BP, ma la difficoltà stava nella seconda linea, da tirarsi parallela all' asse, la quale nonostante voleva far credere il Torricelli di averla trovata, benchè a tutti e sempre ne tacesse il modo e la ragione. Ma sia pure qual si voglia OQ la detta linea, ella dee necessariamente, per sodisfare alle posizioni, esser tale, da incontrare la BP in R, a una distanza RB dall' asse, che stia alla SA, come 22 a 27. Chiamati infatti S, C il solido e il cilindro circoscritto, generati dal rivolgersi la semicicloide DHEL e il rettangolo GL intorno ad EL, e stando i detti solidi in ragion composta delle figure piane, ossia di 3 a 4, e delle distanze BR, AS; è manifesto che, per aver la proporzione $S : C = 11 : 18$, dev' essere $RB = 22$, e $AS = 27$. Se ora la proporzione $RB : AS = 22 : 27$ dal Torricelli si dà per esatta, e tale ei la pretende, essendo AS la quarta parte della circonferenza, anche la circonferenza intera tornerà dunque esattamente per lui rettificata. Laonde ebbe qui il Roberval a dire: o questo Torricelli ha trovato l' impossibile, o vuol dare a credere ai Matematici cose non vere. Il dilemma era solubile assai facilmente, ma colui, che se l' era proposto, volle con ragioni geometriche assicurarsi della fallacia, dimostrando come la proporzione di 11 a 18 non si concilia con quest' altro teorema, annunziato così dallo stesso Torricelli, nella nota scritta al Mersenno: « *Solidum, quod fit a spatio cycloidali circa axem revoluto, ad solidum circa basim, est ut circulus aliquis ad quadratum sibi circumscriptum.*

Ma una tal proporzione l' hanno anche i respettivi cilindri circoscritti. Chiamato infatti C quello generato dal rivolgersi il rettangolo GL intorno ad EL, abbiamo $C = \pi\, DL^2 . EL$, e chiamato C′ l' altro cilindro, fatto dal rettangolo GF intorno a DF, avremo $C' = \pi\, EL^2 . 2\, DL$, donde $C : C' = DL^2 . EL : EL^2 . 2\, DL = DL : 2\, EL = \frac{DL . EL}{2} : EL^2 = 2\, DL . \frac{EL}{4} : EL^2$, ossia come il circolo che ha generata la Cicloide, al quadrato del diametro. Se dunque intendansi con S . A, S . B significati i solidi circa l'asse, e circa la base avremo $S . A : S . B = C : C'$.

Ritengansi ora per vere le date posizioni torricelliane $S . A = {}^{11}/_{18} . C$, $S . B = {}^{5}/_{8} . C'$: verrà da ciò ordinata la proporzione

$$S . A : S . B = {}^{11}/_{18}\, C : {}^{5}/_{8}\, C' = {}^{44}/_{72}\, C = {}^{45}/_{72}\, C',$$

giunto alla quale, il Roberval così ragionava: o non son veri i teoremi, che

il solido circa l'asse al solido circa la base sta come un circolo al quadrato del suo diametro, e che il solido circa la base è $^{45}/_{72}$ del cilindro circoscritto; o è falso che il solido circa l'asse sia $^{44}/_{72}$ del respettivo cilindro. Ma perchè i due primi teoremi son verissimi, dunque è falso il terzo, dando egli minor proporzione della vera, la quale dovrebbe essere non 44, ma $^{45}/_{72}$, com' è manifesto.

Cosi essendo, proseguiva addirittura il Roberval nel suo ragionamento, non è possibile che il Torricelli abbia avuto, come per la cicloide intera, l'indicazione esatta del centro di gravità della semicicloide dal legittimo magistero della Geometria, ma egli deve averla ricavata per approssimazione dall'esperienza; e credendo non si poter da nessuno dimostrare la ragione esatta, si confidò che nessuno avrebbe saputo scoprire che la sua era falsa. Così, come seco medesimo pensava, disse al Mersenno, e riferì al Torricelli, con queste precise parole, quello che aveva detto: « Quid ergo, iniquit Mersennus, dices de clarissimo Torricellio? nonne insignium adeo theorematum cognitionem ipsi te debere fateberis? — Faterer, respondi, si vera essent, at talia non esse certus sum. Miror sane quod vir talis falsum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud suspicari possum nisi quod ille mechanica quadam ratione, per approximationem, huiusmodi rationem, a vero non admodum longe aberrantem, invenerit, existimaveritque veram rationem non posse detegi, ac proinde suam haud veram esse a nemine posse demonstrari. » (Ouvrages cit. pag. 377-78).

Il sospetto era fondato sopra buone ragioni, nè qualunque sia tra i più gelosi della fama del Torricelli saprebbe secondo noi rispondere all'accusa: chi avrebbe creduto mai un così nobile geometra, *aliquid pure geometricum sine demonstatione affirmare voluisse?* (ibid. p. 394).

La dimostrazione del centro di gravità della semicicloide non l'abbiamo potuta trovare, per quanto abbiamo frugato, in nessuna parte dei manoscritti da noi consultati, eppure il Torricelli faceva conto di averla fra le sue carte, benchè a nessuno, o familiare o estraneo, riuscisse mai di vederla, e richiestone l'Autore ne sapeva uscir sempre con qualche scusa. Ma più che una scusa (ce lo perdoni il grand'Uomo) trasparisce l'arte di un furbo, per non dire la stizza di un imputato dal seguente poscritto, taciuto, per non esser forse conveniente a un apologista, da *Timauro Antiate*, nel trascrivere dalla bozza originale, e nel pubblicar la lettera intera: « Lecta iterum epistola cl. Robervallii et obsignata iam mea ad ipsum data, animadverto me nihil respondisse de solido cycloidis circa axem, sed neque responsum quodpiam dari necesse existimo. Tunc enim quisquam iure arguere poterit me, quando in paralogismos meos incidet. Habemus apud Archimedem, propos. II, *De circuli dimensione*, circulum ad quadratum diametri esse ut 11 ad 14: quaero ab ipso unde nam putet me habuisse rationem, quam ad numeros 11 et 18 reducebam? Si vero eo dicit, ut ego demonstrationes iterum ultro mittam, fallitur. » (MSS. Gal. Disc. T. XL, fol. 44).

E noi credemmo che si fosse rimasto il Torricelli di rispondere all'ac-

cusa dell'errore intorno al solido circa l'asse, perchè lo avesse riconosciuto, ora che da altri si vedeva scoperto. Abbiamo invece da lui stesso ora inteso che tuttavia persiste in far credere di aver la dimostrazione del centro di gravità della semicicloide, e del teorema stereometrico che ne consegue; che se non lo manda al Roberval, ne abbiamo udita la ragione, la quale, diceva il sagace Francese sentir *redolere totius epistolae acerbitatem.* Ma perchè in ogni modo non era possibile levar le accuse, senza mandar quella dimostrazione, e il Torricelli non la mandò mai, perchè non l'aveva, pensò che i suoi diritti si potrebbero ridurre almeno al centro di gravità della Cicloide, di che, lasciato il resto, si contentò di rivendicarsi il primato dell'invenzione. In tal proposito così scriveva il dì 14 luglio 1646 da Firenze, in una lettera al Cavalieri:

« Faccio sapere a V. P. come in questi giorni mi trovo due liti, una col Robervallio di Francia, il quale sfacciatissimamente e vergognosissimamente scrive aver avuto il centro di gravità della Cicloide, avanti che io gli mandassi la dimostrazione, e non solo il centro predetto della gravità della Cicloide, ma dice che anco aveva quel metodo, da me dimostrato e mandato da me in mano sua, dove io mostravo che, dato il centro di gravità e quadratura di un piano, si dà il solido. Esso l' ha rivoltata, e dice che aveva il metodo di trovare il centro di gravità, data la quadratura e il solido. »

« Quando avvisai in Francia la sola enunciazione di quel centro, dicendo che sta nell'asse segato come 7 a 5, il p. Mersenno mi scrisse una lettera piena d' iperbole di lodi, confessando che io ho prevenuto in questo il loro geometra Robervallio: mi prega a mandar la dimostrazione: mi dice che Robervallio ha dimostrato ogni cosa fuor che questa, mi dice che i suoi Geometri non credono queste cose si siano trovate, e parlando di Robervallio dice: *qui cum tuas postremas legisset, praedictum solidum et centrum gravitatis tibi fatetur debere, qui primus invenisti. Rogamus tamen an centrum gravitatis etc.* Ed in ultimo della lettera lunghissima scrive: *Dubitat noster Robervallius an mechanice tantum centra gravitatis Cycloidis, et semicicloidis inveneris, quae geometrice falsa suspicantur. Docebis num istius rei demonstrationem habeas.* E molte altre simili confessioni, le quali sono in una lunghissima lettera, che io ho stimato da quaresima in qua per persa. Finalmente, dopo moltissime diligenze l' ho trovata, ed ho scritto le mie ragioni in Francia, con copia delle lettere loro, e la testimonianza delle recognizioni, e quando occorrerà le farò riconoscere da otto o dieci letterati, e le stamperò con le ragioni mie. »

« L'altra lite l' ho col signor M. A. Ricci di Roma. Al suddetto signore mandai la dimostrazione da me adattata alle figure infinitamente lunghe di Robervallio, fin di marzo passato. Alla settimana passata io mandai al medesimo la stessa dimostrazione, applicata alla quadratura delle infinite parabole, in due modi. Quando aspetto che mi ringrazi, trovo che egli dice avere adattata ancor lui quella mia dimostrazione alla quadratura delle parabole, ed ora vi pretende il medesimo gius che ci ho io. Primieramente, la dimostra-

zione fondamentale è mia, senza controversia, ed egli lo confessa. Avanti ch'egli me ne dia motivi gli mando l'applicazione alle parabole, ed ora nella risposta mi dice che quella applicazione l'aveva e quel che più mi duole mi dice che già era accordato di stampar questa sua cosa nel libro, che uscirà presto del sig. Antonio Nardi. Dico il fatto mio all' uno e all' altro, cioè al Roberval e al Ricci. » (MSS. Gal. Disc. T. XL, fol. 138, 39).

L'essersela il Torricelli presa col Ricci, di cui si conoscono i generosi atti, e i nobili portamenti, quando prima cadde in sospetto di volersi appropriare i teoremi de' solidi conoidali, predispone i nostri lettori a credere che, come esso Torricelli ebbe il torto a risentirsi contro l'amico, così lo dovesse avere anche risentendosi contro lo straniero. Si faceva in questa seconda lite forte di due ragioni: prima, perchè il Roberval aveva indugiato due anni a rispondere; poi perchè avuto il metodo di dimostrare i solidi, dati i centri di gravità e le quadrature; pretendeva d'appropriarsi il metodo inverso di dimostrare il centro di gravità, dati i solidi e le figure piane, da cui sono essi solidi generati.

Ma il Roberval credeva di aver data sufficiente ragione di quell' indugio, attribuendolo alle difficoltà incontrate nel ritrovar la vera proporzione geometrica tra il solido circa l'asse, e il cilindro circoscritto. « Ne vero mireris quod tantum temporis in unico problemate solvendo consumpserimus, illud enim ex iis est, quae et longa inquisitione indigent, et acrem pertinacis geometrae requirunt operam, nec memini me aliuid unquam demonstrasse, quod cum eo conferri posset. » (Lettera a' Filaleti, p. 13). Il Torricelli invece attribuiva quell' indugio a ciò, che il Roberval si confidava dover essere andata in tanto tempo smarrita la lettera, mandata a Firenze dal Mersenno, per cui non si potessero contestare le contradizioni. Giustizia ora vuole che si tolga dal Francese una tale ingiuria, dimostrando ch' ebbe di fatto a penar così lungamente, com'egli dice, prima d'assicurarsi di aver propriamente ridotta all'esattezza geometrica la poco accurata proporzione torricelliana.

Alla dimostrazione, che si promette, porgono i documenti necessari le Opere robervelliane, per le quali troviamo in tre modi, e in termini sempre diversi assegnate le proporzioni tra il solido cicloidale e il cilindro circoscrittogli intorno all'asse. La cosa pare strana in sè, e tanto più rispetto alla verità geometrica, la quale non può essere che una sola, ma si comprende come ciò accadesse, ripensando che furono raccolti insieme dagli Editori parigini i trattati, rimasti inediti, e scritti dal loro Accademico in vari tempi, nella successione de' quali, esaminate meglio le cose, giunse finalmente a conquistare la verità, ravvedendosi dei primi errori. Di qui è che abbiamo, nei vari trattati robervalliani della Cicloide, segnate così l'orme dei passi, da creder facilmente lungo dover essere stato il tempo, che, per giungere al termine faticoso, venne a spender l'Autore.

Nel trattato *De trochoide* aveva detto il solido stare al cilindro *ut differentia inter quadratum quadrantis et* $^4/_3$ *quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiae* (Ouvrages cit. pag. 319): cosicchè, chiamati S il detto solido,

C il cilindro, e riferendoci alla figura 308, nella quale AC s'uguaglia alla mezza circonferenza, e CI è il raggio della ruota; sarebbe quella ragione espressa da $S : C = \frac{AC^2}{4} - {}^4/_3\,CI^2 : AC^2$. Questi termini però non riscontrano con quegli altri, che si deducono col calcolo, componendo insieme le proporzioni, che hanno i solidi generati dagli spazi compresi tra la cicloide e la comite, e tra la comite e l'asse, verso il cilindro circoscritto, che per ambedue manifestamente è lo stesso. Quanto a quel primo solido, che chiameremo S' « patet itaque (così conclude il Roberval la sua dimostrazione) continere portionem, quae ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem, quam ²/₃ quadrati semidiametri, ad quadratum semicircumferentiae » (ibid. pag. 322): conclusione, che scritta per simboli è tale $S' : C = {}^2/_3\,CI^2 : AC^2$. Dell'altro solido S'' descritto dalla comite nel rivolgersi intorno all'asse, dallo stesso Roberval si dimostra « ad cylindrum cui inscribitur eamdem rationem habere, quam dimidium quadrati semicircumferentiae rotae, dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semircumferentiae » (ibid. p. 332) ossia $S'' : C = \frac{AC^2}{2} - \frac{CF^2}{2} : AC^2$. Or da questa e dalla precedente omologa proporzione, in cui i secondi e quarti termini sono uguali, s'ha $S' : S'' = {}^2/_3\,CI^2 : \frac{AC^2}{2} - \frac{CF^2}{2}$, e componendo, $S' + S'' : S' = {}^2/_3\,CI^2 - \frac{CF^2}{2} + \frac{AC^2}{2} : {}^2/_3\,CI^2$. E però $S' + S'' : C = {}^2/_3\,CI^2 - \frac{CF^2}{2} + \frac{AC^2}{2} : AC^2 = \frac{AC^2}{2} + {}^2/_3\,CI^2 - 2\,CI^2 : AC^2 = \frac{AC^2}{2} - {}^4/_3\,CI^2 : AC^2$.

Essendo $S = S' + S''$, si vede bene che la discordanza, tra questa e la proporzion precedente, non cade in altro, che nel terzo termine, il quale, se non è vero in quella, non si può credere però che sia venuto a correggersi in questa, conclusa dal Roberval dietro un principio, ch' esaminato bene si scopre falso. Dice l'Autore che la somma degli infiniti quadrati KM, BH, TQ.... al quadrato di CA preso altrettante volte, ossia a $\int AC^2$, *rationem habet, quam sphaera rotae ad totum cylindrum* (ibid. pag. 321). Ora, essendo la sfera uguale alla terza parte del raggio moltiplicata per la superficie, che è quadrupla di un circolo grande, sarà la solidità di essa sfera espressa da $^4/_3\,\pi\,CI^3$, e quella del cilindro da $2\,\pi\,AC^2$. CI per cui i due solidi staranno fra loro come ²/₃ CI² ad AC². E perchè, dice esso Roberval, tale esser pure la ragione del solido S' al medesimo cilindro C, avremo dunque $KM^2 + BH^2 .... : \int AC^2 = {}^2/_3\,CI : AC^2 = S' : C = S' : \pi \int AC^2$. D'onde $S' = \pi\,(KM^2 + BH^2 ....)$ ciò che non sembra esser vero, dimostrandosi il solido S' uguale alla somma degli infiniti circoli descritti dai raggi KM, BM.... intorno alla comite, aggiuntavi la quarta parte del cilindro totale, anche secondo lo stesso calcolo robervalliano.

Il solido infatti, che si descrive dallo spazio, compreso tra la cicloide e

la comite nel rivolgersi intorno all'asse, è composto delle infinite armille KM, BH, TQ.... il valor delle quali, chiamate A, A', A'', si troverà così assai facilmente: $A = \pi EK^2 - \pi EM^2 = \pi (KM^2 + ME^2 + 2 KME - ME^2) = \pi KM^2 + 2 \pi KME$. Troveremo con simile discorso $A' = \pi BH^2 + 2 \pi BHI$, $A'' = \pi TQ^2 + 2 \pi TQS$.... Sommate ora insieme tutte queste armille, il solido delle quali si compone sarà

$$S' = \pi (KM^2 + BH^2 + QT^2 \ldots) + 2 \pi (KME + BHI + TQS \ldots)$$

Giunti a questo punto, rispetto alla somma degl' infiniti rettangoli, compresi fra parentesi, ascoltiamo come il Roberval ne ragioni: « At dupla illa rectangula aequivalent semel omnibus rectangulis sub EL, sive CA et KM; sub IG, sive CA et HB; sub SN, sive CA et QT.... propterea quod omnes rectae EM, IH, SQ.... bis sumptae aequivalent omnibus rectis EL, IG, SN.... semel sumptis; hoc est rectae BA toties sumptae: et haec rectangula constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti. » (ibid. pag. 321). Stabilisce dunque il Roberval questa equazione: $2 (KME + BHI + TQS \ldots) = 2 (ME + HI + QS \ldots) (KM + BH + TQ \ldots)$ dietro la quale, supponendola vera, in tal guisa prosegue il suo discorso: Della somma delle infinite linee ME, HI, QS.... s' intesse la superficie del trilineo AFC, che sappiamo essere uguale all'altro trilineo AFD, e perciò quella somma, presa due volte, equivarrà allo spazio circoscritto dal rettangolo DC, ossia a $\int AC$. Della somma poi delle linee infinite KM, BH, TQ s' intesse la figura disegnata dalla cicloide e dalla sua comite, la qual figura, essendo, come si sa, la quarta parte del rettangolo intero, equivarrà dunque a $\frac{\int AC}{4}$, d'onde verrà ad essere trasformata così l' equazione lasciata di sopra:

$$S' = \pi (KM^2 + BH^2 + QT^2 \ldots) + \frac{\pi \int AC^2}{4}.$$

Se il calcolo robervalliano sia condotto secondo le buone regole algebriche sel vedono i Matematici lettori, ma in ogni modo si deve l'Autore stesso essere accorto, dalla fallacia dei mezzi, dell' inesattezza dei resultati, ridotti finalmente alla ragione $S : C = \frac{3}{4} AC^2 - \frac{CF^2}{3} : AC^2$, che è quella creduta, sopra le altre due precedenti, per vera, e che sotto questa formula fu definitivamente annunziata nella lettera al Torricelli. Non fu dunque per quel malizioso fine; che ingiuriosamente al Roberval s' imputava, l' indugio di quasi due anni a far la risposta, ma per la difficoltà della ricerca, che richiese veramente dal pertinace Geometra, com'ei diceva, opera così lunga e faticosa.

La causa però s'agitava principalmente, e con grande ardore degli animi, circa al centro di gravità della Cicloide, che il Torricelli difendeva come sua propria invenzione, contro le usurpazioni del Roberval, a cui, diceva quegli, non passò tal cosa mai per la mente. A questo capo di accusa così giungeva solenne da Parigi a Firenze la risposta.

« Dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis Trochoidis, cum interea tantopere, et quidem merito, gloriarer de omnibus aliis, quadratura, tangentibus, solidis etc., nec verisimile esse, cum reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse, si illud tantum speravissem, quod quidem problema, tuo iudicio nulli reliquorum posthabendum videtur; dum haec ais, inquam, Vir clarissime, ex tuo genio loqueris: nos, dum scripsimus, ex nostro etiam genio scripsimus. Tu, cum magnifaceres centra, quia ex iis solida deducere posse confidebas, solida autem praecipue intendebas, ideo centrorum inventionem magnifice extulisti, nec caeteris posthabendam, immo praehabendam iudicasti. Ego contra, quia sine centris solida et quaesivi et via geometrica inveni, datis autem solidis, statim et absque labore centra sequebantur. Ideo centra ne respexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui, certus omnino, ex praemissa nostra methodo, dato plano quod dudum habebam, sola solida mihi quaerenda superesse, centra autem simul cum plano et solidis haberi. » (ibid. pag. 376).

Ora, che cosa potrebbesi trovare in questa risposta, che non riscontri con la verità dei fatti? Era ad ambedue i Matematici data la Regola centrobarica, dalla quale si deduceva per corollario immediato che i solidi rotondi stanno in ragion composta delle figure piane, e delle distanze dei loro centri di gravità dall'asse della rivoluzione. Se sia data dunque la quadratura, o se in altre parole sia detto secondo qual proporzione stanno fra loro le superficie genitrici, il teorema universalissimo del Guldino non solo porgeva facile il modo di risolvere direttamente il problema: dati i centri di gravità trovare i solidi; ma conversamente di risolver l'altro: dati i solidi trovare i centri. E come il Torricelli pretendeva essere sua propria quella soluzione diretta, così sua propria diceva il Roberval essere questa conversa, la quale, se ci avesse pensato, o sentitone il bisogno, lo conduceva, assai prima del suo rivale, a dimostrare il centro di gravità della Cicloide *statim et absque labore*. Riducendoci infatti sott'occhio la figura 307, se con S, C si rappresentano il solido e il cilindro circa la base, che nella terza proposizione robervalliana erano stati già ritrovati stare come 5 a 8, e se con T, R si significhino la trochoide e il rettangolo, che, nel corollario della proposizione precedente alla citata, si trovarono aver tra loro la proporzione di 3 a 4; subito veramente e senza alcuna fatica s'ha indicato il punto B sull'asse dalla proporzione $BL . T : AL . R = 3 BL : 4 AL = S : C = 5 : 8$, la quale si riduce a $BL : AL = 5 : 6$, secondo che, per altra via laboriosissima, era giunto pure a concludere il Torricelli. Con quanta coscienza poi potesse questi affermare nella citata lettera al Mersenno: *Misi etiam demonstrationem meam et vere meam, pro methodo, quae inservit ad inveniendum centrum gravitatis ex dato solido, sive solidum ex dato centro;* lo lasciamo giudicare ai nostri Lettori, i quali sanno oramai troppo bene che quel medodo era invece del Nardi.

Nè il Roberval, dall' altra parte, era meno illuso, quando dal suo teorema *Des anneaux* credeva potersi, per la ricerca de' centri di gravità, dati

i solidi, derivare il metodo universalissimo. Quel teorema invece, supponendo le superficie piane concentriche, non suppliva se non che parzialmente alla Regola centrobarica, nel solo caso cioè che i centri di gravità delle figure fossero ugualmente distanti dall'asse della rivoluzione. Di qui nacquero senza dubbio alcuni errori di lui, come sarebbe quello, che è a notar nel calcolo del solido generato dallo spazio intercetto tra la Cicloide e la comite, nel rivolgersi intorno all'asse, del qual solido dice; *patet continere quartam partem totius cylindri* (Ouvrag. cit. pag. 322).

Sarebbe la cosa patente, quando le due superficie piane, rappresentateci dal rettangolo DC e dal bilinco AMFT, nella figura 308, avessero i loro centri di gravità a ugual distanza dalla FC, perchè allora, stando i solidi com'esse superficie semplicemente, starebbero anche insieme come uno a quattro. Ma chi sa in qual punto della BH cade il centro del detto bilineo, o qual fiducia può aversi che coincida col punto di mezzo della GI, dove il rettangolo DC concentra il suo peso? Non avvertì il Roberval essere la cosa molto diversa, quando il rivolgimento si fa intorno alla base, perchè allora il bilineo e il rettangolo, raddoppiati dall'altra parte dell'asse, riescono concentrici in I, e il metodo, solamente applicabile in questo caso, lo credè universale.

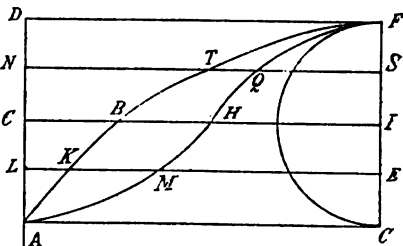



Figura 308.

Così sembra a noi venga dato imparziale giudizio intorno al torto e al diritto di questa lite, la quale non si sarebbe forse agitata così diuturna e fervente, se ambedue i grandi Uomini non avessero falsamente creduto all'impossibilità del riscontrarsi, per vie diverse, nella medesima invenzione due ingegni, senza che all'uno fossero in qualunque modo noti i progressi dell'altro. Fu da un tal dannoso pregiudizio mosso principalmente il Torricelli, quando, posate appena le armi contro il Roberval, le riprese subito in mano, per usarle contro il Ricci, da cui intendeva di rivendicarsi il primato e la proprietà del metodo per la quadratura delle infinite parabole. Ma il Ricci, con coscienza non men sincera e dignitosa del Roberval, rispondeva così francamente alle pretensioni:

« Passo dunque al punto principale, cioè che la quadratura delle infinite parabole io deva totalmente riconoscerla come sua, benchè io scriva di averla molto prima, che ella mi scrivesse la sua, che quasi è la medesima, e benchè io l'abbia ritrovata prima di lei, per quel che posso congetturare da una sua lettera, che mi scrisse il marzo passato, dove disprezzava l'invenzione del Robervallio. E fu allora che io le risposi che io non potevo non estimarla assai come fecondo principio di bellissime conseguenze, alludendo alla quadratura suddetta, di che avevo preso motivo da quella invenzione, e alla invenzione de' centri di gravità della stessa parabola, con altri misteri,

ai quali scorgevo aperta la strada. Questa ultima però dei centri di gravità non la perfezionai, stante l'indisposizione, che allora mi travagliava. »

« Le ragioni di V. S. son due: la prima, che sarà giudicato impossibile che ci siamo incontrati ambedue nel medesimo metodo così precisamente, senza che uno di noi abbia veduto il progresso dell'altro, e di poco l'abbia alterato, essendo troppo fuori dell'usato quel modo di provare. La seconda vuole che io non possa avere quella quadratura generalmente, perchè vi si richiederebbe il teorema delle tangenti, a questo il teorema de' massimi, il quale io confesso di non aver generalmente trovato per ancora. »

« Io dico a V. S. che la proposta di Robervallio mi fu comunicata dal sig. Raffaello Magiotti, per ordine di lei, e ne ammirai la dimostrazione, che ella subitamente vi fece, come a V. S. ne scrissi in quel tempo. Da questo io presi occasione di mostrare la quadratura delle infinite parabole, non lo metto in dubbio. Se poi si giustificherà impossibile (cosa che V. S. non disse mai) il dedurre questa quadratura, io avrò fatto l'impossibile, e il sig. Antonio Nardi me ne farà fede. Ma perchè V. S. non dirà che sia difficile, ma facilissimo il dedurla dalla proposizione di Robervallio, anzi una cosa medesima, io replico che ciò non sarà agevolmente ammesso da chi saprà che Robervallio, avendo dimostrata la proposizione, stimò ardua impresa il cavarne la quadratura della sola parabola vulgata, come V. S. mi significò nella sua de' 28 di Maggio prossimo. Ed aggiungo quel che di sopra dicevo, che ella avrebbe fatto stima grandissima di quella proposta, quando ne avesse dedotta la detta quadratura, che, sebbene ora mostra di prezzar poco, allora era uno dei massimi teoremi, che fossero in volta. »

« Circa poi all'essere una cosa medesima la proposta di Robervallio e la quadratura, onde seguirebbe che la dimostrazione di questa io non potessi appropriarmi, quando avessi con poca alterazione da quella proposta preso fondamento alla mia dimostrazione; le ridurrò solamente a memoria il suo senso, avvisatomi nella lettera poco dianzi mentovata. Ella mi comunica due maniere per dimostrare le infinite quadrature, l'una delle quali ha il medesimo progresso con la mia maniera, e piglia per fondamento una dimostrazione, da quella della proposta di Robervallio poco differente, come V. S. asserisce. L'altra si serve espressamente della proposta di Robervallio, con la dimostrazione fattale da V. S., e conclude la lettera: *Noi da quelle sue figure,* cioè di Robervallio, *caviamo la quadratura di tutte le parabole, come apparve in quest'ultima: ed in modo poco differente con invenzione propria affatto, senza nulla d'altri come la precedente, dimostriamo un'altra volta il medesimo.* Ecco dunque che, variandosi un poco la dimostrazione adattata alla proposta di Robervallio, e da questa derivandosi la quadratura delle infinite parabole (ed io poi non solo vario il poco di V. S. ma forse assai più) si può, per detto di lei, chiamare invenzione senza nulla d'altri. »

« Ma non è da tacere che nella dimostrazione di V. S. fanno gioco principale le tangenti, delle quali, non solamente io posso dirmi il primo, per la

verità che generalmente le partecipai; ma per il metodo generale ancora, dal quale confessa ella d' aver avuto motivo per la dimostrazione fattane dopo per via del moto. Ella scrive, sotto li 26 di Febbraio dell' anno passato, in questo tenore, rispondendo alla lettera, con la quale avvisavo l' invenzione delle suddette tangenti: *Ho bene io imparato dalle sue lettere cose, che forse non avrei avvertite mai, perchè, tornando iersera con le lettere di V. S. in mano, mi entrò in testa che quelle tangenti non potesssero essere. Ciò fu causa che feci non so che figure, e trovai poi ch' era verissimo, e ne scrissi la dimostrazione universale, per via del moto.* Se dunque io non posso per l' un rispetto attribuirmi questa quadratura, ella pare a me che non vorrà attribuirsela, avendo riguardo a quest' altro rispetto. Sicchè resterà come effetto di mutua causalità, per favellar con le scuole, e non si dirà nè suo nè mio parto proprio e totale, essendo ella primo in un genere ed io primo in un altro. »

« Alla seconda ragione rispondo che io facevo due conti, in caso che mi fosse succeduto di provare quel lemma generalmente: cioè di supplicar V. S. che me ne favorisse, conforme all' intenzione che me ne diede l' anno passato, quando mi mandò il medesimo lemma dimostrato, ma in casi particolari; ovvero di proporre il metodo e darne come un esempio in que' casi che posso, avvertendo che, riducendo qual si voglia caso all' invenzione dei massimi, si trova generalmente la ragione di tutto. »

« Mando a V. S. parte della mia dimostrazione nel proposito nostro, stimandola sufficiente per questo che si pretende, cioè di scoprire la convenienza de' metodi, e giuro a V. S. che questa è la medesima dimostrazione, che io scrissi nel marzo passato: solo qualche paroluccia ho mutato nel trascrivere.... Ella si ricorderà, due mesi sono, che mi avvisò una sua proposizione dimostrata da lei in modo recondito, eppure io l' indovinai..... Roma, 7 Luglio 1646. » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 162-66).

Da queste ragioni giova a noi credere che rimanesse persuaso il Torricelli, nel quale è certo che tornò presto la consueta serenità verso il Ricci, come pure giova similmente credere che facesse col Roberval accettando l' amicizia da lui generosamente proffertagli, *litibus valere iussis* (Ouvrages, pag. 398) dalla naturale bontà dell' animo, e dal presentimento della morte vicina.

Chi potrebbe in ogni modo negare ai due grandi Matematici l' aver concorso con pari merito, l' uno a istituire, l' altro a diffondere quella scienza della Cicloide, che avrebbe poco di poi, per il Pascal, pel Wallis e per l' Hughens progredito tant' oltre? Che se l' ultimo commemorato, nello scolio all' ottava proposizione della terza parte dell' *Orologio oscillatorio,* compendiando questa Storia non ricorda del Torricelli nemmeno il nome, l' altro, il Wallis, nella prefazione al suo *Trattato della Cicloide* confessa di averne da solo il Torricelli imparata la quadratura, non pensando nemmen per sogno che il Roberval, nulla avendo dato ancora alla luce, si fosse esercitato nel medesimo soggetto.

V.

La storia della Cicloide, perchè troppo importante in sè stessa, e perchè troppo bisognosa di essere illustrata nelle sue origini, rimaste fin qui occulte nei manoscritti; è stata in questo capitolo una assai lunga digressione da quella via, sopra la quale siam solleciti ora di ritornare, per accennar frettolosamente all'opera, data dai colleghi e dai discepoli del Torricelli in promovere la Meccanica galileiana. Si disse già, infin dal principio del presente discorso, ch'erano principalmente da annoverare fra cotesti promotori il Cavalieri, il Borelli e il Viviani, i quali tre insigni personaggi sono oramai tante volte compariti sopra la scena, come principali attori del dramma, e i nostri Lettori perciò gli debbono conoscere così bene, che alla tela, sopra la quale è disegnata la loro effige, manca solamente l'essere circoscritta, e terminata dalla sua propria cornice.

Il Cavalieri, avutone l'impulso dalla lettura dei dialoghi dei Due massimi sistemi, esordì i suoi studi con lo *Specchio ustorio,* dimostando che, nelle naturali scese dei gravi, gli spazi crescono come i quadrati dei tempi, in un modo nuovo e affatto geometrico, come pure ei fu il primo a dimostrar, nella parabola de' proietti, i ludi geometrici della Natura. Galileo, o fossero le sue espressioni sincere, o tinte della gelosa paura di un potente rivale; designava per suo successore nella Scienza del moto lo stesso Cavalieri, che rispondeva nel Giugno del 1635 in questi termini, interpetrando meglio il suo proprio genio, che le intenzioni degli altrui onorevoli inviti: *Quanto alla qualità degli studi, ai quali sia ora per applicarmi, se io riguardo al mio gusto, mi saria piaciuto applicarmi io ancora alla dottrina del moto, parendomi cosa di gran momento, ed il compendio della vera Filosofia:* ma soggiunge che, per badare alla sodisfazione del luogo, ossia della cattedra bolognese, nella quale era stato il Magini suo antecessore tanto onorato, gli sarebbe convenuto piuttosto attendere a calcolare le Effemeridi per gli anni prossimi futuri (Campori, Carteggio gal., Modena 1881). Da un'altra lettera, scritta allo stesso Galileo pochi giorni appresso, trasparisce più chiaramente essere una delle principali ragioni, che lo ritengono dal coltivare gli studi della Meccanica, quella di non far nascere nuove ombre di gelosia nel mal disposto animo del suo Maestro, scusandosi con lui, un'altra volta fra le tante, del disgusto, che gli potesse ignorantemente aver dato con l'occasione dello *Specchio ustorio* « nel quale, prosegue a dire, venendomi così bene a taglio la linea descritta dal proietto per le sezioni coniche, pensando che ella non ne facesse conto più che tanto, mi presi licenza d'inserirla in quel libro, credendo che le proposte mie, fatte in quello, che era cosa imparata da lei, dovessero piuttosto cagionarle piacere che dispiacere » (ivi, pag. 442).

Non è il tempo nè il bisogno di tornare indietro sopra la storia odiosa di quella incredibile usurpazione, dalla qúale si derivò grave danno ai progressi della Scienza del moto, abbandonata dal Cavalieri afflitto e sbigottito. Non abbiamo infatti su quel soggetto, dopo quel che ne toccò l'Autore nello Specchio ustorio, altro che la Quinta esercitazione geometrica, nella quale pure s' intravede una trepida sollecitudine di non mettere il pie' nel campo galileiano, limitandosi a percorrerne, nella statica dei momenti e dei centri di gravità, le estreme prode. Notabile, a proposito dell' invenzione di questi centri, che fosse il Cavalieri il primo e l' unico a riguardare i corpi in gravità come *uniformemente disformi*, ciò che si meriterebbe il nome, scritto nel titolo, di una pura esercitazione geometrica, se in qualche caso, da considerarsi forse meglio dai Fisici, non se ne vedesse possibile l' applicazione, come per esempio nella ricerca de' centri di gravità delle grandi moli sollevate dalle forze endogene della Terra, supponendo che la densità degli strati sia proporzionale alle pressioni o alle attrazioni, le quali crescano reciprocamente alle distanze dal centro.

Altra cosa notabile è che, delle tante invenzioni comunicategli dal Torricelli intorno ai centri di gravità delle varie figure, non faccia il Cavalieri motto che del solido colonnare insignito del suo proprio nome; e, nella proposizione XVII, del centro di gravità della callotta sferica, *quod novissime probavit Torricellius*, e, nella XXXIV, del centro di gravità dell' emisfero, dimostrato per via degl' indivisibili con eleganze, che poco paion diverse dalle torricelliane. La ragione scusabilissima di questo silenzio sarà stata, perchè sperava che avrebbe il Torricelli stesso presto dato ordine e pubblicità al suo libro *De centro gravitatis*, il quale, rimastosi invece per due secoli e mezzo ne' suoi materiali disordinato e disperso, oggi finalmente ha preso qui addietro nella nostra Storia, men per noi che per i pregi suoi propri, bellezza nuova di forma.

Il Borelli, fra i discepoli di Galileo, attese allo studio della Meccanica sopra tutti gli altri, dando in quell' argomento alla luce quattro opere insigni, quali sono *De vi percussionis, De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus, Theoricae Mediceorum* e *De motu animalium*. Nelle prime due l' intento dell' Autore non è che di promovere le dottrine del suo Maestro, ma nelle altre due rimanenti apre campi nuovi alla Scienza, e dai piccoli gravi terrestri risale arditamente alle grandi moli de' pianeti, e da' moti apperenti nella materia bruta deriva leggi, che rivelano gli occulti misteri della vita.

Del trattato della percossa e degli urti, e come il Borelli, prima del Wallis, del Mariotte e dell' Huyghens ne dimostrasse le leggi, fu detto qui addietro nel capitolo III quanto ne pare a sufficienza per la storia dell' invenzione, se non del libro, che, sospingendone la via, lasciamo alle cure degli eruditi.

Nè solamente rispetto alla forza della percossa lasciava da desiderare la Scienza galileiana, ma rispetto ancora ad altre dottrine più fondamentali, che il Borelli si studiò di confermare, e di esplicare nel libro *De motionibus na-*

turalibus. Gli errori di Aristotile intorno alle cadute naturali dei gravi erano stati scoperti liberamente da Galileo, il quale fu il primo ad annunziare quella proposizione, apparita a tutti ammirabile, che cioè nel vuoto i corpi, di qualunque mole e di qualunque figura, scenderebbero nel medesimo tempo spazi uguali. « Eam tamen propositionem, soggiunge il Borelli, Galileus non demonstravit, sed coniecturis et probabilibus tantummodo rationibus confirmare conatus est. Quia vero huiusmodi propositio usum habet in hac physicee parte, quam praemanibus habemus, propterea operae pretium duxi firmis demonstrationibus eam confirmare » (Regio Julio 1670, pag. 439, 40).

Le dimostrazioni però dell'Autore, come si può facilmente indovinare, erano di ragion pura e non sperimentali, mancando anche a lui, come a Galileo, della Macchina pneumatica l'invenzione e l'uso. Nulladimeno sagacemente avvertiva che del fatto, solamente operantesi nel vuoto, si poteva aver qualche indizio certo o almeno probabile anche nel pieno, quando le cadute si osservino in distanze talmente piccole, che poco sia l'impedimento opposto dalla consistenza o viscosità del mezzo. Di qui apparisce, soggiunge il Borelli, l'imperizia di coloro, da' quali non è escluso lo stesso Galileo, che, volendo investigare se i corpi inegualmente gravi discendono inegualmente, pensanò doversi sperimentare facendo cadere i gravi dalle altissime torri « ubi velocitates plumbi et argillae valde differunt inter se, cum tamen in brevioribus altitudinibus nullo sensu distingui possint eorùm inaequalitates, cum ambo eodem tempore ferri videantur » (ibid., pag. 500).

Non sempre però il Borelli si contenta di confermare, come fa qui, le dottrine del suo Maestro, ma altrove anche le compie, annunziando e dimostrando proposizioni nuove, qual sarebbe per esempio la seguente: « Si fuerint duo cylindri homogenei aqua demersi, aequalium basium et inaequalium altitudinum, semperque eorum latera perpendicularia sint ad horizontem; tempora, quibus aequalia spatia ascendendo vel descendendo percurrunt, eamdem proportionem reciprocam habebunt, quam subduplicata ratio altitudinum fuerit » (ibid., pag. 470). La proposizione è contro Antonio Oliva, il quale aveva proposto nell'Accademia del Cimento alcune esperienze, per confermare una sua opinione, che cioè le velocità de' corpi, o discendenti o ascendenti nell'acqua, osservino la proporzion diretta delle loro altezze.

Erano altri, nè sappiamo se fosse tra costoro lo stesso Oliva, che negavano l'accelerarsi i corpi nell'andare al fondo, o nel risalir pur per l'acqua. L'errore aveva avuto occasione e veniva confermato da quell'altro errore di Galileo, che insegnava giungere nelle prolisse cadute il grave a ricevere dal mezzo tale impedimento, da vietargli di più accelerarsi, cosicchè il moto procede di lì in poi sempre uniforme. Credettero que' Fisici che impedimento di tal qualità e potenza fosse al mobile l'acqua, e il Borelli non volle lasciar l'occasione di scoprire con due belle esperienze quella loro fallacia, dimostrata già dai calcoli del Cartesio. A un vaso aveva spalmato il fondo di cera, e riempiutolo del liquido, vi faceva da varie altezze cadere una palla di piombo, infissovi sotto un ago. Osservò che la punta era entrata nella cera

tanto più addentro, quanto la palla era venuta più d'alto. A far poi esperienza del medesimo, nel risalire, affondava, per via di un bastoncello, un cannellino, a cui era zavorra un globetto di piombo, che lasciato libero si vedeva risaltar più o meno sull'acqua, secondo ch'era stato più o meno sommerso. « Unde patet, ne conclude il Borelli, quod saltus altior produci debuit a vehementiori velocitate eiusdem calami, acquisita in eius ascensu prolixiori » (ibid., pag. 501).

Le due opere di Meccanica pura, esaminate o per più vero dire ridotte alla memoria dei nostri Lettori, erano nell'intendimento dell'Autore una preparazione, e dovevano quasi servir di proemio alla grande opera dei moti animali. La celebrità di lei dispensa la nostra Storia dall'entrare ne'più minuti particolari, e da un altro lato, nel Tomo III, sono inseriti in gran numero documenti, che mostrano quali progressi venisse a fare la Fisiologia, per le speculazioni e per l'esperienze del Borelli. De' tanti lemmi premess alle varie proposizioni, per preparar dalle forze che tendon le funi il passaggio alle forze che contraggono i tendini e i muscoli, abbiamo avuto occasione di toccare in vario proposito, e cose anche di maggiore importanza ci occorreranno a dire più qua nel capitolo IX: ond'è che sole le *Theoricae Mediceorum* ci rimangono a ridurre dentro la cornice del quadro.

Non si possono l'importanza e il fine di quest'Opera nuova di Meccanica celeste pienamente comprendere, senza risalire, e intrattener la mente nella grande riforma astronomica del Keplero. L'orbita ellittica, dimostrata da lui nella stella di Marte come cosa di fatto, aprì gli occhi via via agli osservatori del Cielo, i quali presto ebbero a persuadersi che in simil modo ricircolano intorno al Sole tutti gli altri pianeti, e i satelliti stessi intorno a Giove. Venivano così a dissiparsi de' costruttori dei mondani sistemi le macchine incantate, ma restava a spiegarsi come mai le circolanti moli s'appressassero e si dilungassero, con vicenda incessante, dai loro centri. Il Keplero s'era immaginato che una faccia del Pianeta fosse amica al Sole, e l'altra nemica, d'onde ora avvenisse un'attrazione, ora una repulsione, a somiglianza di quel che il magnete, dagli opposti poli, fa verso il ferro: e com'era una strana immaginazione, così a buon diritto si repudiò dagli Astronomi.

Con nessun diritto però s'ostinarono altri a negare l'esistenza del fatto, perchè non ne intendevano le ragioni, di che Galileo dette al mondo, ne'dialoghi dei Due massimi sistemi, esempio così famoso. Si condannarono cotesti Dialoghi dalla Curia, instigata dai professori del Collegio romano, ma gli aveva prima con più legittima autorità condannati la Scienza, la quale, per le prove del moto della Terra, prolissamente ridotte all'intelligenza dei Simplicii, non seppe perdonare le inverosimiglianze e le irragionevolezze del sistema copernicano, per vedersi liberata dalle quali aveva fatto dianzi così gran plauso al Keplero. Di qui è che gli Astronomi, i quali, benchè per ragioni diverse, si trovarono esser concorsi nella medesima sentenza col Santo Uffizio, non fecero que' reclami, di che poi assordarono il mondo tanti scrittori, quando nell'argomento veniva a porgersi alla loro rettorica un sì favo-

rito esercizio. Nè furono quegli astronomi solamente i Roberval e i Cartesii, o altri stranieri indifferenti o plaudenti agl' immolatori della vittima del loro rivale, ma gli stessi discepoli di Galileo più assennati e più liberi, fra' quali, da che s'è imparato a conoscerlo in questa Storia, è de' primi Antonio Nardi.

Più forse del libro *De revolutionibus* del Copernico conferì a persuadere che, non la Terra ma il Sole, sia centro de' moti planetari l'Arenario di Archimede, intorno al quale il Nardi, nella sua *Ricercata seconda,* sotto il titolo: « Del sistema del mondo sopra quelle parole di Archimede nell' Arenario *Supponit Aristarchus inerrantia sidera et Solem non moveri, Terram vero ferri in gyrum circa Solem, qui in medio stadio iaceat;* scriveva la seguente osservazione, compendiando una delle pagine più importanti della Storia filosofica dell' Astronomia:

« Molto rozzo, e molto nell' apparenza dalla verisimilitudine repugnante, parmi il sistema del Mondo, che per vero al tempo di Archimede da molti si riceveva, poichè credevasi con Anassimandro il mondo essere una sfera, di cui il centro fosse quello della Terra, e il semidiametro quella linea, che dalla Terra andasse al Sole. Platone con tutto ciò ed altri avevano creduto diversamente, a' quali, dopo Archimede, accostossi Ipparco Rodio, a cui Tolomeo, e a Tolomeo gli altri tutti, sino all' età de' nostri avi, si sottoscrissero. Ma Filolao da Crotone e Iceta Siracusano erano stati avanti Platone inventori in parte di un paradosso sistema, il quale da Aristarco Samio fu molto coltivato e perfezionato, di tal maniera che Archimede ad Aristarco il parto di tal sistema attribuisce. Ma tal parto morì quasi in fasce, se non che Niccolò Copernico, dopo il giro dintorno a diciotto secoli, lo cavò dal sepolcro, e all' età nostra, per le osservazioni del Telescopio, si è grandemente avanzato nella credenza di molti. »

« È ben vero che alla Santa Romana Chiesa tal sistema è per gravissime cagioni sospetto, di che per ora ragionare non è mio proposito, e solo avvertirò come, anche col semplice lume naturale discorrendo, parmi che il sistema del Copernico in molte cose sia difettoso. Egli in prima asserisce il Sole e le fisse Stelle essere in tutto immobili, e per il contrario diè tante e così strane maniere di movimenti alla Terra, senz' addurne almeno qualche ingegnosa, se non vera cagione, che sembra l' opinion sua una fantasia troppo fantastica, e pareva molto meglio il dare a ciascun corpo il suo moto, poichè de' corpi è comune accidente il moversi, che ad alcuni in tutto levandolo, e troppi ad altri assegnandone, disturbare il mondano concerto. »

« Impossibili dunque paiono quelle copernicane posizioni intorno a tanti e sì diversi commovimenti, che come propri attribuisce alla Terra. Quindi ancora non le librazioni sole e l' inclinazioni, quali esso le finge, stimerannosi da molti cose adulterine, ma ancora molto più quel forzato discorrimento, che per diritta linea in giù e in sù fa Mercurio. S' aggiunga ancora che, essendo cose immaginarie, i centri degli Orbi descrivono con tutto ciò appo il Copernico altri cerchi, e seco ne rapiscono gli orbi loro, il che è inverosimile grande. Lascio che in tal caso, mentre saglie e discende l'Orbe,

che egli dice inconsideratamente Magno; offenderà il maggiore di Marte, e quello di Venere, se però non voglia che fra l'uno orbe e l'altro ci sia molto spazio vano, il che lo sproposito accresce: come anco a volere che insieme si confòndessero o si condensassero o rarefacessero. Il vedersi ancora alcuni móndani movimenti avere i loro periodi ubbidienti ai movimenti di altri corpi, come per esempio il trovarsi Venere e Mercurio prossimi o lontani da un certo punto, mentre la Terra in una tal linea si trovi; dà di chimerica posizione indizio, sicchè almeno bisogna scansare, se non torre in tutto questo inverosimile. Ma supera tutti gl' inverosimili l'immensa distanza eterea fra le fisse e i pianeti, poichè la sola ragione delle rifrazioni orizontali poteva rimediare a molte apparenze, senza per così dire disgiungere il mondo da sè medesimo, acciò di notte non si veda meno che mezzo. »

« Tolomeo, dall' altra banda, molto seccamente s' inventò e abbracciò quei cerchi, che irregolarmente sopra il suo, e regolarmente sopra gli altri centri si muovono. Pare ancora che nulla di naturale artifizio abbiano gli orbi vuoti e di grossezza disuguale, per dove gli eccentri scorrano: oltrechè troppo il rendere ragione è difficile come, gli uni combaciandosi con gli altri, possano o congiunti o separati movimenti ottenere. È anche strano a intendersi come l' ottavo cielo, contiguo a Saturno, comunichi a Saturno il suo moto, ma Saturno non comunichi il suo a Giove, massime che la Luna comunica il suo al fuoco, se ci sia, e all' aria, nature dalla quinta essenza tolemaica dissimīli e fra sè ancora, e che, di più, propria origine di movimento, e diverso dal circolare, ottengono in tale ipotesi. Moversi ancora l' ottavo Orbe di movimento si tardò, e il settimo contiguo sì veloce, e di velocissimo il nono; moversi ancora il secondo, il terzo e il quarto di eguale, non ha del probabile in modo alcuno, come nemmeno che la Luna sia, nella quarta, nell' imo apside dell' eccentro, e non riluca quattro volte più di quello che fa, e ancora che si muova nell' epiciclo, e che mostri l' istessa faccia a noi. Certo che Tolomeo, purchè in qualche maniera alle apparenze dei moti (questo è suo fine) sodisfaccia, poco della mondana armonia e convenienza gli cale. Quindi anco vediamo che poco la mal proporzionata proporzione degli epicicli di Marte e di Venere gli prema, e così anche, ora gli eccentri e gli epicicli, ora l' epiciclo dell' epiciclo e l' eccentro epiciclo ei prenda nella gran composizione, senza di tal differenza briga prendersi, in che, come in altri inconvenienti, ha Tolomeo compagno il Copernico, e massime nel far movere i pianeti intorno a centri immaginari. »

« Meglio fece Aristotile a voler che i pianeti si movessero intorno alla Terra come intorno a proprio centro, ma in tal caso bisogna render qualche ragione dell' avvicinarsi e discostarsi i Pianeti da esso centro, il che ha tentato di fare in altra ipotesi il Keplero. Delle cagioni poi di cotesti moti non si trova parola appo Tolomeo e il Copernico, ma lasciano di ciò la briga ai Fisici, i quali per lo più ricorrono alle macchine. »

« In ultimo, mercè di tante apparenze nuovamente manifestateci, e per essersi nuovi corpi mondani, e nuovi movimenti scoperti, o meglio i vecchi

osservati; bisogna non solo poco probabili stimare molte supposizioni degli antichi, ma ancora in molte parti false. Ticone di due sistemi ha fatto una mal digerita confusione. Non voglio esaminare tal suo parto, perchè, dal solo aspetto, mostruoso apparisce. Marte solo, rompendo col suo un altro giro, impaurisce chiunque abbracciar dette posizioni volesse. Ma di queste materie nel mio sistema più accuratamente trattasi. »

Il sistema planetario, immaginato dal Nardi, metteva, come quel di Aristarco, nel Sole il centro dei moti, ma scansava gl' inconvenienti del Copernico, non considerati da Galileo, più filosoficamente del quale sentiva il Discepolo come giovasse al progredir dell' Astronomia investigar le ragioni del discendere e del risalire i pianeti dal Sole, senza introdurre gli epicicli e gli equanti. Vero è bene che parve anche a lui cosa dura ammettere le orbite kepleriane schiettamente ellittiche, ma per non mostrarsi, in rifiutar ciò che si proponeva come cosa di fatto, o dissennato o caparbio, pensò che di ellittico non avessero esse orbite che l' apparenza o la similitudine, essendo in realtà una trasformazione da certe figure elicali, che sarebbero secondo lui le vere orbite descritte dai pianeti. Troviamo questa opinione accennata così per incidenza, trattandosi dall'Autore *Delle spirali o elici di Archimede:* « E chi sa che ancora i Pianeti non descrivano, intorno al Sole loro centro, porzioni di elice, mentre ora da quello meno tirati discendono, ora, in virtù dell' attrazione e del consenso con gli altri membri del mondo, risagliono con reciproche vibrazioni? Certo che tal mio parere è forse non meno verosimile che l' introdurre gli epicicli e gli equanti, o il dare il moto ai punti immaginari del centro, o finalmente inventare i moti ellittici. »

Ma perchè, in dimostrare la verosomiglianza di questo parere, si riduceva, del Sistema astronomico del Nardi, la maggiore importanza e il merito principale; attese a farlo di proposito in una veduta delle sue *Scene*, introducendovi il principio delle forze centrali, immaginate spirar dal Sole a guisa di un vento perpetuo, che meni in giro una nave.

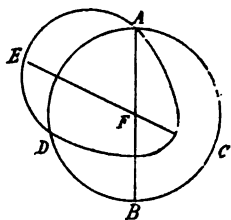



Figura 309.

« Sia, egli dice, il cerchio ABC (fig. 309) di cui centro F, diametro AB. Intendasi il centro esser occupato dal Sole ed un pianeta A, per esempio Giove, il suo centro abbia nella periferia. Giove, per la propria forma, moversi in sè stesso circolarmente pongasi, ed anco intorno al Sole. D' avvantaggio pongasi che il Sole e la sua forma, essendo quasi cuore ed anima del mondo planetario, muovano in qualche modo e formino i moti degli altri membri, e in conseguenza più veloci moveranno i più vicini. Il loro muovere non sarà impulso esterno, ma una informazione interna o vitale, mediante la virtù propria e solare, che muove equabilmente, ed in conseguenza perpetuamente. Vento, che stabile gonfi ed animi una vela per un tranquillo orizonte, cagionerà, nel movere egualmente in giro una nave, certa somiglianza dello effetto solare nei circostanti corpi. »

« Ma perchè Giove aspira, nel suo condursi in giro per la periferia ABC, all'accostamento verso il suo centro, quindi è che nel circolare sopraggiunge il retto moto, il quale è congiunto dello accoppiarsi delle virtù gioviale e solare, e così ancora avviene nel grave cadente, il quale, dalla propria forma e dal consenso delle sottoposte cose, è rapito al centro, e sempre con impeto più accelerato s'avanza. Lo stesso forse fa Giove, se non che l'impeto suo non si accelera evidentemente nell'accostarsi al Sole, perchè la lontananza e grandezza sua fanno diversa ragione di accelerarsi, che non fa la piccolezza di un sasso cadente, e la vicinanza alle altre parti congeneri che l'attraggono. »

« Il moto dunque composto di circolare e diretto non par altro che una spira, e questa tanto s'avvicina al centro, quanto mirando la causa finale comporta la convenienza e il bisogno di Giove in riguardo del Sole, onde, arrivato al termine, ritorna alla medesima altezza. Ma perchè verso la stessa parte concorrono i moti del Sole e di Giove in sè stessi, e di più quello di Giove è messo in giro diverso; avvien forse che la spira del punto A non termini in un punto del diametro AB, ma trascorra alquanto più in là, come in E, onde, restituendosi il periodo della risalita, anch'egli alquanto maggiore di quello della scesa, trascorrerà anche A, punto dell'auge, secondo l'ordine de' segni in D, e segherassi ne' punti A, D la prima spira dalla seconda. Vento che, uniforme spirando, spieghi la chioma di qualche albero sino a certo segno, onde quella per sè stessa ritorni in altrettanta inclinazione verso della contraria parte, e che di nuovo alternando si lasci dal vento spiegare; somiglia al meglio che può tra le cose nostre l'ordine e la ragione delle celesti spire. Tal maniera poi di spira, poichè le spire sono d'infinite sorti, riscontrasi, almeno prossimamente, con una ellisse, in uno dei cui fochi sia il Sole. E tanto secondo questi principi apportato sia, poichè anche in questa via si trovano intoppi » (MSS. Gal. Disc., T. XX, pag. 291-94).

Gl'intoppi erano per questa via inevitabili, come a colui che si trovava costretto ad ammettere una conseguenza di fatto, senza conoscerne i principii. Di qui è che lo studio del Nardi si ridusse a dimostrare in qualche modo come le orbite ellittiche fossero una trasformazione dalle circolari. Il Boulliaud non seppe tenere altra via diversa da questa, immaginando quel suo aereo cono scaleno, per dare ad intendere come dai circoli, descritti intorno all'asse di lui dal pianeta, che dal vertice equabilmente discende verso la base; venga a disegnarsi sulla superficie di esso cono un'ellisse, che in uno de' suoi fochi abbia il Sole.

Di non lieve importanza apparirà perciò il passo, che fece fare il Borelli alla Scienza, ammettendo che l'eccentricità sia all'orbite congenita, e non avventizia. Di qui è che il problema si poteva proporre ne' suoi veri termini, avviandolo a ricercare d'onde resultin le forze che, sollecitando i satelliti e i pianeti, gli fanno rivolgere non più in circoli ma in ellissi. Alla ricerca però non conseguì per il Nostro la desiderata invenzione, perchè, sebbene egli avesse felicemente sottoposti i moti celesti all'azione delle forze centrifughe e delle centripete, ignorò le loro vere leggi, credendo che queste

attraessero secondo la ragion semplice reciproca delle distanze, e quelle non sapendo risolvere nelle loro direzioni tangenziali, d' onde il moto iniziale si veniva a ridurre a una certa proiezione. Così ebbe anch' egli a giocare di fantasia come il Nardi, ripetendo con lui che il Sole volge in giro intorno a sè il pianeta, spirandogli la forza, *ad instar venti alicuius perpetui.* (Florentiae 1665, pag. 61).

Ignorata la ragione del moto proiettizio ne' suoi principii, da' quali resultava che un mobile attratto a un centro, con forze reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze, descrive intorno a esso centro una curva, che dal circolo via via si trasformerebbe in ellisse, in parabola, in iperbola, secondo che sempre maggiore si facesse la proiezione iniziale; il Borelli si trovò anche un' altra volta a dover imitare le immaginazioni del Nardi. E come questi avea fatto ricorso all' azion del Sole, che interrottamente spirando i suoi effluvi fa ondeggiare il pianeta, come il vento la chioma di un albero; così il Borelli rassomigliò esso pianeta galleggiante nell' etere a un cilindro galleggiante nell' acqua, che, sommerso una volta più giù di quel che non importi alla sua gravità in specie, ritorna in su reciprocando le sue vibrazioni di andare e di venire con vicenda, che sarebbe perpetua, se non trovasse impedimento nel peso e nella viscosità del liquido, come, secondo che credevasi allora, non ne trovano nel sottilissimo etere i vaganti corpi celesti. Di qui è a concludere che le *Theoricae Mediceorum* preparano quelle vie al Newton, che esse stesse trovarono dal Nardi già preparate, e così la luce venuta a illuminare le tenebre del mondo, apparita in Germania, non si diresse verso l' Inghilterra fortunata, se non che dopo essersi, come da specchio, riflessa dall' Italia.

Del Viviani sembrerebbe che poco rimanesse a dire, non essendosi in questa lunga Storia della Meccanica toccato quasi argomento, in cui egli non sia entrato, e non v' abbia preso gran parte. Un intento unico però, quasi meta de' suoi desideri, abbiamo fin qui scorto nell' opera di lui, qual è di esplicare, di correggere e di promovere i teoremi (non sempre dimostrati, ma talvolta solamente proposti da Galileo) in commentari, da sottoscriversi in note, e in appendici ai dialoghi delle Due Scienze nuove. Preludevano a questi, chi ben considera, gli altri dialoghi del Mondo, in cui le leggi più generali del moto, richiamate destramente dai conversanti a proposito del moto della Terra, si dimostravano con discorsi accomodati all' intelligenza delle menti volgari. Ma se queste ne ritraevano utilità con diletto, ai Filosofi frettolosi di passar dai principii alla conclusione riuscivano quelle lunghe digressioni di tedio, e divagatrici del pensiero: incomode poi tornavano agli studiosi, i quali avrebbero voluto meglio apprendere così fatte dottrine da un libro, scritto con la brevità e con l' ordine di un trattato.

A tale ufficio desideratissimo attese dunque il Viviani, e con tale intenzione fu incominciata da lui quella scrittura, che nel Tomo VII, Parte V de' Manoscritti di Galileo, si legge dal foglio 89 al 95, sotto il titolo *Varie proprietà del moto dei gravi naturale e violento.* Raccoglie quivi e dà or-

dine l'Autore alle principali proposte, che ricorrono nella terza giornata delle Due nuove Scienze, e riducendo il trattatello a un semplice memoriale, con mettere solamente e dichiararne le tesi, apre ai lettori la via di ritrovarne per sè medesimi le dimostrazioni. Nel Tomo XXXIV de' Manoscritti del Cimento, dal foglio 54 al 113, si trovan raccolti i materiali, per trattare *Delle gravità specifiche e assolute,* e ivi pure, dal foglio 114 al 145, e dal foglio 204 al 208, si trova il principio posto a due altri libri, il primo de' quali s' intitolava *Del moto dei gravi,* e il secondo *De momentis gravium in genere.* Per chi poi volesse avere un saggio della lucida brevità, con la quale il Viviani esponeva le dottrine meccaniche del suo Maestro, sceglieremo da varie Note le due seguenti, perchè si possano confrontare con que' lunghi discorsi tenuti da Galileo nè' Dialoghi, e in varie altre scritture minori, per confutar gli errori, che intorno alle cadute naturali dei gravi erano stati detti già da Aristotile, e che tuttavia si ripetevano dai seguaci di lui:

« I. Si domanda ai signori Peripatetici se, lasciando cadere a basso mille particole di legno, come per esempio una giumella di segatura, ei credano che tutte scendessero con pari velocità. Credo sian per rispondere di sì. Se dunque queste particole si accosteranno insieme, e si attaccassero in modo, che tra loro non restasse aria (che è il mezzo nel quale si pone che si muovano) domandisegli se credono che queste continuassero il moto con la medesima velocità di prima, poichè non potendo altri, anche per detto loro, conferir più di quello che esso ha, non mi pare che assegnar si possa quali fossero quelle particole, che augumentassero la velocità alle altre loro similissime e ugualissime. »

« Diranno forse che, quando altro acquisto non ci fosse, vi sarebbe la diminuzione della superficie, la maggior parte della quale si occulta nelle attaccature. E concedendo che la confricazione del mezzo con la superficie del mobile ritarda la di lui velocità, soggiungeranno che perciò quelle molte particole, ridotte in un sol corpo di superficie grandemente minore, acquisteranno velocità nel moto. »

« Se tale sarà la risposta loro, diranno benissimo, perchè basta che eglino concedano e sian capaci che, non per accrescimento di velocità, ma per diminuzione di superficie, cioè, per diminuzione dell' impedimento del mezzo, si cresce la velocità. E se di ciò volessero anche più chiara esperienza considerino come una foglia d' oro battuto, che sotto così gran superficie discende per aria lentissimamente, ridotta poi in un piccolo globetto scende cento volte più veloce, benchè il peso sia lo stesso. Ma quanto importi l' impedimento del mezzo si ha manifesto da una palla, che venga cacciata dalla artiglieria, alla quale l' impedimento di non molte braccia di acqua, che ella incontri dopo il moto per l' aria, talmente ritarda la sua velocità, che la sua percossa ne resta fiacchissima. Eppure l' acqua, come priva in tutto di tenacità, non resiste con altro che col doversi movere lateralmente, come a lungo dimostrò il Galileo nel suo trattato delle Galleggianti » (MSS. Gal. Disc., T. CXXXV, fol. 15).

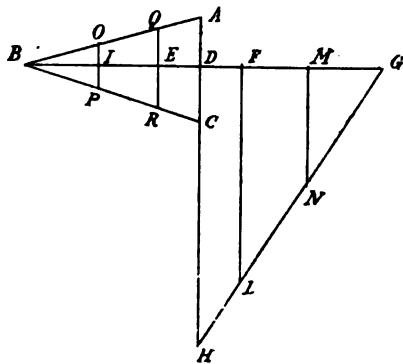
« II. Dicunt aliqui gravia, quae deorsum feruntur, magis semper intendi in motu, quia pauciores partes aeris sibi scindendae restant, quod quidem falsum videtur. Nam, si tunc grave velocius fertur, quando pauciores partes aeris sunt scindendae; ergo, si aliquod grave ab altissimo loco demittatur, ut ab aliqua turri, cuius altitudo sit 100, idem autem demittatur ab alio loco, cuius altitudo sit 10; celerius movebitur in fine huius altitudinis, quae est 10, quam in medio altioris altitudinis, puta ut 50, quod absurdum videtur » (ibid., fol. 25).

Da queste e da simili altre Note, dai titoli de' trattati dianzi trascritti, dai teoremi dimostrati intorno ai pendoli, ai momenti de' gravi lungo i piani inclinati, alle resistenze de' solidi, per tacere di tante altre cose; si conferma esser quale si disse la principale intenzione di questi studi intorno alla Scienza meccanica fatti dal Viviani. Ma venivano spesso spesso a stimolarlo gli esempi degli altri Colleghi suoi, ritrovatori di verità nuove, in campi non punto meno fertili di quegli stessi coltivati da Galileo, com' era per esempio la Centrobarica, che apparita maravigliosa in sè stessa prometteva di aprir la via a cento altre non meno mirabili invenzioni. Ciò fu che mosse il Viviani a comporre quel trattatello *Dei centri di gravità*, e a distendere quelle proposizioni spicciolate, che s' hanno raccolte ne' tomi LXXI, XCII della citata collezion manoscritta dei Discepoli di Galileo. E per chi credesse non esser nulla rimasto a chi, dopo il Torricelli e il Nardi, il Cavalieri e il Ricci, s'assideva al medesimo convivio; sceglieremo dal detto manoscritto le sei proposizioni seguenti, dalle quali apparirà come ben sapesse l'Autore una esercitazione già fatta trattare con metodi nuovi, o promoverla oltre a quel che non aveva ancora pensato nessuno dei predecessori: e le relazioni date da loro in funzioni algebriche, per alcune figure circoscritte da qualche arco di cerchio, riducesse a numeri, quanto più prossimamente era possibile, determinati.

Figura 310.

« Propositio I. — *Centrum gravitatis curvae superficiei coni recti ABC* (fig. 310), *cuius axis BD, hanc dividit in E, ita ut BE sit dupla ED, adeo ut idem sit centrum gravitatis curvae, et centrum gravitatis trianguli per axem coni.* »

« Producta axe BD, sumatur ipsi aequalis DG, ac DF aequalis DE, et quaevis DM aequalis DI: sumptaque DH aequali circumferentiae circuli AC, basis coni, iungatur GH, et in triangulis ABC, GDH sint per I, E, et per F, M ductae OP, QR, FL, MN parallelae ipsi AC: BG vero concipiatur tamquam libra horizontalis appensa ex D. »

« Jam, cum sit DE tertia pars DB, et DF erit pars tertia DG, ac ideo

centrum gravitatis trianguli rectanguli GDH sui momentum exercet per lineam FL. Et cum sit DH ad FL ut DG ad GF, vel, ob aequalitatem, ut DB ad BE; vel, ob homologorum laterum in similibus triangulis ADB, QEB proportione laterum, ut DA, radius basis coni, ad EQ, radium circuli in cono per E ducti, vel ut periferia AC in conica superficie ad superficiem QR in eadem conica utcumque sit secta, DH aequalis periferiae ADC, ex constructione; erit quoque recta FL aequalis periferiae QR. Sed illa gravitat in F, haec vero in E, suntque distantiae DF, DE inter se aequales, prout sunt magnitudines; ergo in D inter se aequiponderant. »

« Eadem penitus ratione ostendetur recta MN aequalis esse, et aequiponderare in D cum periferia OP, ex aequalibus distantiis DI, DM, et hoc semper. Ergo omnes simul rectae in triangulo GDH, sive ipsum triangulum, aequale est ac aequale momentum habet circa D cum omnibus simul periferiis, hoc est cum conica superficie curva ABC. Quare ipsarum superficierum centra gravitatis aeque distant a D. Sed centrum trianguli gravitat in F, ergo centrum curvae conicae est in E, prout ostendere propositum fuit. » (MSS. Gal. Disc., T. LXVI, fol. 99).

Il Torricelli in tre modi dimostrò questa medesima proposizione, e il Viviani volle far vedere che non perciò la fecondità era esaurita. Ma così esso Torricelli, come tutti gli altri, si limitarono alla ricerca del centro di gravità della sola superficie conica convessa, e il Nostro pensò che si poteva anche oltre promoverla, comprendendovi il circolo base. Così, del centro della universale superficie del solido, riuscì a dare elegantemente questa nuova indicazione.

« Propositio II. — *Centrum gravitatis universae superficiei coni recti sic dividit axem, ut pars ad verticem coni sit ad reliquam ad basim ut tres radii basis, cum duplo lateris coni, ad latus idem coni.* »

« Esto ABC (fig. 311) triangulum per axem BD, quo secto in E, ut DE sit pars tertia totius BD, constat in E esse centrum gravitatis curvae conicae ABC, et in D centrum gravitatis circuli suae basis. Sed curva conica ad basim est ut latus BA ad AD, ergo, si DE secetur in F, ita ut DF ad FE sit ut BA ad AD, erit F centrum gravitatis utriusque superficiei. Sed BF constat ex duabus DF, et ex tribus FE; FD vero ex unica FD: duo autem DF exhibent duo latera AB, et tres FE exhibent tres AD, ac unica DF unicam AB, quod sit DF ad FE ut BA ad AD. Quare BF ad FD est ut duo DF, cum tribus FE, ad ipsum FD, vel ut duo latera AB, cum tribus radiis AD, ad idem latus AB, quod etc. » (ibid., fol. 102).

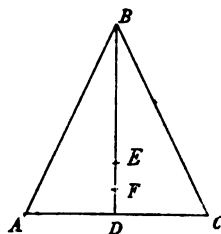



Figura 311.

Abbiamo infatti BF = BE + EF = 2 DE + EF = 2 (DF + EF) + EF = 2 DF + 3 EF, e di qui la proporzione BF : DF = 2 DF + 3 EF : DF. Ma essendo per la legge delle equiponderanze DF : EE = AB : AD, sarà anche insieme 2 DF : 3 FE = 2 AB : 3 AD. Componendo, 2 DF + 3 FE : 2 DF = 2 AB + 3 AD : 2 AB. Dividendo i conseguenti per due, se ne conclude immediatamente la relazione BF : DF = 2 AB + 2 AD : AB.

Anche il centro di gravità della callotta sferica era stato ritrovato dal Torricelli per la sola parte curva della figura, escluso il circolo base, ma il Viviani passò oltre a indicarne così il punto sull'asse, dove gravita la superficie universale.

« Propositio III. — *Centrum gravitatis universae superficiei portionis sphaericae sic dividit axem, ut pars ad polum terminata sit ad reliquam, ut axis portionis reliquae, cum semiaxe sphaerae, ad ipsum semiaxem: vel, ut duplum basis portionis sphaericae, una cum eius curva superficie, ad ipsam curvam.* »

Figura 312.

« Esto ABC (fig. 312) sphaerae portio, cuius axis BD, diameter basis AC, et axis totius sphaerae BE. Jam constat quod, secto BD bifariam in F, id est centrum gravitatis curvae superficiei ABC. Sed D est centrum circuli AC, ergo utriusque simul superficiei centrum gravitatis est inter F et D, ut in G. Dico BG ad GD esse ut axis DE, cum dimidio axis EB, ad ipsum dimidium. »

« Jungantur AB, AE. Erit ergo, ob aequilibrium in G curvae ABC cum circulo AC, FG ad GD ut circulus AC ad curvam ABC, vel ut quadratum radii DA ad quadratum radii BA, cuius circulus aequatur ipsi curvae superficiei ABC, vel, ob triangulorum DAB, DEA similitudinem, ut quadratum DE ad quadratum EA, vel ut linea DE ad tertiam proportionalem EB in semicirculo BAE. Et componendo, FD ad DG ut DE cum EB ad EB. Et dividendo, BG ad GD ut duplum DE cum EB ad EB, vel, sumptis horum dimidiis, ut una DE cum dimidio EB, seu cum semiaxe sphaerae, ad dimidium EB, vel ad ipsum semiaxem, quod erat primo etc. » (ibid., fol. 108).

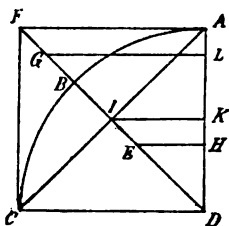
Per passare al secondo modo, o alla seconda forma, sotto la quale la medesima verità propone l'Autore a dimostrarsi, si osservi che fu già concluso $FG : GD = DE : EB$. Ma $AE^2 = EB . ED$, $EB^2 = EB^2$ d'onde $ED : EB = AE^2 : EB^2 = DA^2 : AB^2 = \pi DA^2 : \pi AB^2$, e perciò $FG : GD = \pi DA^2 : \pi AB^2$. Componendo, $FD : DG = \pi DA^2 + \pi AB^2 : \pi AB^2$. Duplicando gli antecedenti, $BD : DG = 2 \pi DA^2 + 2 \pi AB^2 : \pi AB^2$. E in ultimo dividendo, $BG : GD = 2 \pi DA^2 + \pi AB^2 : \pi AB^2$. Ora essendo la superficie di una callotta sferica uguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo grande, ossia essendo uguale a $\pi BD . BE = \pi AB^2$, e dall'altra parte rappresentandosi da πDA^2 il circolo descritto col raggio AD, sopra il quale la cupola risiede; è manifesto che il punto G sega così l'asse, che la parte verso il polo abbia alla rimanente la proporzion medesima, che la doppia base con la callotta ha alla callotta sola, secondo che così il Viviani soggiunge nel suo foglio:

« Sed DE ad EB est ut quadratum AE ad quadratum EB, vel ut quadratum DA ad quadratum AB, vel ut circulus ex radio DA seu basis portionis ABC, ad circulum ex radio AB, vel ad curvam superficiem portionis; ergo BG ad GD est quoque ut duae bases portionis sphaericae ABC, cum curva eius superficie, ad ipsam curvam » (ibid.).

Che se BE $=$ 2 BD, ossia se la callotta' sia emisferica, tornerà la superficie di lei, ch' era $2\pi BD^2$, ossia πAB^2, espressa da $2\pi DA^2$, e perciò $BG : GD = 2\pi DA^2 + 2\pi DA^2 : 2\pi DA^2 = 2 : 1$, come il Viviani stesso soggiunge in questo suo *Corollario:* « Hinc centrum gravitatis universae superficiei haemisphaericae sic axem dividit, ut pars ad polum terminata sit ad reliquam, ut duo ad unum: tunc enim duae bases aequantur uni curvae, et duae bases cum curva duplae sunt unica curva, adeoque et pars ad polum terminata reliquae ad centrum basis dupla erit » (ibid.).

« PROPOSITIO IV. — *Centrum gravitatis E* (fig. 313), *quadrantis circuli ABCD, cuius centrum D, axis DB, ita hunc secat, ut totus BA, ad partem DE attingentem centrum D arcus ABC, sit quam proxime ut 5 ad 3. Circumscripto vero quadranti huic quadrato ADCF, centrum gravitatis G trilinei ABCF sic dividit axem DF, ut radius DB ad DG sit quam proxime ut 10 ad 11.* »

Figura 313.

« Quoad primum, diameter FD secetur bifariam in I, atque ex G, I, E super DA ducantur perpendiculares GL, IK, EH, et concipiatur figura converti circa AD. »

« Jam constat cylindrum a quadrato AC, ad hemisphaerium a quadrante ABCD, esse ut 3 ad 2, sive ut 42 ad 28. Sed ipse cylindrus ad ipsum hemisphaerium, ex Centrobaryca, rationem habet compositam ex ratione quadrati ad quadrantem, sive ex ratione proxime 14 ad 11, sive ex ratione 42 ad 33, et ex ratione distantiae IK ad distantiam EH centrorum gravitatis quadrati et quadrantis ab axe revolutionis AD, atque etiam 42 ad 28 rationem habet compositam ex 42 ad 33, et ex ratione 33 ad 28, et ratio quadrati ad quadrantem est ut 42 ad 33; ergo ratio distantiae IK, ad rationem EH, est ut 33 ad 28, velut ut 9 ad $7 + {}^7/_{11}$. Qualium ergo partium IK est 9, talium EH est $7 + {}^7/_{11}$, et talium DC, quae dupla est ipsius IK, quae est 9, erit 18. »

« Sed DB vel DC latus quadrati AC, ad diametrum DF, vel ad AC chordam arcus ABC, est ut 5 ad $7 + {}^1/_{14}$, vel ut 18 ad $25 + {}^{16}/_{35}$; ergo tam DF quam AC, cum sit DB partium 18, erit earumdem $25 + {}^{16}/_{35}$, et DI, dimidium ipsius DF, erit $12 + {}^{51}/_{70}$. Sed IK 9, ad EH $7 + {}^7/_{11}$, est ut DI $12 + {}^{51}/_{70}$ ad DE, quae invenitur partium earumdem $10 + {}^4/_5$, et DB inventa est earumdem partium 18; ergo radius BD, ad distantiam DE a centro quadrantis ad eius centrum gravitatis, est ut 18 ad $10 + {}^4/_5$, vel ut 90 ad 54, vel ut 10 ad 6, vel ut 5 ad 3, quod erat primo demonstrandum. »

« *Scholium.* — Cum sit arcus ABC quadrantis, ad ${}^2/_3$ chordae AC, ut BD ad DE, quod E sit centrum gravitatis quadrantis, vel ut 5 ad 3, ex modo assertis, vel ut 10 ad 6; erit idem arcus ad totam chordam ut 10 ad 9. »

« *Corollarium.* — Hinc, sumptis quadruplis, perimeter circuli, ad perimetrum quadrati inscripti, est proxime ut 90 ad 36, vel ut 10 ad 9 » (ibid., T. XCII, fol. 21).

« Quod vero ad secundum, hoc in theoremate propositum, cylindrus a

quadrato AC revoluto circa AD, ad rotundum a trilineo ABCF circa AD, est, ex eadem Centrobaryca, in ratione composita quadrati AC ad trilineum ABCF, hoc est in ratione 14 ad 3 proxime, vel 42 ad 9, et ex ratione distantiae IK ad distantiam GL eorum centrorum gravitatis I, G ab axe AD. Sed cylindrus ad rotundum est ut 3 ad 1, vel ut 42 ad 14; ergo 42 ad 14 rationem habet compositam ex ratione 42 ad 9, et ex ratione earumdem distantiarum IK, GL. Sed 42 ad 14 habet quoque rationem compositam ex 42 ad 9, et ex 9 ad 14, et ex his prima ratio est ea, quae inter quadratum et trilineum; ergo secunda ratio inter 9 et 14 erit ratio distantiarum IK, GL. Sed IK inventa est partium 9, qualium DB erit 18; ergo GL est earumdem 14. Sed IK ad GL est ut DI ad DG, ergo etiam DI ad DG est ut 9 ad 14. Sed DI inventa est earumdem partium $12 + {}^{51}/_{70}$, si fiat ergo ut 9 ad 14, ita $12 + {}^{51}/_{70}$ ad aliam, quae est $19 + {}^{4}/_{5}$ totidem partium, erit ipsa DG, ad quam radius DB erit ut 18 ad $19 + {}^{4}/_{5}$, vel ut 90 ad 99, vel ut 10 ad 11, quod erat secundo ostendendum » (ibid., fol. 18).

« Propositio V. — *Centrum gravitatis G, in eadem figura, trilinei ABCF sic dividit rectam FD iungentem eius verticem F, et centrum D sui arcus ABC, ut tota FD ad DG sit quam proxime ut 9 ad 7. — Insuper ipsum centrum gravitatis G trilinei AGCF sic dividit eius axem FD, ut pars FG ad F, ad partem GB ad B, sit quam proxime ut 22 ad 7, vel ut circuli periferia ad diametrum.* »

« Et primo, cum sit IK 9 et GL 14, sitque DI $12 + {}^{51}/_{70}$, cumque ut IK ad GL ita sit DI ad DG; erit DG $19 + {}^{28}/_{35}$. Sed tota DF est $25 + {}^{16}/_{35}$, ergo DF ad DG erit ut $25 + {}^{16}/_{35}$ ad $19 + {}^{28}/_{35}$, vel ut 891 ad 693, vel ut 99 ad 77, vel ut 9 ad 7. Et convertendo, DG, ad DF ut 7 ad 9, quocirca centrum gravitatis trilinei ABCF distat a centro D sui ipsius per distantiam DG, ad quam tota diameter FD quadrati circumscripti proprio quadranti sit quam proxime ut 9 ad 7. »

« Secundo, cumque DB ad DG sit quam proxime ut 10 ad 11, et DG ad DF, ex nuper ostensis, quam proxime ut 7 ad 9, vel ut 11 ad $14 + {}^{1}/_{7}$; tres DB, DG, DF erunt ut 10, 11, $14 + {}^{1}/_{7}$, vel ut 70, 77, 99. Quare ipsarum differentiae BG, GF erunt ut hi numeri 7, 22, adeoque centrum gravitatis G trilinei ABCF secat sic eius axem FB, ut pars ad F, ad partem ad B, sit quam proxime ut 22 ad 7, vel ut circuli periferia ad suam diametrum. »

« *Scholium.* — Propterea cum qualium partium DB ponitur 10, talium DE sit quam proxime 6, et DI $7 + {}^{1}/_{14}$, et DB 10, et DG 11, et DF $14 + {}^{2}/_{14}$; ipsae DE, DI, DB, DG, DF erunt ut hi numeri 84, 99, 140, 154, 198. Et, cum DE, DB, DG sint ut 84, 140, 154, in minimis terminis essent ut 6, 10, 11 » (ibid., fol. 19).

Termineremo questo breve ordine di proposizioni baricentriche con una relativa alla Cicloide, e che senza dubbio è posteriore al trattato wallisiano *De centro gravitatis,* supponendovisi la rettificazion della curva, pubblicata quivi dal Matematico inglese nella seconda parte della proposizione XXII,

benchè il Roberval, come si vide, l'avesse dimostrata assai prima. Vi si suppone altresì noto il centro di gravità della linea semicicloidale: ma nè lo stesso Pascal sdegnerebbe di vedere aggiunto alla sua ricca e pellegrina corona di teoremi questo fiore elegante, colto nella medesima aiola dal nostro Viviani.

« PROPOSITIO VI. — *Esto ABC* (fig. 314) *Cyclois primaria, cuius diameter BD, sitque rectangulum BDAE, et curvae AIB sit centrum G, a quo demittatur GF perpendicularis super BD, sumaturque HF aequalis dimidio AD, et fiat revolutio circa BD: cylindrica superficies ab AE, ad rotundam semicycloidis AIB, est ut FH ad FG distantia centri gravitatis arcus AIB ab axe BD.* »

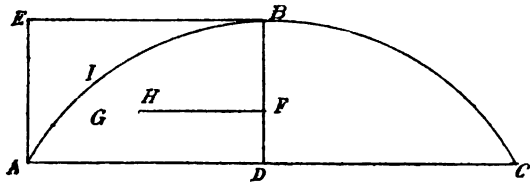



Figura 314.

« Nam, sumpta rotunda a recta AE, ad rotundam AIB, esse in ratione composita rectae AE ad curvam AIB, sive 1 ad 2, sive FH ad AD, et ex distantia AD centri gravitatis AE a BD, ad FG distantiam centri gravitatis curvae AIB: hae rationes conficiunt rationem rectae FH ad FG, quod erat demonstrandum » (ibid., fol. 32).

Nè a queste sole eleganze s'arrestano le ricerche intorno ai centri di gravità, fatte dal Viviani, le quali si estesero all'emiperboloide, alla lunula, e ad altre figure, rimaste inscritte ne' cerchi; come furono altresì frutto degli infaticabili studii di lui que' teoremi, che si dimostrano intorno a questo stesso argomento in varii fogli, rilegati insieme nel volume manoscritto, che è il CIX dei Discepoli di Galileo. Anzi in tutti gli altri nove, che vanno sotto il titolo di *Meccanica dei solidi,* sarebbero da raccogliere documenti di non poca importanza. Nel CVI, per esempio, varii assiomi, con proposizioni e corollari, intorno alle forze de' pesi sostenuti da corde; nel CVIII, un trattatello intorno all' arte dei pesi nella stadera; e per tutti i volumi sparsi teoremi, dimostrativi delle proporzioni, secondo le quali si velocitano i gravi discendenti per i piani inclinati, ordinati per verità a illustrare, piuttosto che a promovere la scienza di Galileo o del Torricelli. E tra per questa ragione, e per essere condotte le dimostrazioni per le solite vie oblique, senza far uso cioè del principio della composizion delle forze, abbiamo creduto dover bastare questo cenno, affinchè possano dalla Storia i nostri Lettori far più giusto giudizio dell' opera, data, in coltivar la Meccanica, dal Viviani.

CAPITOLO VIII.

Dei Matematici stranieri principali promotori della Scienza del moto

SOMMARIO

I. Degli otto libri della Statica del Roberval, e come il Wallis e il Mariotte confermarono la Dinamica galileiana, che l' Huyghens coronò di nuovi teoremi. — II. Delle proprietà meccaniche della Cicloide. — III. De centri delle percosse e delle oscillazioni. — IV. Delle forze centrifughe.

I.

S' è narrato fin qui quale e quanta si fosse la cultura della Scienza del moto in Italia, dove Galileo, con l' insegnamento orale e co' libri, s' era fatto maestro. Ne giunse la fama anche appresso gli stranieri, ne' quali parve nascere allora un gran fervore di applicarsi a quei medesimi studii, particolarmente in Francia, dove fiorivano più che altrove gl' ingegni. Le dottrine galileiane, raccomandate là dal Peiresc, dal Carcavy, e dal Beaugrand, in tutti e tre i quali, dalla probità della vita, e dalla dignità del grado si rendeva più autorevole la Scienza; furono accolte in modi e con effetti sì varii, che vogliono essere principalmente notati.

Per alcuni, e furono de' primi, rassomigliasi l' accoglienza a quella di un ospite illustre, a cui non s' attende che a fare onore, e si vuol che tutti gli altri di casa facciano il somigliante, aspramente garrendo coloro, che osassero di contradire. Tale immagine sembra a noi rendersi dal Gassendo, la Meccanica del quale è unicamente istituita a confermare le dottrine galileiane, sia co' ragionamenti, sia con l' esperienze. Abbiamo avuto più volte occasione di citar di lui l' epistole contro Pietro Cazr *De proportione, qua*

gravia decidentia accelerantur, scritte per confermar che quella proporzione, con cui crescono gli spazi, è veramente secondo i quadrati, come Galileo diceva, e non secondo i semplici tempi, come presumevasi dal Gesuita.

Il contradittore, che voleva il Gassendo così confutare, insorse da poi che la legge, annunziata ne' primi dialoghi del Mondo, venne a esplicarsi e a dimostrarsi matematicamente ne' secondi dialoghi del Moto, ma intanto che aspettavasi la pubblicazione di questo libro s' apprendevano dall' altro, che l' aveva preceduto, le principali nozioni di Dinamica nuova. Le verità però si proponevan quivi semplicemente senza dimostrazione: erano conclusioni delle quali i principii, per lo più, rimanevano occulti, e invogliavano gli studiosi a mettersi per sè stessi a ritrovarli. Quanto giovasse una tale palestra, in esercitare gl' ingegni, si può facilmente immaginare, anche senza i fatti narrati: poi, venendosi a leggere in pubblico le Due Scienze nuove, parve facesse Galileo quel che fa il Maestro, quando mette a cimento col proporre una tesi agli scolari, i quali, riscontrando le proprie con le dimostrazioni di lui, son lieti o d' aver colto nel vero, o di vedersi aperti gli occhi a riconoscere il falso.

Una particolar dottrina però avvertì il Gassendo che rimaneva nei nuovi Dialoghi dimenticata così, da desiderarsi di udire ancora il Salviati disputare intorno al farsi tutti i nostri moti, sul veicolo in cui sediamo, sempre allo stesso modo, o egli corra velocissimamente, o stia fermo. Così fatta dimenticanza, comunque sia, non fu volontaria, ma suggerita dal giudizio, non potendosi quel che si dice nella seconda Giornata dei Due massimi sistemi intorno ai proietti conferire con i teoremi, nel quarto dialogo delle nuove Scienze poi dimostrati. Nella detta Giornata infatti si discorre a lungo del moto impresso dal motore, concludendovisi che la palla, tirata con direzione perpendicolare, torna in giù alla bocca del cannone, o stia egli fermo o sia con qualunque velocità tirato sopra una carretta. Il fatto era in sè notissimo anche ai fanciulli, i quali, correndo per via, si gettan sulla testa un pomo, che ritorna a loro in giù nella mano: ma la scienza del fatto dipendeva dalla composizion di due moti, dai quali non seppe Galileo altro dedurre se non che il pomo non rimane indietro, correndo il fanciullo, perchè, sebbene sembri che esso pomo vada e venga nel perpendicolo, ei propriamente descrive in aria una linea *trasversale*. Forse il Gassendo non penetrò più addentro, e quella linea trasversale benignamente interpetrò per una parabola. Ma che parabola fosse restava a dimostrarsi, ed è ciò ch' egli intese di fare in quelle sue epistole *De motu impresso a motore translato*.

« Ipse recensui obiter (scriveva l' Autore nell' Epistola prima, dopo poche parole d' introduzione) tum observata propria, tum quae Galileus congessit adstruendo illi theorematì: *Si id corpus, cui insistimus, transferatur; omnes nostros motus, rerumque a nobis mobilium, perinde fieri appareque, ac si illud quiesceret*..... Experimentum vero facillimum est ut dum deambulabis pilam lusoriam, aliumve globum manu tenens, remque explores » (Opusc. philos., Florentiae 1727, pag. 436). Più mirabile e più diffi-

cile a intendere ti sembrerà, soggiunge a Pietro Puteano, ciò che avviene, quando tu, correndo velocemente sopra un cavallo, apri la mano, in cui tenevi una palla, la quale tu vedi cadere a perpendicolo sotto la sella, benchè avesse cominciato a moversi in giù tanto di più lontano. Ella dunque t'ha seguito in tutto il cammino, inflettendosi per una linea che, se avesse lasciata di sè visibile traccia per l'aria, troveresti essere la trasversale non retta ma curva. « Causa vero cur motus pilae a rectitudine deflectatur, et curvam sequatur describatque lineam, illius compositio est, quatenus ex duplici vi motrice originem habet » (ibid., pag. 438), e da questa duplice virtù motrice dimostra resultarne una semiparabola.

Per l'amore, con cui il Gassendo accolse, commentò e diffuse le dottrine di Galileo, si meritò la riconoscenza dei Discepoli, i quali più volte commemorarono solennemente il Filosofo francese nella loro Accademia fiorentina. E quasi, per far eco alle applaudite epistole *De motu impresso,* instituirono e descrissero nel loro libro dei *Saggi* quelle esperienze, in confermazione di quel che asserisce in più luoghi il medesimo Galileo « che la virtù impressa ne' proietti, per novella direzione di moto, non si distrugge » (Firenze 1841, pag. 163).

Ci furono però in Francia, insieme col Gassendo, altri, che delle dottrine, insegnate ne' dialoghi dei due Massimi sistemi intorno alle proprietà del moto, si fecero acuti e liberi censori. A un geometra così profondo, come era il Fermat, non sfuggì quello, in cui era trascorso Galileo, quando assegnò l'orbita circolare al sasso cadente dall'alto di una torre, movendosi in giro la Terra, e dette al Carcavy, perchè la mandasse a leggere allo stesso Galileo, la dimostrazione che la detta orbita, nel medesimo supposto, doveva rassomigliarsi invece a una spirale. Consapevole di tutto ciò era il Mersenno, quel buon padre, disse il Dati, atto meglio a raccogliere e a promovere le altrui invenzioni, che a mettere in luce le proprie « facendo come quei mercatanti che, per iscarsezza di loro avere, malamente potendo far negozi, sfogano il genio loro guadagnando pure assai nel contrattare, e mettere in vendita le merci altrui » (Lettera a' Filaleti cit., pag. 6). Si potrebbe anche bene rassomigliare a quell'aure instabili, o a quegl'insetti faccendieri, che trasportano il polline per fecondarne qua e là gli aperti fiori; il qual ufficio e il qual genio mostrò il Padre di averlo veramente esercitato e portato in tutti i libri che scrisse, incominciando dai primi, ch' egli fuse poi in quel volumone in foglio, intitolato *De la nature des sons, des mouvemens, et de leurs proprietez,* stampato a Parigi nel 1635. Fu qui che, negoziando la scrittura fatta dal Fermat sopra la linea, che descrive il cadente, cavando la dimostrazione dallo scrigno privato, per metterla in pubblico corso; esaminò prima il Mersenno, nella III proposizione del secondo suo libro, quel che Galileo dice del peso, che scendendo dall'alto di una torre giungerebbe a toccare il centro terrestre, passando per una mezza circonferenza, e poi soggiunse immediatamente una proposizione così formulata: « Monstrer qu'il est impossible que les corps pesans, descendans iusques au centre de la

Terre, descrivent le demicercle precedant, et donner la ligne, par la quelle ils descendroient si la Terre tournoit en 24 heures auteur de son assieu » (pag. 96).

Ma la linea descritta dai cadenti si riduceva a una speculazione geometrica, che aveva il suo fondamento nella composizione dei moti, per cui non fa maraviglia che avesse intorno ad essa fallato quel Galileo, dal quale erasi data la sentenza non si poter comporre di due moti retti un moto circolare (Alb. I, 446). Le nuove cose di Meccanica però, che si proponevano ne' dialoghi dei Due massimi sistemi, non tutte erano di questa natura: vi si definiva per esempio il tempo, che impiega un grave a passare lo spazio di cento braccia; la proporzion dei momenti de' mobili lungo i piani più o meno inclinati; l' equidiuturnità de' pendoli di varia mole, per qualunque ampiezza d' arco oscillanti, e simili altre cose, la verità delle quali si pretendeva, non senza ragione, che dovess' essere confermata dall' esperienza. Ora parve a quei censori Parigini che troppo confidentemente avesse Galileo asserite le sue proposizioni, le quali perciò messero in dubbio, avendole trovate, non solamente non riscontrare, ma spesso contradire ai fatti osservati. Il Mersenno, alla proposizione VII del secondo libro citato, scritta per dimostrare il momento dei pesi lungo i piani inclinati, e per determinare se il cadente passa, come diceva Galileo, per tutti gl' infiniti gradi di tardità; aggiunse un tal corollario:

« Je doute que le sieur Galilee ayt fait les experiences des cheutes sur le plan, puis qu'il n'en parle nullement, et que la proportion qui donne contradit souvent l'experience: et desire que plusieurs esprouvent la mesme chose sur des plans differens avec toutes les precautions, dont ils pourront s'aviser, afin qu'ils voyent si leurs experiences respondront aux nostres, et si l'on en pourra tirer assez de lumiere pour faire un theorema en faveur de la vitesse de ces cheutes obliques, dont les vitesses pourroient estre mesurees par les differens effets du poids, qui frappera dautant plus fort que le plan sera moins incliné sur l'horizon, et qu'il approchera davantage de la ligne perpendiculaire » (ivi, pag. 112).

Le censure del Mersenno potevano approvarsi per quel che riguarda il tempo speso dal cadente a passare le cento braccia, o l' isocronismo dei pendoli, qualunque fosse l' ampiezza dell' arco descritto dalle loro vibrazioni. Ma rispetto alla proporzion dei momenti, con cui scendono i gravi lungo i piani inclinati, non potevano l' esperienze infirmare la verità dei teoremi galileiani, avendo supposto l' Autore che venisse dal mobile rimosso tutto ciò che, per via dell' attrito dell' aria, o di qualsivoglia altro accidente ne impedisce la libera caduta. Di qui è che, sembrando impossibile sperimentare nel vuoto, e senza che dal grave si tocchi, almeno in alcuni punti, il piano soggetto, si vede la necessità del non corrispondere esattamente alle leggi matematiche i fatti osservati. Presto per tal rispetto cessarono i dubbi, ma intanto le libere censure del Mersenno, dop' aver tolta agl' insegnamenti di Galileo quella fedeltà di ossequio, con cui gli aveva accolti il Gassendo, suscitarono nel-

l'animo dei Matematici parigini un baldanzoso spirito di emulazione. Non sappiamo per verità con qual coscienza il Cartesio potesse dir sua la scoperta delle leggi, con cui si accelerano i gravi, e suoi, nella Dinamica nuovamente instituita in Italia, tanti altri teoremi: ma, mentre tutto il mondo applaudiva all'opera del nostro Italiano, consentendogli volentieri che le due Scienze ivi istituite fossero propriamente nuove; non si può non ascoltare con maraviglia il Roberval vantarsi di queste cose col Torricelli: « At Mechanicam a fundamentis ad fastigium novam extruximus, reiectis omnibus, praeter paucos admodum, antiquis lapidibus, quibus illa constabat » (Ouvr. cit., pag. 396). E soggiunge di non ammettere nessun nuovo postulato, come fa Galileo, e come fai tu. « Vir clarissime, qui propositione prima libri primi *De motu gravium descendentium* ad id demonstrandum novo postulato usus es, quod quivis non facile concesserit, quia pondera, quae proponis, non libra rigida et recta, ut fieri solet, sed fune molli ac perfecte plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc libra utimur modo usitato disposita, cuius beneficio propositionem illam non aliter demonstramus, quam aut vectem aut axem in peritrochio. Eam autem iam ante quindecim annos invenimus, atque anno 1636, tamquam Mechanicae nostrae prodromum, praelo commisimus atque vulgavimus, sed gallico idiomate » (ibid., pag. 397). La notizia è tale, da non si passar per noi senza un breve esame questa nuova Meccanica robervalliana condotta come si dice dai fondamenti al suo più alto fastigio, senza che da Galileo o da nessun altro degli antichi sia stato preso per l'edifizio altro che qualche pietra.

È divisa l'opera in otto libri, in ciascuno de' quali dice il Roberval esser questi i soggetti via via trattati: I. Se si dia un centro delle virtù potenziali in universale. II. Della Libbra, e degli Equiponderanti. III. Dei centri di gravità delle varie figure. IV. Di alcune mirabili proprietà delle forze applicate alle funi. V. Delle macchine, e degli strumenti. VI. Delle potenze, che agiscono in vari mezzi. VII. Dei moti composti. VIII. Dei centri delle percosse.

Per dar di queste cose al Torricelli qualche saggio, sceglieva il Roberval dal quarto libro alcuni teoremi, fra' quali quello della fune tesa, che gravata nel mezzo da un peso anche piccolissimo o s' inflette o si rompe, senza che sia possibile a qualunque gran forza ridurla mai in dirittura. Nè temeva gli rinfacciasse il Torricelli che la questione era già trattata da Galileo, avendo pronta la risposta col dire ch' essendo il problema, infine al quarto dialogo delle nuove Scienze, mal risoluto, egli era propriamente il primo, che ne avesse data la risoluzion vera, applicandovi il principio dei moti composti. Ma due altri teoremi soggiungeva lo stesso Roberval, per confermare che veramente maravigliosa era questa nuova meccanica delle funi. Il primo si annunziava in questa maniera: « Si tres potentiae, totidem funibus, ad communem nodum religatis, agentes (nodus est quodvis punctum in fune) aequilibrium constituant; tunc describi poterit triangulum, cuius centrum gravitatis sit nodus ipse, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem describerentur triangula sed omnia similia): erunt autem

tunc tres potentiae in eadem ratione cum tribus rectis a centro trianguli ad tres angulos terminatis, ita ut quaelibet potentia homologa sit ei rectae, quae in fune ipsius existit » (ibid).

L'elegantissimo teorema si può, più semplicemente, proporre sotto quest'altra forma: Sia nel triangolo ABC (fig. 315) il centro di gravità F, da cui si conducano le AF, FC, FB ai tre vertici. Se queste tre linee rappresentano tre funi annodate in F, e si supponga che vengano ciascuna tirate da forze proporzionali alle lunghezze, il nodo rimarrà in equilibrio. Costruito infatti il parallelogrammo BFCD, la diagonale di lui FD è la resultante delle forze BF, FC, che tirano in giù, ed è manifestamente essa diagonale in dirittura, contrapposta, e uguale alla AF, essendo ambedue doppie della EF. Se ai lati AB, AC, CB si conducano esternamente o internamente, a qual si voglia distanza, e quanti più piaccia lati paralleli; gl'infiniti triangoli, che ne nascono, son tutti simili, e perciò le distanze dal comun centro di gravità ai respettivi vertici tutte proporzionali.

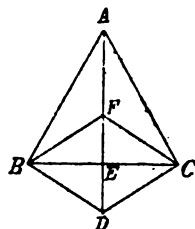
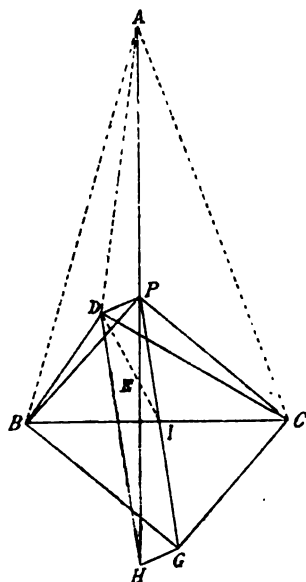



Figura 315.

L'altro teorema analogo così dal Roberval si proponeva: « Si quatuor potentiae, non existentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, aequilibrium constituant; tunc quod supra de triangulo dictum est de quadam pyramide tetragona verum erit » (ibid.).

Figura 316.

Sia ABCD (fig. 316) la piramide tetragona, col vertice in A, e avente per base il triangolo BDC, col centro di gravità in E. Congiunta la AE, la quale sia segata in F talmente, che AF riesca tripla di FE, sarà in F il centro di gravità della piramide. Se ora, come ad A la AF, si conducano dal medesimo punto F agli altri tre vertici in basso le FD, FB, FC, e s'intenda esser queste altrettante funi applicate a tirare il nodo F, con forze proporzionali alle rispettive lunghezze; dice il Roberval che le forze traenti in basso equivalgono a quell'unica AF, che tira in alto, per cui il nodo F starà fermo.

Che sia vera l'asserita uguaglianza tra le forze opposte, si dimostra assai facilmente, componendo le BF, FC nella FG, e questa con la DF nella FH, costruendo il parallelogrammo DG, di cui essa FH sarà diagonale, che procederà nella medesima dirittura con la AF, e sarà la resultante unica delle tre forze inferiori. Che poi questa resultante sia uguale ad AF, per cui le due forze, tirando contrariamente, deve il nodo F permanere nell'equilibrio, consegue dalla similitudine dei triangoli DEH, FEI i quali danno la pro-

porzione DE : EI = EH : EF. Ma DE è doppia di EI, dunque anche EH è doppia di EF, della quale essendo FH e AF ambedue triple, saranno dunque queste due linee, o le due forze che rappresentano, fra loro uguali.

Tali erano le eleganze, che il Roberval dava al Torricelli, per saggio del IV libro della sua Meccanica. Dal V poi sceglieva la dimostrazione di un tal paradosso: se un corpo A (fig. 317) sia dal piano BC premuto con quanta forza si voglia sul piano inclinato DE, e i due piani si suppongano perfettamente rigidi e fra sè paralleli, il detto corpo interposto scenderà in ogni modo lungo il declivio DE, se da qualche forza straniera non vi sia ritenuto. Altra cosa di minor curiosità, ma di maggiore importanza, faceva il Roberval notare in questo suo libro, ed era che, nel trattar de' gravi scendenti lungo i piani inclinati, « non tantum casum consideravimus, qui solus ab omnibus attenditur, cum scilicet potentia pondus in plano inclinato positum retinens, agit per lineam directionis ipsi plano parallelam, sed et dum eadem linea directionis aliam quamcumque positionem obtinuerit, quo pacto ratio ponderis ad potentiam infinite mutatur » (Ouvrag. cit., pag. 397).

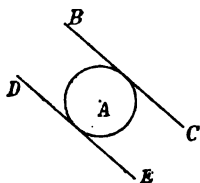



Figura 317

Sia sul piano inclinato AC (fig. 318) posto il peso D: tutti i Matematici, dice il Roberval, dimostrano che questo sta al suo contrappeso come AC, lunghezza dello stesso piano, sta all' AB sua elevazione, tacitamente supponendo che le forze agiscano in direzioni parallele alle due dette linee. Supponiamo invece che il peso venga sostenuto, con direzione diversa, dalla fune DE, la quale sia presa lunga quanto AC: non sarà mica vero che si possa come dianzi con questa lunghezza misurare la forza, ma sarà tanto diversa, soggiungeva lo stesso Roberval, quanto ED diagonale del parallelogrammo è diversa da DG lato di lui, condotto parallelamente all' inclinazione del piano.

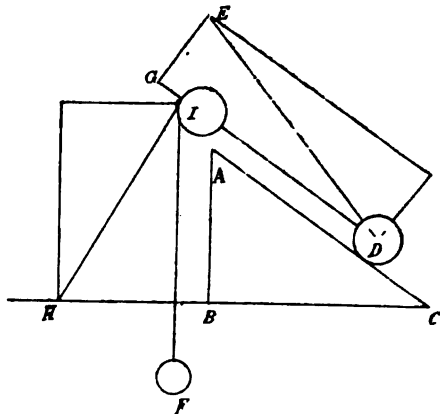



Figura 318.

Con simil ragione, proseguiva a dire l'Autore di questa meccanica nuova, diversifica la cosa se il contrappeso F, invece di tirare verticalmente in direzione parallela ad AB, come tutti suppongono, tiri obliquamente secondo IH, perch' essendo in quel primo caso rappresentata la forza da IK uguale ad AB, dovrà esser nell' altro rappresentata da una linea tanto maggiore, quanto la diagonale IH è maggiore del lato IK del parallelogrammo, con le solite regole costruito.

Se avesse il Roberval ragione di credersi primo autore di questa novità introdotta nella Statica del piano inclinato, lo vedremo nel capitolo appresso. Ma di fatto egli riaccendeva la face di quella tradizione, che parve essersi spenta nella memoria de' suoi contemporanei, e de' loro discepoli più immediati. Nel qual proposito ci occorre a notare la proposizione LXIII della prima parte *De motu animalium,* dove, considerandosi dal Borelli le condizioni dell' equilibrio tra le potenze T ed R (fig. 319), tendenti obliquamente la fune DE, ne conclude dover essere le due dette potenze uguali. Ma non aveva pronunziata la conclusione, che soggiunge un lungo scolio, per avvertire i lettori che il suo teorema non contradice all' altro *ab omnibus receptum* (Romae 1880, pag. 120), e secondo il quale si dice che il peso R sta al contrappeso T come la lunghezza AC del piano sta all' altezza BC, essendo questo da quell' altro contemplato caso molto diverso.

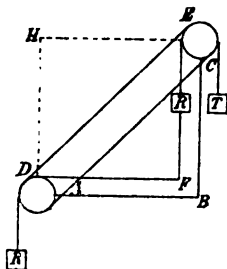



Figura 319.

Poteva, con efficace brevità, far osservare l' Autore che il peso R opera nel medesimo modo che se pendesse in E da una puleggia sola con direzion verticale, parallela alla CB, il qual caso è assai diverso dall' altro, quando la direzione fosse obliqua come ED, perchè allora, costruito il parallelogrammo FH, il contrappeso R dovrebbe esser tanto maggiore del peso T, quanto la ED diagonale è maggiore del lato EF del descritto parallelogrammo, ciò che torna come se il detto peso esercitasse no il suo momento totale, ma quale gli converrebbe posato che fosse sul declivio AC del piano. Così, ripetiamo, poteva il Borelli, come avrebbe fatto il Roberval in simile occorrenza, discorrere nel suo scolio, e invece si conduce per vie lunghe e oblique a dimostrare il suo intento, riducendo i due casi alle varie condizioni dell' equilibrio, che si osservano nella leva diritta e nella angolare.

Nel suo ottavo libro diceva il Roberval trattarsi dei centri delle percosse, e come saggio annunziava intanto al Torricelli un teorema dimostrativo del punto, da cui, percotendo, si fa il massimo colpo in un settore di cerchio ondeggiante intorno al centro della figura intera alla quale egli appartiene, dicendo che si troverebbe quel punto col fare « ut chorda arcus sectoris, ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum et centrum percussionis sectoris interceptam » (ibid., pag. 398). Di ciò avremo occasione di dir altrove più di proposito, ma per ora è da ripensare a questa Meccanica robervalliana, che non a torto il suo autore chiamava nuova, ritrovandosi veramente tale per la massima parte, se si paragona con ciò che delle macchine e delle altre statiche questioni scrissero Galileo, e i Matematici contemporanei nei loro libri. Vero è che la Spartostatica era stata precedentemente istituita dallo Stevino, ma il Roberval dimostrò la regola del parallelogrammo delle forze da' suoi veri principii, e l' applicò a risolvere nuovi mirabili problemi intorno all' equilibrio de' pesi o

tirati o sostenuti da funi. Come fosse poi rispetto a ciò difettosa la Scienza galileiana, lo sanno oramai troppo bene coloro, che hanno letto addietro la nostra Storia. La teoria del piano inclinato, da cui le altre macchine dovevano prender la legge, vedemmo come fosse stata dimostrata già dal Tartaglia, a cui Galileo stesso e il Cartesio e il Torricelli non aggiunsero in sostanza nulla di nuovo, prima che il Roberval venisse a considerare il caso, in cui le potenze sostenenti il peso hanno qualunque direzione diversa da quella del perpendicolo, e del piano o del suo declivio. Ma de' centri delle percosse le questioni erano affatto intatte, specialmente appresso i seguaci della Scuola galileiana, per non avere intorno a ciò il loro Maestro proposto se non che principii falsi, e alla nuova inquisizione in qualunque modo insufficienti.

Molto più dunque sarebbe da confessare aver progredito la Meccanica in Francia che in Italia, ma que' progressi riguardavano solamente la Statica, mentre la Dinamica si rimaneva tutta intera nelle mani di Galileo, come conseguenza feconda del principio da lui professato che cioè, nelle libere cadute, le velocità de' gravi crescono come i tempi. Il Cartesio fece a quel principio, verissimo in sè e nella sua forma, alcune cavillose osservazioni, ma il Roberval sembra che lo negasse affatto, come trasparisce da queste parole scritte dal Ricci, nel chiudere una sua lettera indirizzata da Roma al Torricelli: « In ultimo prego V. S. che voglia rispondere alle lettere di quel gesuita (cioè del Mersenno, così spesso chiamato dal Ricci, poi cardinale, non perchè il Padre professasse de' gesuiti la religione, ma perchè, secondo lui, ne imitava l' ipocrisia) che impugna le dottrine del moto, conforme già ne ragguagliai V. S., e soggiunge alcuni pensieri di Robervallio in questa parte, con caratteri poi così sconci, che finora non ho potuto trovare persona, che ne possa dar chiara interpetrazione. E per me vado considerando che Robervallio sia contrario alle posizioni del Galileo in materia dell' augumento di velocità nei gravi cadenti, e contrario in modo, che neghi ogni posizione del Galileo. Ma di questo ha promesso di scriverne il suo parere, ed allora, per mezzo del Mersenno, intenderemo il tutto » (MSS. Gal. Disc., T. XLII, fol. 156).

Rimase per queste ragioni nel Roberval la Dinamica così sterilita, che non fa maraviglia se non si vide menare i frutti aspettati, per raccogliere i quali, essendo stato necessario tornare a Galileo, da ciò si segna il terzo passo, che, poco dopo la metà del secolo XVII, fecero gl' insegnamenti di lui appresso gli stranieri. Si videro allora sorgere principali il Wallis in Inghilterra, il Mariotte in Francia e l' Huyghens nell' Olanda, al quale ultimo va massimamente debitrice la Scienza del moto dell' avere in provincie nuove esteso il suo antico dominio. Ma a preparare l' opera di lui giovarono grandemente quelle degli altri due commemorati, e in special modo del Wallis, che, trattandone con regole di calcolo più precise i teoremi, confermò, contro gli oppositori e i dubitanti, la Scienza galileiana nella geometrica verità de' suoi principii.

I capitoli perciò, dove il celebre Professor saviliano tratta del moto in generale, della discesa dei gravi, e della libbra, se son per matematica potenza notabili, non hanno però altra ragione che di commenti a verità precedentemente già dimostrate; come pure colà, dove tratta delle percosse e degli urti, non sembra facesse altro il Wallis che dar miglior ordine e chiarezza, e forma più rigorosamente matematica alle proposizioni del nostro Borelli. Ma il trattato *De centro gravitatis,* che comprende esso solo due terzi della intera Meccanica wallisiana, dovette apparire al mondo opera nuova, rimanendosi allora, e per più di due secoli appresso, sconosciuto e seppellito ne' manoscritti ciò che dai nostri Matematici erasi scritto in quel medesimo soggetto. Che se le invenzioni del Torricelli, del Nardi e del Ricci fossero state raccolte e pubblicate in un libro dai loro propri autori, s'intende come l'Italia avrebbe avuto della Baricentrica un trattato compiuto, venti anni prima dell'Inghilterra. Anche al Wallis, come agli Italiani che l'avevano preceduto, serve di strumento, per domar la durezza del campo da dissodarsi, la dottrina degli indivisibili, ch'egli, con i più celebri matematici stranieri, approva, e l'ha dal suo proprio inventore per ben dimostrata. « Atque hanc *De indivisibilibus* doctrinam, nunc passim receptam atque post Cavallerium a celeberrimis Mathematicis approbatam, pro veterum continua figurarum adscriptione substituire visum est » (Mechan., P. II, Londini 1670, pag. 112).

Il Mariotte men predilesse i calcoli sottili, che le fisiche esperienze, ma l'Huyghens parve comprendere in sè le virtù de' suoi predecessori, non rimanendosi inferiore al Wallis nella Matematica, e dall'altra parte applicando i teoremi di lei a dar fermezza di leggi ai fuggevoli fatti osservati. Nel terzo dialogo delle due Nuove Scienze, come altrove osservammo, si proponeva una lunga serie di principii, da' quali poi non si vedeva conseguir la finale intenzione dell'Autore, ch'era quella di dimostrare l'isocronismo dei pendoli per qualunque ampiezza delle loro vibrazioni. Tutta quella gran mole di teoremi, congesta nel detto dialogo, non era per altro servita, che per dimostrare quello stesso isocronismo nelle corde, d'onde Galileo lasciava a concluderne l'isocronismo per gli archi circolari sottesi. Ma la conclusione, non essendo logica, riusciva perciò tutt'insieme anche falsa, e fu l'Huyghens che ridusse nella via retta, e dette perfezione alla Scienza galileiana, dimostrando che dall'esser le suttese tautocrone conseguiva, secondo le buone regole ragionando, il tautocronismo, non per gli archi dei circoli, ma per quelli della cicloide.

Si riformò per la nuova scoperta la costruzione degli Orologi, che dall'umile arte fabbrile si sollevarono alle più alte dignità della Geometria. Secondo qual più giusta regola si dovesse prefinire la lunghezza del pendolo, sanno bene i nostri Lettori come fosse questione antica, avendola allo stesso Galileo proposta il Pieroni, quando prima pensò di valersi di quel semplice strumento, per le osservazioni celesti: e gli stessi Accademici fiorentini, quarant'anni dipoi, essendo tuttavia nella incertezza, si studiavano d'assicurarsi prudentemente dalle fallacie, col far sottilissimo il filo, e col ridurre sotto

la minor mole possibile la gravità del peso ondeggiante. Benchè alcuni Matematici stranieri facessero derivar quella regola dai centri delle percosse, fu nonostante l' Huyghens il primo che, all' occasion di descrivere il suo nuovo Orologio oscillatorio, ne dette dimostrazione propria e diretta. « Occasio vero ad haec denuo tentanda ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, praeter id quod in imo est, illis applico » (Opera varia, T. I, Lugd. Batav. 1724, pag. 118).

Altra occasione, da questo stesso Orologio, venne all' Huyghens di specular cose di Meccanica nuova, dall' osservar che il pendolo, menando qua e là per l' ambito di un circolo il peso, gl' imprime una forza, *quam centrifugam vocare libet,* e che sopravvien nel mobile ad alterargli in qualche modo la gravità naturale. « Unde aliud quoque Horologii commentum deduximus » (ibid., pag. 185), formulando intanto *De vi centrifuga ex motu circulari* tredici teoremi, ai quali poi negli Opuscoli postumi ebbe la Geometria meccanica a rallegrarsi di veder fatte le dimostrazioni. Con questi teoremi e con quegli altri relativi ai centri delle oscillazioni, e alle proprietà meccaniche della Cicloide, aggiungeva il Matematico olandese, a quelle istituite già da Galileo, tre nuove Scienze, intorno alle quali ha da trattenersi ora particolarmente la nostra Storia con breve discorso.

II.

Il tautocronismo della Cicloide vedemmo come derivasse per corollario dalla proposizione XI torricelliana di *Meccanica nuova,* scritta qui addietro nel § 3° del capitolo sesto. Ma consegue anche immediatamente dai teoremi galileiani dei moti accelerati, dietro le proprietà geometriche della curva dimostrate dal Roberval, una delle quali proprietà è che qualunque porzione di essa curva, presa dal vertice, è uguale al doppio della tangente. Gl' impeti infatti acquistati dal medesimo mobile, nello scendere da B (fig. 320) in I e in A sul piano orizontale AI, sono uguali, o sia fatta la scesa per l' arco

Figura 320.

cicloidale AB, o per la tangente BI: e proseguirebbe esso mobile equabilmente passando, nel medesimo tempo impiegato a venire da B in I, uno spazio doppio di BI, ossia uguale all' arco AB. Lo stesso dicasi di qualunque altro punto, da cui partendosi il grave acquisterebbe, giunto in A per la concavità cicloidale, tal impeto, da passare equabilmente uno spazio uguale a quello del cammin curvo, acceleratamente descritto in quel medesimo tempo, che sarebbe venuto giù per la tangente: onde essendo gl' impeti o le velocità, in qualunque caso, proporzionali agli spazi, i tempi necessariamente sono uguali.

E per dire come dal tautocronismo delle scese per le corde dei cerchi si potesse concludere a quello per gli archi della cicloide, e non degli stessi cerchi, come fece Galileo; si osservi essere le cadute dai vari punti della curva CA quelle medesime, che per le loro tangenti o per le corde, nel circolo DVA condotte a loro uguali e parallele, come la AV per esempio alla BI: ond' essendo, per i teoremi galileiani, esse corde tautocrone, tautocrona sarà dunque anche la Cicloide.

Si può veder di qui quale stretta dipendenza avesse con la precedente la Meccanica ugeniana, ma l' Autore aveva dimostrato della curva altre proprietà meccaniche più generali, dalle quali faceva come per corollario derivare non solamente il tautocronismo, ma anche insieme altre verità non men nuove e maravigliose. Quella generale proposizione è la XXV della seconda parte dell' *Orologio oscillatorio,* in cui dimostrasi dall' Autore che, disposta la Cicloide con la base orizontale, come la rappresenta la passata figura, il tempo della scesa di un grave, da qualunque punto della concavità all' imo vertice, sta al tempo della scesa per l' asse come la semicirconferenza sta al suo diametro. Servono per lemma a questa le due proposizioni precedenti, la prima delle quali è così annunziata:

« Sit cyclois ABC (nella medesima figura) cuius vertex A deorsum conversus sit, axe AD ad perpendiculum erecto: sumptoque in ea quolibet puncto B, ducatur inde deorsum recta BI, quae cycloidem tangat, termineturque recta horizontali AI, recta vero BF ad axem perpendicularis agatur, et, divisa bifariam FA in X, super ea describatur semicirculus FHA. Ducta deinde per punctum quodlibet G, in curva BA sumptum, recta ΣG, parallela BF, quae circumferentiae FHA occurrat in H, axi AD in Σ; intelligantur per puncta G et H rectae tangentes utriusque curvae, earumque tangentium partes, iisdem duabus horizontalibus MS, NT interceptae, sint MN, ST. Iisdemque rectis MS, NT includantur tangentis BI pars OP, et axis DA pars QR. Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam MN, celeritate aequabili quanta acquiritur descendendo per arcum cycloidis BG, fore ad tempus quo percurretur recta OP, celeritate aequabili dimidia eius, quae acquiritur descendendo per totam tangentem BI; sicut est tangens ST ad partem axis QR » (ibid., pag. 79, 80).

Si compia la costruzione descrivendo intorno al diametro AD il semicircolo AVD, che incontrerà le parallele ΣG, BF ne' punti *f*, V, e si congiunga

A con V per una linea, la quale intersecherà nel suo passaggio le PR, GΣ, OQ in K, L, E. Si congiungano poi con H i punti F, A, X, e il punto A con f per una linea, che attraverserà la PR in p, e prolungata raggiungerà la OQ in d.

Ciò fatto, sappiamo per i teoremi galileiani che il tempo equabilmente passato per la MN, al tempo per la OP, passato con la mezza celerità detta, ha la ragion composta diretta degli spazi, e reciproca delle velocità: cosicchè, chiamati $T^o . MN$, $T^o . OP$ quegli stessi tempi e, $V^a . MN$, $V^a . \frac{OP}{2}$ le velocità corrispondenti; avremo $T^o . MN : T^o . OP = MN . V^a . \frac{OP}{2} : OP . V^a . MN$. Ma perchè tutta intera la velocità equabile per OP è quella conveniente alla caduta da B in I, e la velocità per MN è quella dovuta al cadente, con moto accelerato da B in G, o da F in Σ; dunque, essendo per le note leggi della Dinamica le velocità proporzionali alle radici degli spazi, avremo

$$V^a . OP : V^a . MN = \sqrt{AF} : \sqrt{F\Sigma} = AF : \sqrt{AF . F\Sigma} = AF : FH.$$

Dividendo gli antecedenti per due, e facendo le sostituzioni, la ritrovata relazion de' tempi si trasformerà nell'altra

$$T^o . MN : T^o . OP = MN . FX : OP . FH.$$

Ora essendo, per le parallele e i parallelogrammi da esse circoscritti, $MN = dp$, $OP = EK$, abbiamo $MN : OP = dp : EK = dA : EA = fA : LA$. E perchè congiunti V, f, il triangolo AVf che ne nasce essendo simile al triangolo ALf, dà la proporzione $AV : Af = Af : AL$; sarà dunque $MN : OP = AV : Af$, la qual seconda ragione facilmente si dimostra esser quella medesima di FA ad AH. Imperocchè $AV^2 = DA . AF$ e $Af^2 = DA . A\Sigma$, d'onde $AV^2 : Af^2 = AF : A\Sigma = AF^2 : AF . A\Sigma = AF^2 : AH^2$, e perciò $AV : Af = AF : AH$. Essendo poi, per la similitudine dei triangoli FAH, FHΣ, la ragione di AF ad AH uguale a quella di FH a HΣ; questa sarà dunque anche la ragione di MN a OP, che, sostituita nella relazione de' tempi ultimamente scritta, la trasformerà nell'altra $T^o . MN : T^o . OP = FX . FH : H\Sigma . FH = FX : H\Sigma = HX : H\Sigma$, la quale, osservando che, condotta la Tb perpendicolare sopra SQ, i triangoli simili STb, $TH\Sigma$ danno $HX : H\Sigma = ST : Tb = ST : QR$; si riduce finalmente a $T^o . MN : T . OP = ST : QR$, d'onde apparisce vera la conclusione dall'Huyghens stesso espressa in questa forma: « Igitur tempus motus qualem diximus per MN, ad tempus per OP, constat esse sicut ST ad QR, quod erat demonstrandum » (ibid., pag. 81).

Se la porzione QR fosse stata presa infinitesima, gli archi del semicircolo e della semicicloide, intercetti fra le parallele OQ, PR, si sarebbero confusi con le tangenti ST, MN, ond'è che la medesima conclusione ugeniana poteva mettersi in altra forma, dicendo che il tempo della scesa per l'arco cicloidale MN sta al tempo della scesa per la porzione di tangente OP, come l'arco ST del circolo sta alla porzione QR dell'asse. E perchè, divi-

dendo tutto intero il diametro AF in parti infinitamente piccole, e tutte uguali a QR, la dimostrazione fatta per questa particolar divisione è applicabile a ciascuna delle altre infinite, è manifesto che verrebbero da ciò ordinate altrettante proporzioni, in cui i secondi termini, che sono i tempi impiegati a passare equabilmente spazi tutti uguali ad OP, ed i quarti termini, ossia le porzioni dell' asse AF, sono tutti fra loro uguali. Ora, non sarebbe bisognato all' Huyghens che d' invocare il *Teorema integrale*, per conseguir dalle cose già dimostrate la sua principale intenzione.

Che se giungesse a qualcuno oscura la nuova denominazione, sappia che da noi si chiama Teorema integrale quello, che fu già proposto in questa forma: « Si fuerit ut prima magnitudo ad secundam, ita tertia ad quartam, et hoc quotiescumque libuerit, fuerintque omnes primae inter se, item omnes tertiae magnitudines inter se aequales; erunt omnes primae simul, ad omnes secundas, ut sunt omnes tertiae simul, ad omnes quartas magnitudines » (Torricelli, Op. geom. cit., P. II, pag. 50). Il Roberval suppose ciò come dimostrato, per facile corollario, da due proposizioni del quinto libro Degli elementi, e il Torricelli ne fece una dimostrazione particolare, da lui stesso inserita nel luogo sopra citato, come XVIII lemma *De dimensione parabolae.*

Che poi convenga al detto teorema il titolo d' integrale, adempiendo agli uffici del calcolo, che per le posteriori istituzioni prese quel nome, è manifesto dall' uso, che ne fecero i due stessi promotori insigni del metodo degli indivisibili ora commemorati, e segnatamente il Torricelli, nelle varie occorrenze di ricercare i centri di gravità delle varie figure, e le dimensioni delle parabole. Prendasi per esempio, da questo Libro torricelliano, quella proposizione XIII, il modo di dimostrar la quale disse il Nardi di averlo qualche tempo prima imparato da Pappo. Essendo ABC (fig. 321) una parabola, intorno alla base AC della quale sia descritto il semicircolo ANC, e AD, AE rettangoli circoscritti alle due figure, si dimostra dall' Autore che FG : GI $= \pi$ GL^2 : π GM^2, e così sempre, qualunque siano, fra le infinite linee uguali equidistanti dal diametro BN, quelle che incontrano la parabola, la base di lei, e il circolo ne' punti dei loro passaggi. Ora essendo, secondo

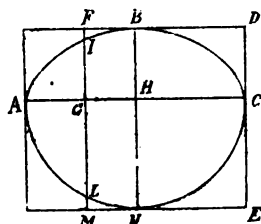



Figura 321.

il metodo cavalierano, risolute nelle infinite linee costanti come FG, e nelle infinite variabili come GI le superficie del rettangolo e della parabola, e similmente negli infiniti circoli di costante raggio GL, e di variabile GM, essendo risoluti i solidi rotondi generati dal rivolgersi intorno ad AC il semicircolo e il rettangolo a lui circoscritto; è manifesto che i termini FG, GI; π GL^2, π GM^2 sono altrettante quantità differenziali, che si scriverebbero, secondo i simboli usati dai matematici moderni, $da : dx = db : dy$, rappresentando a e x il rettangolo e la parabola, b e y il cilindro e la sfera. Dall' analisi differenziale della funzione si risale alla sintesi integrale, per via della somma, in virtù del Teorema sopra accennato, da cui resulta che la somma delle infi-

nite quantità, tutte uguali a da, db, uguaglia a, b: e la somma delle infinite flussioni di x e di y uguaglia agli stessi x, y, precisamente come nel calcolo recente $\int da$, $\int dx$, $\int db$, $\int dy$ sono uguali ad a, x, b, y, non tenuto conto delle costanti.

Ritornando ora indietro sopra l' ultima conclusione dell' Huyghens, nel supposto che fossero le due parallele OQ, PR condotte infinitamente poco distanti fra loro, e quantità infinitamente piccole perciò riuscissero così gli archi ST, MN del semicircolo e della semicicloide, come le porzioni QR, OP dell' asse e della tangente; si sarebbero potute istituire infinite equazioní differenziali, che s' integrerebbero assai facilmente applicandovi il Teorema del Torricelli, da cui per via diretta resulterebbe che il tempo speso a passare per gl' infiniti tratti della curva AB, ossia per tutto l' arco cicloidale AB, sta al tempo per le infinite parti della tangente IB, ossia per tutta intera la tangente IB, come la somma di tutte le infinite porzioni degli archi circolari, ossia tutto il semicerchio AHF, sta alla somma di tutte le porzioni, ossia a tutto il diametro AF.

Essendo poi il tempo speso a passare equabilmente la BI, con la mezza velocità che si sarebbe acquistata dal mobile dopo la caduta naturale per la stessa BI, uguale al tempo speso a passare equabilmente uno spazio doppio, con la velocità intera; è chiaro esser medesimo il tempo di passare equabilmente la BI con velocità dimidiata, e il tempo di passarla con moto accelerato, partendosi il mobile dalla quiete. Ma il tempo della caduta accelerata per BI, ossia per AV, è, per i noti teoremi galileiani, uguale al tempo per l' asse AD; dunque rimarrebbe, senz' altro discorso, dimostrata la verità, così dall' Huyghens stesso in XXV luogo, nel citato libro, proposta: « In cycloide, cuius axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus, quibus mobile a quocumque in ea puncto dimissum ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se aequalia, habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum » (Op. et Tom. cit., pag. 87).

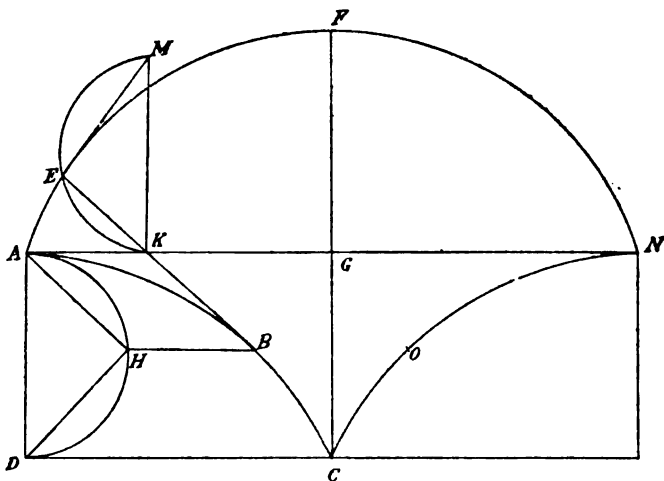
Ma l' Huyghens non procede per le vie da noi disegnate, e che a quei tempi apparivano nuove: calcando invece le orme dei Matematici antichi, egli si attiene piuttosto alle circoscrizioni, affaticandosi di giungere al suo intento, col far uso di quel metodo obliquo, e perciò lungo, con cui si vede esser penosamente condotta da lui la XXIV proposizione. La cosa è veramente notabile, dopo gli esempi pubblicamente dati dal Roberval, dal Torricelli, dal Wallis e da altri insigni promotori degl' indivisibili, ma è dall' altra parte un segno manifesto della poca fede, che s' aveva nella sincerità di quel metodo, pochi anni prima del Leibniz e del Newton: e anche l' Huyghens se ne astenne, sì perchè voleva non cadesse ombra di dubbio sopra la verità dei suoi teoremi, e sì per dar prova del suo proprio valore, nel riuscire a dimostrar cose tanto nuove e tanto difficili, non valendosi d' altro, che de' vecchi rugginosi strumenti.

La novità però delle invenzioni ugeniane non apparisce, da quel che se

n' è detto fin qui, che per una parte sola, in quanto cioè, dall' avere il tempo della scesa da qualunque punto della Cicloide al tempo della caduta per l' asse, una proporzione sempre costante, qual' è quella della circonferenza al diametro; se ne concludeva per corollario il tautocronismo della stessa Cicloide: ma ben altre verità più importanti faceva l' Autor conseguire dalle verità dimostrate, in ordine al cadere i gravi ora liberamente, ora vibrando sospesi dai fili dei pendoli.

S' accennò di sopra che, dall' essere isocrone le cadute per le corde dei circoli, male a ragione inferiva Galileo l' isocronismo per gli archi sottesi, non essendo l' illazione logicamente valida, se non che rispetto agli archi cicloidali: ciò che, rimastosi nella stessa Meccanica galileiana latente, fu primo l' Huyghens a produrre alla luce. Sarebbe però da stimarsi la scoperta non più che per una bella speculazione, quando non si fosse potuta applicare alla misura dei minimi tempi, nè si vedeva possibile dall' altra parte la desiderata applicazione, se non col trovare il modo di far descrivere ai pendoli archi, non più di cerchio, ma di cicloide. L' invenzione, che avrebbe trattetenuto intorno a un semplice fatto fisico un ingegno volgare, aprì all' Huyghens quel campo nuovo nella Geometria, ch' egli chiamò *Delle evolute*, perchè, data una curva, sulla convessità della quale s' intendesse applicato un filo di ugual lunghezza, si proponeva l' Autore di mostrar la linea, che descriverebbe il capo di esso filo, svolgendosi in modo, che sempre la lunghezza svolta si serbasse tangente. Il particolar teorema poi di questo trattato, dall' applicazione del quale dipendeva la trasformazione degli archi circolari dei pendoli in archi cicloidali, si trova così proposto nella citata terza parte dell'Orologio oscillatorio: « Semicycloidis evolutione, a vertice coepta, alia semicyclois describitur, evolutae aequalis et similis, cuius basis est in ea recta, quae cycloidem evolutam in vertice contingit » (pagina 96).

Figura 322.

Sia ABC (fig. 322) semicicloide, asse AD, base DC, AHD semicircolo genitore, a cui in A giunga la GA tangente. Sia sulla convessità della curva applicato il filo ABC, di cui il capo A, svolto

intorno a C, si vuol dimostrare che descrive, nella sua evoluzion progressiva, una linea AEF eguale e simile all' evolvente, cioè un' altra semicicloide.

Si consideri giunta l' evoluzione a un punto qualunque, per esempio E, cosicchè la lunghezza del filo svolto sia BE, intersecante in K l' AG. Dai punti K, E s' alzino alle AG, EK le perpendicolari KM, EM, le quali s' incontrino in M, disegnando il triangolo EMK. Da B poi si conduca una parallela alla base, e raggiunga il semicircolo in H, d' onde si tiri la corda HD. Il triangolo rettangolo AHD, che ne nasce, e il triangolo EMK sono uguali, essendo in primo luogo equiangoli perchè per le note proprietà della Cicloide, la tangente EB è parallela alla corda AH, e perciò EM, DH lati paralleli, e paralleli KM, AD: in secondo luogo poi EK è uguale ad AH, perchè EB uguaglia per supposizione la porzion di curva AB, la quale, per il corollario alla Prima robervalliana, nel capitolo precedente ordinata, è doppia di KB, e perciò EK è uguale a BK, ossia ad AH. Se son dunque veramente, come si diceva, i due triangoli rettangoli MEK, AHD uguali, uguali pure saranno i semicircoli ad essi circoscritti, onde, a concluder l' intento, riman solo a dimostrare come E sia un punto nella semicicloide generata dallo stesso MEK, ciò che poi è in conseguenza dell' essere l' arco EK uguale alla porzion di base AK, com' è di fatto, essendo esso arco uguale all' arco AH, a cui, per quel che hanno inteso i Lettori dalle dimostrazioni del Ricci e del Nardi, s' uguaglia l' ordinata HB, ossia la AK. Così, comprendendo le proposizioni ugeniane IV, V e VI, nella terza parte dell' Opera citata, si dimostrerebbe che qualunque altro punto della evoluta AEF è in una semicicloide generata dal ruzzolarsi la ruota HEM su per la via AG, e perciò è una curva uguale e simile alla ABC semicicloide evolvente.

Dicemmo che da questa dimostrata proprietà dipendeva la trasformazione degli archi circolari nei cicloidali, descritti dai pendoli oscillatorii. Immaginando infatti di aver la disegnata figura capovolta, e intorno a C, punto di sospensione del pendolo CF, applicate le due lamine cicloidali CB, CO, consegue dalle cose fin qui discorse e dimostrate che, svolgendosi e avvolgendosi il filo nel vibrare, descrive archi di cicloide uguali e simili a BC, OC, e sempre fra loro isocroni, qualunque sia l' ampiezza della vibrazione. Così, com' è noto, prescriveva di fare l' Huyghens stesso ai costruttori degli Orologi della nuova invenzione, e così i teoremi astratti della Meccanica venivano applicati agli strumenti, da misurare con la massima esattezza i più piccoli tempi.

Un' altra importantissima applicazione si soggiungeva avere avuto i medesimi teoremi ugeniani, a determinare cioè, si direbbe quasi, l' istante, in cui cade un grave da un' altezza osservabile. I predecessori dell' Huyghens furono tutti costretti a ricorrere alle esperienze, le quali quanto fossero penose e fallaci s' è veduto nell' altro Tomo di questa Storia della Meccanica, per gli esempi di Galileo e del Riccioli. Ma ora, che è stato dimostrato avere il tempo di qualunque vibrazione intera del pendolo cicloidale, al tempo della scesa naturale per l' asse della curva, la proporzione medesima che ha la circonferenza al diametro; non occorre di saper altro, per risolvere esatta-

mente il geloso problema, se non che quanto vada lungo il pendolo dei secondi. Sia questa lunghezza, nella medesima figura, la CF, la metà GC della quale uguaglierà l'asse, che secondo l'Huyghens torna precisamente 18 once del piede orario. Si potrà senz'altro avere il tempo X, impiegato da un grave a scendere dall'altezza perpendicolare di quelle 18 once, dalla formula $T : X = C : D$, intendendosi per T il tempo di un secondo, ossia di 60‴, e per C, D la circonferenza e il suo diametro, la ragion tra' quali è presa di 355 a 113. Dunque $X = T \cdot \frac{D}{C} = 19''' + {}^{1}/_{10} = 19''', 1$, molto prossimamente. Di qui, essendo per i noti Teoremi galileiani, gli spazi proporzionali ai quadrati dei tempi, si può facilmente rispondere a chi volesse sapere da quanta altezza sia sceso nel perpendicolo un grave, in un minuto secondo. Perchè, come il quadrato di 19, 1, a quello di 60, ossia di 191 a 600, che sono i quadrati dei tempi; così lo spazio delle 18 once, a quello che si cerca, e che dovendo essere quarto proporzionale dopo 36481, 360000 e 18, si troverebbe di 14 piedi, 9 once e 6 linee del piede orario, ossia di 15 piedi e un oncia prossimamente, fatta la riduzione al piede parigino.

« Quia igitur (per riferir con le parole proprie dell'Autore la nuova mirabile invenzione) penduli ad secunda scrupula longitudinem diximus esse pedum horariorum 3, tempus autem unius oscillationis minimae est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est ut 355 ad 113; si fiat ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi scrupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud, fiet 19‴ + ¹/₁₀ tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem, quae nempe est pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum ita sunt spatia illis temporibus peracta, ergo, si fiat ut quadratum ex 19 + ¹/₁₀, ad quadratum ex 60, hoc est ut 36481 ad 360000, ita 18 unciae ad aliud; fient ped. 14, unc. 9, lin. 6 altitudo descensus perpendicularis tempore unius secundi. Cum autem pes horarius sit ad parisiensem ut 881 ad 864, erit eadem altitudo, ad hanc mensuram reducta, proxime pedum 15, et unciae unius » (ibid., pag. 282, 83).

In un tempo, in cui si seguitava tuttavia da alcuni Matematici a dubitar se le leggi dimostrate da Galileo fossero ipotetiche o realmente corrispondenti con i fatti osservati, si comprende quale efficace modo porgesse l'invenzione ugeniana di verificare le dette leggi. Ma non si sarebbe potuto recare alla Scienza questo benefizio, se prima non si rimovevano dagli sperimenti le occasioni delle fallacie, le quali principalmente consistevano nell'incertezza di definire, a giudizio dell'occhio, il preciso punto del tempo, in cui il grave termina la sua caduta. Si volse perciò l'Huyghens a disporre le cose con tale ingegno, che il pendolo stesso, nell'atto del suo moto, fosse tutto insieme misuratore del tempo, e dello spazio.

Sia AB (fig. 323) il profilo di una parete o di un'asse di legno, perpendicolarmente eretta, a cui in A sia raccomandato il capo del pendolo cicloidale AC che, con la sua mezza oscillazione CD, ha da misurare il tempo

della caduta del grave, tenuto fermo in D, come il pendolo in C, da un tenuissimo filo, che gli congiunge ambedue. Al cadente poi nel perpendicolo è legato un secondo filo, l'altro capo del quale è raccomandato a una strisciola di carta, col suo lembo inferiore toccante il punto D, e applicata alla parete in modo, da cedere facilmente al tirare del filo stesso, non preso così lungo, che nel secondar la caduta sia tutto scorso, quando da C il pendolo è venuto in D, compiuta la sua mezza vibrazione. Dunque esso pendolo batte sulla striscia di carta, e vi lascia impresso il vestigio, perchè la palla C era stata poco prima tinta di filiggine o d'atramento. Di qui è manifesto potersi, anche finito il caso, osservare lo spazio passato nel tempo della mezza scorsa del pendolo, il quale spazio sarà giusto quant'è la lunghezza del filo tirato, aggiuntavi la lunghezza della striscia di carta sotto il segno. E perchè importa massimamente alla precisione dell'esperienza che la scesa del pendolo e la caduta naturale del grave incomincino nel medesimo istante, ciò otteneva l'Huyghens abbruciando, con accostarvi la fiamma di un cerino, il sopra detto tenuissimo filo di congiunzione. Così potè l'Huyghens stesso riscontrar le cose, e dire che le teorie *cum accuratissimis experimentis nostris prorsus conveniunt* » (ibid., pag. 183).

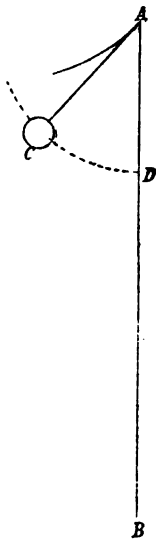



Figura 323.

III.

Dei centri delle oscillazioni, che subito si dissero essere una medesima cosa con i centri delle percosse, la Meccanica anch'ebbe dall'Huyghens la teoria generale. Vi s'erano nulladimeno esercitati i Matematici molto prima, per rispondere alle domande importune de' gladiatori e dei duellanti, curiosi di sapere a qual punto dovessero appioppare il bastone sulle spalle dell'avversario, perchè ne dovesse maggiore sentir la percossa. Quei che nelle Meccaniche di Aristotile cercavano i principii, per risolvere il problema, dicevano, come Leonardo da Vinci, che quel punto era verso la cima, perchè ivi il moto è più veloce. Poi più tardi lo ritirarono verso il centro di gravità, sapendo che quivi concorre d'ogni parte all'effetto la materia del legno. Venivano però l'esperienze a mettere in dubbio ambedue le soluzioni, e specialmente la seconda, essendo facile accorgersi dall'altra parte che vi si considerava, piuttosto la semplice gravità del bastone, che la gravità di lui, congiunta con l'impeto del braccio che lo mena.

Il principio professato dal Filosofo, che cioè il moto accresce peso al grave mosso, rettamente interpetrato, fu primo ad aprire le vie all'ingegno speculativo, il quale ebbe a ripensare che, movendosi nella lunghezza del

bastone le sezioni materiali via via dalla mano alla cima sempre più veloci, era come se diventassero via via sempre più gravi. Conseguiva di qui dover essere il centro delle forze che si cercava, nel legno mosso, diverso dal centro di gravità del legno fermo, e s' intese come non si potrebbe avere altrimenti la ragione di questa diversità, che ritrovando le proporzioni, secondo le quali, nell' agitarsi la verga, crescono i pesi o i momenti alle particelle distribuite in tutta la sua lunghezza.

Si prevede bene, dietro queste considerazioni, come la soluzion del problema del centro della percossa nella clava dovesse occorrere a quei soli Matematici, che avessero chiara notizia della statica dei momenti, misurati dal prodotto dei pesi nelle respettive distanze dai loro punti d' appoggio, d' onde ne conseguiva la misura delle forze, o degli impeti, da quegli stessi pesi, moltiplicatisi per le velocità o per gli spazi passati. Ma si doveva, anche dopo una tale notizia, trovar non poca difficoltà nell' applicarla, essendo la clava tutto un corpo solo: nè giovava riguardare la sua gravità dispersa adunata in un centro, richiedendovisi, per riuscir nell' intenzione, la più giusta misura degl' incrementi proporzionali di moto nelle singole particelle, le quali essendo infinite non promettevano di darsi resolute, se non a colui, che avesse avuta la dottrina matematica degl' infiniti. La scienza necessaria perciò, a dimostrare il centro della percossa, non sarebbe mancata nè al Cavalieri, nè al Nardi, nè al Torricelli: eppure è notabile, nella storia della Meccanica, che lasciassero que' tre grandi nostri Matematici, per sè e per i loro successori, la questione intatta, della quale perciò rimase tutto il merito agli stranieri. Sappiamo che il Roberval diceva di aver trattato, nell' ottavo libro della sua Meccanica riformata, *De centro percussionis potentiarum mobilium,* e ora è il tempo per noi di narrare i principii e i progressi fatti dal Matematico francese nell' istituire, e nell' aggiungere alla Scienza della percossa questa nuova e nobilissima parte, di che il Borelli stesso trentatre anni di poi la lascerebbe in difetto.

Per risponder dunque con geometrici argomenti alla proposta, che aveva dato occasione a queste speculazioni, riguardava il Roberval il bastone cilindrico ridotto a una linea materiale, che, affissa in una delle sue estremità, ondeggi liberamente dall' altra. Sia AC (fig. 324) la detta linea, che rimossa dal suo perpendicolo in AB incontri, nello scendere e nel ridursi alla sua prima stazione, un ostacolo, contro cui si vuol sapere in qual punto concentra le forze della percossa. Qui il metodo degl' indivisibili suggeriva di riguardare la linea oscillante risoluta in infiniti uguali punti ponderosi, come G, E, B, i momenti dei quali vanno via via crescendo a proporzion degli spazi passati nel medesimo tempo,

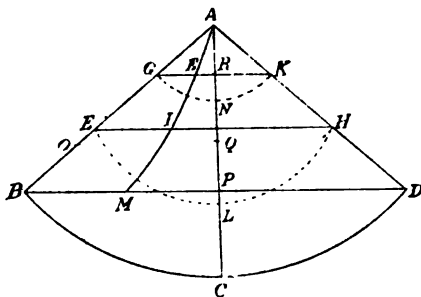



Figura 324.

ossia degli archi GNK, ELH, BCD, cosicchè, riducendo a pesi questi stessi momenti, mentre nella quiete erano tutti uguali, ora nell'agitazione son cresciuti nelle dette proporzioni, e perciò il centro dell'equilibrio, che dianzi era nel mezzo, si deve ora esser mutato, e rimane a sapere dove sia sceso.

A ciò invocava il Roberval questo teorema, d'assai facile conclusione dai principii archimedei: *Due libbre caricate d'ugual numero di pesi, di grandezze proporzionali, e disposti in distanze proporzionali, son segate dal centro dell'equilibrio in parti proporzionali.* Ora essendo gli archi GNK, ELH, BCD proporzionali alle loro corde GK, EH, BD, e queste e quelli disposti dal centro A in distanze proporzionali; è manifesto che la libbra AB gravata di tutti i suoi infiniti momenti oscillatorii e la libbra AP gravata delle linee BD, EH, GK, e di tutte le altre infinite, che contessono il triangolo ABD, son segate dai loro centri dell'equilibrio o delle gravità in parti proporzionali. « Centrum autem gravitatis trianguli ABD (conclude il Roberval il suo ragionamento) dividit AP in Q, adeo ut AQ duplum sit PQ. uti demonstravit Lucas Valerius in tractatu suo *De centro gravitatis*, itaque et O centrum agitationis rectae AB dividit AB in O, adeo ut AO duplum sit BO, atque ita inventum est centrum percussionis rectae AB, quod erat demonstrandum » (Epist. cartes., P. III, Amstelodami 1683, pag. 330).

La bella dimostrazione fu inserita nel luogo citato col titolo soprascrittovi: *Centrum percussionis lineae rectae AB, circulariter rotatum circa punctum fixum A, per D. Roberval anno 1646,* nel qual tempo l'ebbe il Cartesio, ma ell'era stata ritrovata già da qualche anno, e certamente prima del 1644, perchè, mostrata al Mersenno, questi se ne rallegrò, e prese ne' suoi *Cogitata physico-mathem.*, a proposito della Meccanica, occasione d'inserir la notizia per decidere la questione, che vivamente s'agitava intorno al centro della percossa nel bastone o nella spada, pronunziando risolutamente questa sentenza: « Ensis, cuius percussio maxima est, neque est in illius centro gravitatis, neque in mucrone, sed versus ensis dodrantem, a cuspide incipiente » (Parisiis 1644, pag. 84).

Ma il Roberval, ritornando sopra a considerare le oscillazioni di quella sua linea, vedeva aprirsi la via a speculazioni di ben altra importanza, e d'altra nobiltà, rappresentandoglisi nel moto di lei l'oscillare di un pendolo. Riconobbe allora che il céntro della percossa di quella era una medesima cosa col centro di agitazione di questo, riguardate le forze sotto vario aspetto: o in quanto cioè si concentrano nella linea o nella verga cilindrica, per percotere con la massima energia in un ostacolo, che le sia contrapposto; o in quanto si concentrano nel pendolo, a dare e a mantenere l'impulso di reciprocare le sue vibrazioni. Resultava intanto alla mente del Roberval che le vibrazioni del cilindro AB sono isocrone a quelle di un pendolo semplice, lungo quanto AO, avendo ambedue in A il centro della sospensione.

Era, in questa nuova e inaspettata notizia, come la prima e più lusinghiera promessa di aver finalmente a risolvere un problema desideratissimo dalla Cronometria, e il Roberval, *vigente animi ardore,* proseguì con l'in-

trapreso metodo a ricercare i centri dell'agitazione nelle superficie e ne' solidi, scegliendo, per non trovarsi impedito o arretrato ne' primi passi, le figure più semplici e più regolari, come i triangoli isosceli, le piramidi o i coni.

Sia il triangolo ABD, nella medesima figura, che oscilli avanti e indietro intorno al vertice A: risoluto nelle sue linee infinite, tre delle quali siano GK, FH, BD, i momenti ridotti a pesi, e de' quali intendasi esser gravata la libbra AP, stanno come le porzioni di superficie cilindriche descritte nell' oscillazione dalle dette linee, ossia come i rettangoli GK . AR, FH . AQ, BD . AP, o come i quadrati di AR, AQ, AP, o finalmente come le ordinate ER, IN, LM nel trilineo parabolico acuto AML, il centro di gravità del quale essendo in una ordinata, che sega in Q l' asse, talmente che sia AQ tre quarti della AP, come Luca Valerio dimostra nella XXII proposizione del III libro *De centro gravitatis;* dunque in Q sarà pure il centro della percossa, nel triangolo agitato.

Se BAD rappresenta una piramide o un cono, le sezioni de' piani o dei circoli aventi per diametri GK, FH, BD stanno come i quadrati delle distanze AR, AQ, AP dal vertice, e perciò i loro momenti avranno la ragion composta di essi quadrati e delle loro radici, ossia staranno come i cubi delle distanze AR, AQ, AP, ossia come le ordinate ER, IN, ML nel trilineo AML, supposto che la semiparabola AIM sia cubicale. Di qui è che il centro della percossa del solido sarà in Q, dove cade sulla libbra AP quell' ordinata, che passa per il centro di gravità del trilineo acuto.

A indicar la posizione di questo centro sull' asse occorreva opportuna la proposizione LIV del trattato *Dei centri di gravità* del Torricelli, pubblicato da noi qui addietro nel capitolo V: proposizione che l'Autore diceva di aver a quel modo generalmente conclusa *ex doctrina parabolarum.* Fosse nota o no al Roberval questa generalissima dottrina, è un fatto che, nel caso particolare della parabola cubica, sapeva benissimo il Matematico parigino che il centro di gravità del trilineo circoscritto da tale curva sega l' asse così, che la parte al vertice stia alla rimanente come quattro sta a uno: e tale concludeva essere l' indicazione del centro della percossa nella piramide o nel cono. Per la teoria de' pendoli poi derivava il Roberval stesso dalle sue proposizioni il seguente corollario: *I pendoli semplici, isocroni ai composti della figura ABD, che ora sia triangolo, ora piramide o cono, vanno lunghi nel primo caso per tre quarti dell' altezza del triangolo, e nel secondo per quattro quinti dell' altezza del cono.* Nel caso però che la sospensione fosse fatta dal mezzo P della base, il Roberval forse non ritrovò il centro della percossa altro che per il triangolo, dicendo che divide l' asse in due parti uguali, a una delle quali perciò corrisponderebbe la lunghezza del pendolo, che fa nel medesimo tempo il medesimo numero di vibrazioni.

Dicemmo che forse fu così, perchè la regola fin qui seguita veniva, nelle dette figure sospese per la base, a complicarsi di troppo: ond' ebbe il Roberval a cercare altre vie, quando volle proporsi figure di diversa indole dalle

precedenti, come per esempio il settor di cilindro, che, essendo un solido colonnare ogni sezion del quale è un settore di circolo va sotto la medesima invenzione di esso settor circolare.

Se sia, nella medesima figura, AFLH il detto settore, col raggio perpendicolare AL sospeso dal punto A, intorno al quale si supponga oscillare avanti e indietro dal piano, sopra cui s' è disegnato; ritrovò il Roberval che il centro della percossa nella figura cade in P, a una distanza da A, che sia quarta proporzionale dopo la corda, l' arco sotteso, e tre quarti del raggio; cosicchè, fatto AQ $=$ $^3/_4$ AL, sarebbe quel centro indicato dalla relazione FH : FLH $=$ AQ : AP. Di qui resulta: I.° Che, essendo l' arco di grandezza finita, e perciò sempre maggiore della sua corda, il punto P riman sempre al di sotto di Q. II.° Che, quando fosse FLH $=$ $^4/_3$ FH, tornerebbe AP $=$ AL, ossia il centro della percossa sarebbe sceso nell' infimo punto del settore. III.° Finalmente che, quando la proporzione dell' arco alla sua corda fosse maggiore di quattro a tre, AP allora sarebbe maggiore di AL, e ciò vorrebbe dire che il centro della percossa è passato fuori del settore, con esempio non raro, ma pur notabile nella risoluzione di così fatti problemi, che, applicati ai pendoli propri, dicono che il pendolo semplice isocrono può talvolta andar più lungo di quello composto.

Se avesse il Roberval, in questo soggetto, dimostrato altri teoremi non è ora a investigarsi da noi, lasciandone la cura ai dotti Francesi, che, ambiziosi di primeggiare sopra le altre nazioni, reintegrando, così per ciò che riguarda i centri delle percosse, come per le altre sue sette parti, la Meccanica robervalliana, darebbero un esempio ammirabile al mondo di quell' alto fastigio, a cui diceva il loro connazionale, contemporaneo a Galileo, di avere eretta dai fondamenti la Scienza nuova del moto. A noi basti di aver raccolti questi pochi materiali, preparati per soprapporsi come pietre angolari nel superbo edifizio, ma rimasti, a quel che sembra, senza forma e dispersi nella gelosa officina, alla quale non fu lasciato entrare che al solo Marino Mersenno. Egli, secondando quel suo genio, che per altre parti di questa Storia è oramai ben conosciuto, proponeva a risolvere i problemi de' centri delle oscillazioni o delle percosse a quanti matematici incontrava, non perdonando, per esempio, a Onorato Fabry, benchè sapesse il capo strambo ch' egli era, nè a Cristiano Huyghens, benchè lo vedesse ancora così giovanetto. Ma il Roberval, che sotto sotto stimolava il Frate, ardeva di un grandissimo desiderio ch' entrasse nell' agone, per cimentarne le forze, il Cartesio, allora e sempre odiosissimo suo rivale, e il Cartesio rispondeva all' invito in una lettera sottoscritta il dì 2 Marzo 1646, stabilendo al Mersenno, che glie ne aveva fatto richiesta pochi giorni prima, per l' invenzion de' centri delle percosse, le tre regole seguenti:

I. Se il corpo ha una sola dimensione sensibile, quale si può supporre avere un cilindro, che sia pochissimo grosso, « centrum eius agitationis est in illo loco huius corporis, quod transit per centrum gravitatis trianguli ABCD (nella medesima figura) cum describit triangulum illum per motum suum,

nimirum in puncto P, quod relinquit trientem longitudinis AC versus basin » (Epist., P. III cit., pag. 317). — II. Se il corpo ha due dimensioni sensibili, come la superficie del triangolo isoscele ABD, « tum centrum agitationis illius est in puncto lineae AP perpendicularis basi BD, quod transit per centrum gravitatis pyramidis, quam describit triangulum, tum cum se movet circa punctum A, nimirum in puncto Q, adeo ut QP sit quadrans lineae AP » (ibid.).

Passa il Cartesio a dare la terza regola, quando cioè il corpo abbia tre dimensioni sensibili: regola, che poi spiegò meglio, quando il Mersenno, mettendosi a riscontrare le cose lette, le trovò discordare dalla esperienza. Di ciò sparse voce fra gli amici, nel numero de' quali era il signore di Cavendisck, gentiluomo inglese, che si trovava allora a Parigi, e il Cavendisck si rivolse direttamente allo stesso Cartesio, che il dì 30 Marzo di quello stesso anno 1646 gli rispondeva in questa sentenza: Non deve far maraviglia se le mie regole non rispondono ai fatti, concorrendo ad alterarle gl' impedimenti, che il corpo oscillante ha dal sostegno, e principalmente dal mezzo dell' aria. Del resto il mio modo di ragionare è geometrico, e non può indurre in fallacie. Se sia un corpo solido, comunque irregolare, ABCD (fig. 325) sospeso in A, e avente nel perpendicolo AO il centro della sua gravità naturale, io lo considero diviso in infinite sezioni parallele all' orizonte, le quali nell' agitarsi descrivono porzioni di superficie cilindriche, ch' io riduco a piramidi tutte appuntate in A, e che, stando in ragion composta delle basi e delle altezze, mi danno la proporzione dei loro momenti. « Vis enim agitationis earum, non saltem ex modo celeritatis earum aextimatur, cuius differentia repraesentatur per diversas altitudines horum solidorum; verum etiam per diversam quantitatem materiae ipsarum, quae per diversas magnitudines basium repraesentatur » (ibid., pag. 322). Poi da ciascuno degli infiniti punti dell'asse AO immaginò che sian segate nel mezzo, condotte perpendicolarmente a lui, altrettante linee tutte proporzionali alle piramidi che iusiston sopr' esse, come per esempio sarebbero le linee FG, HI, e dice che nel centro di gravità della figura piana AFHOIG, tessuta delle dette linee infinite, sta il centro dell' agitazione che si cercava.

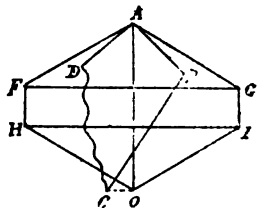



Figura 325.

Questa, e l' altra epistola cartesiana, che 28 giorni prima aveva direttamente ricevuta, il Mersenno mostrò al Roberval, il quale notò che le prime due regole in conseguenza riscontravano con le sue: Voleva però esaminarne più sottilmente le ragioni, e intanto, non sazio ancora di tentare intorno a ciò le forze dell' ingegno matematico del Cartesio, — domandategli, padre, diceva a esso Mersenno, se sa dirvi dove stia il centro della percossa nel triangolo isoscele, quando sia sospeso dal mezzo della base, o quanta sia la lunghezza del pendolo, che va sotto il medesimo tempo di un cono sospeso per la cima. —

Il Mersenno, qualunque poi ne fosse la ragione, fece a nome suo far la

richiesta a una terza persona, alla quale il Cartesio francamente rispondeva che, quanto al triangolo, il centro della percossa divide l'asse in due parti uguali. « Nam sumptis ad libitum in perpendiculari CD (fig. 326) punctis E, H a medio E aequaliter distantibus, tum, ductis lineis FG, HI parallelis basi, rectangulum CFG, semper aequale est rectangulo CHI, et consequenter figura, cuius centra gravitatis quaerenda essent, ex praescripto regulae meae ad habendum centrum agitationis huius trianguli, foret quadrangularis, et haberet centrum suum gravitatis in puncto E » (ibid., pag. 336). Quanto al pendolo isocrono al cono, soggiungeva il Cartesio, a che me ne richiede il Mersenno? Non aveva egli quella lunghezza dalla mia terza regola, con facile calcolo, di che perciò a lui, e al signore di Roberval ne lasciavo la cura? Ma se vogliono risparmiarsi questa fatica, dirò a loro la cosa, ch'è tale: « nimirum, tum cum pyramis aut conus per apicem suspensus est, altitudo eius debet esse, secundum longitudinem funependuli, veluti quinque ad quatuor » (ibid.).

Figura 326.

Esaminatesi dal Roberval le tre regole cartesiane, con quell'animosità che gl'intorbidava il giudizio, sentenziò che i principii, dietro i quali erano state condotte, non potevano approvarsi, perchè, venendo a farne l'applicazione ai centri della percossa ne' settori di cilindro o di cerchio, conducevano a conseguenze false. Ritornando infatti alla figura 324, che ha in AFLH disegnato un settor circolare, la superficie, dal centro di gravità della quale sarebbe, secondo la regola cartesiana, indicato nel detto settore il centro della percossa, è il trilineo parabolico AML, per cui tornerebbe esso centro in Q, distante da A per tre quarti di AL. Ma io ho dimostrato, diceva il Roberval, che il punto richiesto deve essere di Q sempre più basso, qual sarebbe per esempio P, nè può questo concorrere mai con quello, se non a patto che l'arco del settore sia uguale alla corda, ossia quando l'angolo FAH fosse minimo così, da poter aversi la figura per un triangolo isoscele, in cui veramente il centro della percossa cade sull'asse a tre quarti di distanza dal punto di sospensione. Ma per il settore di grandezza finita, che naturalmente è quello sopra cui può cader l'invenzione, il metodo cartesiano, sentenziosamente concludeva il Roberval, è manifestamente falso.

Pervenute a notizia del Cartesio queste censure, diceva per risposta che sarebbero allora convinte di falsità le sue conclusioni, quando quelle dell'avversario si dovessero aver per indubitate. Ma perchè ciò non apparisce dal suo discorso, « nihil me iudice aliud probat quam quod praetendat ut plus authoritati eius, quam meis rationibus tribuam » (ibid., pag. 331). Nella epistola infatti, nella quale si facevano al Cavendisck notare gli errori del Cartesio, lasciò il Roberval di dimostrare la proposizione del centro della percossa nei settori, *quia aequo longior esset* (ibid., pag. 326), ma egli era sicuro della verità di lei, confermata poi da tutti i Matematici, e principalmente dall'Huyghens, nella propos. XXI della quarta parte dell'Orologio oscil-

latorio, dove dice che il pendolo isocrono al settore di circolo ha lunghezza *trium quartarum rectae, quae sit ad radium ut arcus ad subtensam* (pag. 159). Nè l' Huyghens però nè nessun altro di que' matematici avrebbero così assolutamente sentenziato contro il Cartesio, come fece il Roberval, esaminando la questione con più sincero giudizio di lui.

La prima regola per verità, scritta nella Lettera al Mersenno, appresso un rigido Geometra non troverebbe scusa, perchè quel che si chiama triangolo è un settore di cerchio, e si sa bene quanto sia diverso il centro di gravità nelle due figure, quando siano, come sempre si suppone in questi esempi, di grandezze finite. Anche la seconda non si può dire esattamente descritta, ma la colpa maggiore è della terza, lusingatrice come chi prometta di torre uno di difficoltà, mettendolo in un' altra maggiore; quasi che il trovar il centro di gravità nelle superfice piane fosse più facile, che trovar nel solido direttamente il centro della percossa.

Nel caso però che il solido fosse di figura regolare, e fosse di più determinato il modo della sua sospensione, come nel cono pendulo dalla cima, il metodo era per sè sufficiente, e aveva infatti condotto il Cartesio a una conclusione, confermata da tutti per vera. Nè differiva questo metodo cartesiano in sostanza da quello del Roberval, come non ne differiva l'altro, con cui si ricercava il centro della percossa nel triangolo isoscele pendulo dalla base, applicandosi qui alla libbra i pesi proporzionali alle piramidi, o alle linee rette nella figura piana, mentre là le si applicavano que' medesimi pesi ridotti all' egualità dinamica dei momenti. Ma la virtù di concludere derivava in ambedue gli autori dall'essere i rettangoli, fatti delle equidistanti dal mezzo dell' asse e dalle rispettive distanze dai punti di sospensione, uguali, come, prese per esempio nella medesima figura 326 le due FG, HI, o le loro duple GM, IN, si vede conseguire dall' equazione $GM : IN = DF : DH = CH : CF$. Il Roberval considerava la libbra CD gravata de' momenti $\pi\, GM . CF$, $\pi\, IN . CH$, i quali eguagliandosi insieme essi stessi, come pure s' uguagliano gli altri loro simili infiniti, debbono avere nel mezzo di essa CD il centro del loro equilibrio. Il Cartesio trasformava i momenti in piramidi, le basi delle quali rappresentassero la quantità di materia, e le altezze la velocità: e trovate queste piramidi uguali, le linee, secondo la regola prese ad esse proporzionali, intessono il rettangolo PQ, e gravitando tutte ugualmente sopra la libbra CD, s' equilibrano perciò intorno al centro della figura.

Dunque il Roberval, condannando senza discrezione il Cartesio, condannava insieme anche sè stesso: che se voleva esser più giusto doveva dire piuttosto che la terza regola cartesiana non era così generale come l' Autore la spacciava, ma solamente applicabile in alcuni esempi più semplici di figure regolari, e così confessare che nè egli nè il suo emulo, quali che si fossero i progressi fatti, non avevano però ancora trovato il metodo universale di risolvere questo nuovo genere di problemi.

Que' progressi nonostante non giovarono alla Scienza, perchè ne rimase per qualche tempo ne' soli privati commerci epistolari la notizia: e avendo

il Mersenno nel 1644 annunziato, senza dir le ragioni, che il centro della percossa nella spada o nella verga cade in parte, distante dalla punta il doppio che dalla impugnatura; Isacco Vossio nel 1666, come aveva condannate tutte le altre opinioni, così non risparmiava quella di coloro « qui maximam statuunt percussionem provenientem ab ea parte ensis, quae dodrante abest a mucrone » (*De Nili orig.*, Hagae Com. 1666, pag. 165-66).

Poco prima che si pubblicasse l' Orologio oscillatorio, e in quel tempo che il Wallis attendeva a dar perfezione alla terza parte della sua Meccanica, si divulgarono le epistole al Mersenno e al Cavendisck, dove il Cartesio e il Roberval stabilivano le regole, e annunziavano le conclusioni dei loro teoremi. O si fosse inspirato a coteste letture, o fosse il frutto di speculazioni sue proprie, è un fatto ch' esso Wallis, aggiungendo in fine al suo trattato *De percussione* la proposizione XV, nella quale si sottoponevano al calcolo le forze, che si concentrano in un punto a dare la massima percossa; non fa altro se non che ordinare i teoremi cartesiani o robervalliani, dimostrandoli col medesimo metodo e ripetendone talvolta gli errori, come per esempio intorno al centro dell' oscillazione della piramide o del cono, indicato al medesimo modo che dal Cartesio e dal Roberval, ma tanto diversamente da quel che poi trovò l' Huyghens, nella XXII proposizione della P. IV dell' *Orologio oscillatorio* (ediz. cit., pag. 166, 67), che Giacomo Bernoulli ebbe ad accusar pubblicamente il Wallis di avere sbagliato: « Wallisius in cono ex. gr. aliud percussionis, Hugenius aliud oscillationis centrum assignat. Fallitur enim Wallisius in eo quod integrae basi coni, circulisque basi parallelis, non maiorem distantiam ab axe rotationis, celeritatemque tribuit, ea quam ipsa horum circulorum centra obtinent » (*Opera*, T. I, Genevae 1744, pag. 464). Il Wallis infatti (chiamato a l' asse, b il raggio della base del cono) aveva indicata la distanza D del centro dell' oscillazione dal vertice con l' equazione $D = {}^4/_5\, a$, mentre è veramente $D = {}^4/_5\, a + \frac{b^2}{5\,a}$, per cui l' indicazion wallisiana è in difetto dalla vera dimostrata dall' Huyghens del quinto della terza proporzionale, dopo l' altezza del cono, e il raggio della base.

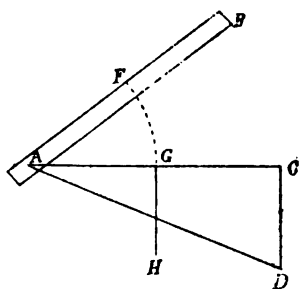



Figura 327.

Si propone anche il Wallis in primo luogo il centro della percossa nella linea materiale o nella sottilissima verga cilindrica AB (fig. 327), la quale egli immagina rotarsi intorno al punto A, per cadere liberamente sul piano AC. Divide essa verga in infinite sezioni uguali, che crescono via via i loro momenti a proporzione delle distanze, come le linee del triangolo ACD: e ne conclude che, essendo AC libbra sopra la quale s' intendano gravare, a proporzione di esse linee, i momenti; il richiesto centro della percossa, nella detta verga, risponde in E, dove cade la linea, che passa per il centro di gravità del piano triangolare.

Se il percuziente è un triangolo isoscele, appuntato in A con l'apice, le sezioni e le velocità crescono come le distanze, e perciò i momenti come i quadrati di esse distanze, o come le ordinate del trilineo parabolico ACD (fig. 328), ond'è che se FE è tra queste ordinate quella, che passa per il baricentro di esso trilineo, in E caderà il centro della percossa. Se poi suppongasi il triangolo AB trasformato in un cono, crescendo le sezioni di lui come i quadrati delle distanze, e le velocità come le semplici distanze dal centro della rotazione, i momenti progrediranno come i cubi delle distanze medesime, e dal punto E pure, da cui s'intenda pendere nella libbra l'ordinata, che passa per il centro di gravità del trilineo parabolico cubico ACD; verrà indicato il luogo, dove il cono percote con la massima energia.

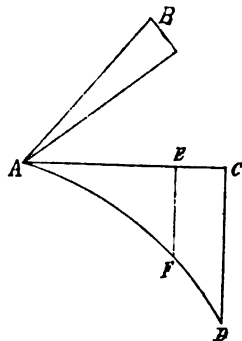



Figura 328.

Mirabile è in verità la legge dinamica di questi progressi: un punto, come sarebbe F nella fig. 327, acquista movendosi per percotere la potenza della linea GH, ossia della parabola di grado zero; la linea acquista la potenza di un triangolo, ossia della parabola di grado uno; il triangolo quella di una parabola di grado due, e il cono o la piramide di una parabola di grado tre. Il centro poi della percossa, nell'ingradarsi così il percuziente dal punto alla linea, dalla linea alla superficie, dalla superficie al solido; sega così la libbra, che la parte al vertice stia alla rimanente come uno a due, come due a tre, come tre a quattro, come quattro a cinque: intanto che, lusingato il Wallis dal mirabile ordinamento di questa serie, credè che seguitasse anche al di là de' pochi, e così semplici esempi considerati. « Atque ad eamdem formam, mutatis mutandis, procedendum erit, quaecumque fuerit figura corporis moti, sive ordinata sive utcumque inordinata, et ubicumque ponatur centrum rotationis » (Londini 1871, pag. 679). Ma avrebbe il Roberval anche a lui ripetute le obiezioni fatte al Cartesio, e noi concluderemo che nessuno dei tre grandi Matematici s'era ancora incontrato in quella regola universale, che si desiderava, e dalla quale solamente si deciderebbe con autorità di scienza se sian sempre e in tutti i casi una medesima cosa i centri dell'oscillazione, e della percossa.

Intanto quel giovanetto, a cui aveva il Mersenno proposto a risolvere i problemi robervalliani, era divenuto l'autore dell'*Orologio oscillatorio,* nella introduzione alla quarta parte della quale opera narrava come, arretratosi da principio alle difficoltà nel primo aggresso incontrate, poi le superasse felicemente, all'occasione di cercare una regola matematica, per temperare i pesi al pendolo del suo nuovo automato, deducendo quella stessa regola da principii più certi, e più generali di quel che non avessero fatto i suoi predecessori. Erano cotali principii illustrati dall'Huyghens per definizioni, e stabiliti sopra ipotesi nuove, d'onde venivasi a concluder l'intento nella quinta

proposizione dell' opera e della parte citata, apparecchiatesi già le quattro precedenti per lemmi:

Siano i due pesi A, B (fig. 329) sulla leva AC: tenderanno a scendere intorno al centro C, con momenti misurati da A . AC + B . BC. Ma se nei punti A′, B′ si sospenderanno due altri pesi A′, B′, uguali ai primi e a distanze uguali dal centro, si farà l'equilibrio. Ora, essendo in D il centro di gravità dei detti pesi A, B, è manifesto che rimarrà pure fra questi l'equilibrio, ridotti che siano in esso centro, e perciò i momenti di A′ e di B′, ossia di A e di B, equivarranno al momento unico di A e di B concentrati in D insieme, e sarà insomma A . AC + B . BC = (A + B) DC, come per altre vie più oblique dimostra l' Huyghens, nella sua prima proposta, in questa forma: *Ponderibus quotlibet, ad eamdem partem plani existentibus, si a singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hae singulae in sua pondera ductae tantundem simul efficient, ac perpendicularis, a centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia* (pag. 123).

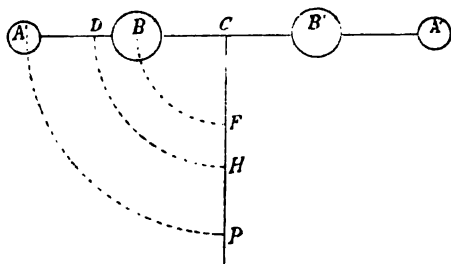



Figura 329.

Che se A, B sono uguali, dalle cose dimostrate tornerà AC + BC = 2 DC, per facile corollario, di cui nonostante fece l' Huyghens soggetto alla sua proposizione seconda: *Positis quae prius, si pondera omnia sint aequalia, dico summam omnium perpendicularium aequari perpendiculari a centro gravitatis ductae, secundum ponderum numerum* (pag. 125).

Rimossi A′, B′ contrappesi della leva, i pesi A, B insieme col punto D scenderanno per gli archi AF, BE, DH dalle altezze perpendicolari CF, CE, CH, uguali alle distanze AC, BC, DC: e perciò, sostituite queste distanze nell' equazione data dalla prima, riman senz' altro dimostrata la terza proposizione ugeniana: *Si magnitudines quaedam descendant omnes vel ascendant, licet inaequalibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cuiusque, in ipsam magnitudinem ductae, efficient summam productorum aequalem ei, quae fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines* (ibid.).

Di qui, e dal principio fondamentale dinamico, che cioè un grave, scendendo e riflettendo in alto il suo moto, giunge alla precisa altezza perpendicolare da cui fu sceso, e non più in alto, perchè la forza non può dar più di quel ch' ella ha, e non più in basso dando essa forza di meno, perchè si suppone che di lei nulla si perda, e che produca tutto il suo effetto; l' Huyghens conclude la sua quarta proposizione, che è tale: Siano i tre corpi A, B, C (fig. 330) connessi colla verga senza peso DC, nell' atto di girare intorno al centro D, per sceudere a quietarsi nel perpendicolo DF: e giunti

i detti corpi in G, H, K, supponiamo che incontrino un ostacolo, in cui urtando si sciolgano dai loro legami, e risaltino A in L, B in M, C in N, dove essendo, risponda in P il loro comun centro di gravità, mentre trovavasi dianzi in E, quand' erano connessi con la verga: è manifesto, dalle cose dimostrate e supposte, che non può il punto P essere risalito nè a maggiore, nè a minore altezza perpendicolare del punto E.

Figura 330.

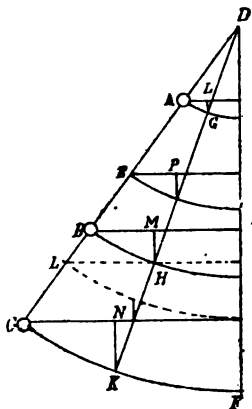
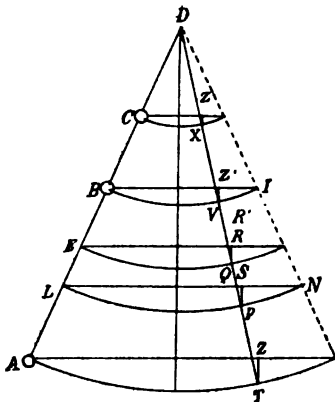
Premesse le quali cose, abbiasi il pendolo composto dei tre pesi A, B, C (fig. 331): il pendolo semplice corrispondente, dice l'Huyghens, avrà tale precisa lunghezza quale resulta dal dividere la somma de' prodotti de' pesi ne' quadrati delle distanze dall' asse dell' oscillazione, per il prodotto della somma dei detti pesi nella distanza del loro centro di gravità dal medesimo asse, cosicchè, posta essere DL la richiesta lunghezza, sia

$$DL = \frac{A \cdot AD^2 + B \cdot BD^2 + C \cdot CD^2}{DE\,(A + B + C)}.$$

Dimostrar ciò, dice l'Autore, vale quanto dimostrare che, presa FG nella figura 332 uguale a DL, e fatto l'angolo GFH uguale ad LDK, in tutti i punti, come P, O, similmente situati negli archi LN, GM, le velocità sono uguali: cosicchè, giunto G in O, abbia concepito tale impeto, da sollevarsi all' altezza perpendicolare OY, uguale alla PS.

Figura 331.

Se ciò che si asserisce non è vero, prosegue così l'Huyghens a ragionare, ammettasi dunque che la velocità in P sia diversa da quella in O, e in primo luogo si supponga maggiore, cosicchè l'altezza, a cui può sollevarsi il mobile, scioltosi dal suo vincolo, sia maggiore della PS. Presi AT, EQ, BV, CX archi tutti simili a LP, chiamate $V^a \cdot P$, $V^a \cdot T$ le velocità in P e in T, e invocata la nota legge de' quadrati delle velocità proporzionali agli spazi, avremo $V^a \cdot P : V^a \cdot T = DL : AD$, e insieme $V^a \cdot P^2 : V^a \cdot T^2 = DL^2 : AD^2 = SP : TZ$. Ma perchè si vuole che il mobile nello scendere abbia, giunto ch'egli sia in P, acquistato tal impeto, da sollevarsi ad altezza maggiore di PS; sarà dunque $TZ > \frac{SP \cdot AD^2}{DL^2}$, e anche, per simili ragioni, $VZ' > \frac{SP \cdot BD^2}{DL^2}$, e $XZ'' > \frac{SP \cdot CD^2}{DL^2}$, d' onde

$$A\,TZ + B \cdot VZ' + CXZ'' > \frac{SP\,(A \cdot AD^2 + B \cdot BD^2 + C \cdot CD^2)}{DL^2}.$$

Or, essendosi posto $DL = \frac{A \, . \, AD^2 + B \, . \, BD^2 + C \, . \, CD^2}{DE\,(A + B + C)}$, dal moltiplicarsi questa stessa equazione per SP s' ottiene
$$\frac{SP\,(A \, . \, AD^2 + B \, . \, BD^2 + C \, . \, CD^2)}{DL^2} = \frac{SP \, . \, DE\,(A + B + C)}{DL},$$
e in conseguenza $A \, . \, TZ + B \, . \, VZ' + CXZ'' > \frac{SP \, . \, DE\,(A + B + C)}{DL}$.
Posto poi in R′ il centro di gravità de' pesi risaliti in Z, Z′, Z″, sarà $A \, . \, TZ + B \, . \, VZ' + CXZ'' = QR'\,(A + B + C)$ e dall' essere $LD : ED = SP : QR$ s' ha $QR = \frac{SP \, . \, ED}{LD}$, e perciò $QR'\,(A + B + C) > QR\,(A + B + C)$.
E perchè il primo termine della disuguaglianza esprime la quantità di moto nell' ascesa del sistema, e il secondo la quantità di moto nella discesa; ne verrebbe per conseguenza l' assurdo che questo sia maggiore di quello. A un simile assurdo condurrebbe il supposto che la velocità in P, nel percorrere l' arco LN, sia minore della velocità in O, nel percorrere l' arco GM; dunque riman da ciò dimostrata la celebre proposizione quinta ugeniana: *Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, et summa productorum dividatur per id quod fit, ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem et centrum oscillationis ipsius penduli compositi* (pag. 127, 28).

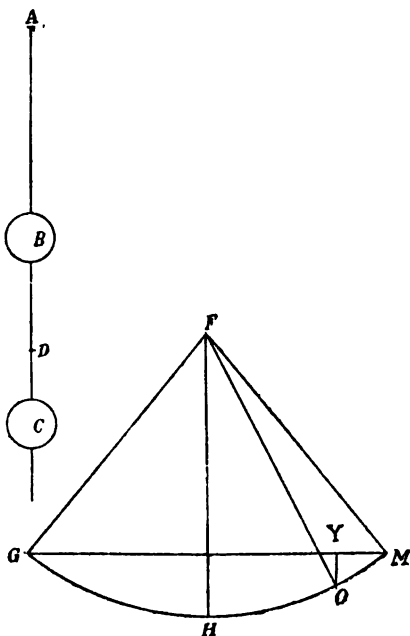
Di qui è che se i pesi, qualunque sia il loro numero N, son tutti uguali, rappresentati da P; se le distanze di ciascuno dal punto di sospensione del sistema si chiamino A, B, C...., e sia D la distanza del comun centro di gravità di essi pesi dal detto punto di sospensione; la lunghezza X del pendolo semplice, isocrono al composto, sarà data dalla formula $X = \frac{P\,(A^2 + B^2 + C^2 \ldots.)}{N \, . \, P \, . \, D} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 \ldots.}{N \, . \, D}$, secondo quel che s' annunziava dall' Huyghens stesso nella sua VI proposizione: *Dato pendulo, ex quotcumque ponderibus aequalibus composito, si summa quadratorum factorum a distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, applicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni* (pag. 131).

Si disse la quinta di queste recondite proposizioni ugeniane celebre, non tanto per l' importanza ch' ell' ebbe ne' progressi della Scienza del moto, quanto per le contradizioni da varie parti subite, e dalle quali finalmente riuscì vittoriosa. Il padre Deschales, dop' aver nel trattato VIII del suo *Mundus mathematicus* proposti vari teoremi, attinenti al centro delle percosse, ne' quali per verità non s' aggiungeva nulla di nuovo a ciò, che avevano dimostrato il Roberval e il Cartesio, e che oramai per l' opera del Wallis era stato fatto pubblicamente noto; soggiungeva, nel seguente trattato IX, al-

cune cose concernenti i centri delle oscillazioni, proponendosene principalmente l' invenzione in un pendolo composto di due globi uguali.

Se questi globi, quali s' intendono rappresentati per B, C (fig. 332), fossero in quiete, il centro del moto sarebbe nel mezzo di BC. Ma perchè C è più lontano dal punto A di sospensione, intorno a cui si move più veloce, è come se fosse più peso di B, secondo la ragion dei momenti, i quali sono C . AC, B . AB, e perciò il centro del moto dividerà la linea BC in D talmente, che debba aversi la proporzion reciproca B . AB : C . AC = CD : DB, ossia, nel presente supposto, AB : AC = CD : DB, dalla quale s' avrà indicato il punto D, in cui termina la lunghezza del pendolo semplice isocrono al composto.

Figura 332.

Maggior difficoltà, prosegue il Deschales a dire, s' incontra, mettendosi a ricercare il centro dell' oscillazione in un triangolo isoscele o in un cono, sospesi ora per l'apice, ora per la base: ma difficilissima è questa medesima invenzione, quando tutto intero il triangolo o il cono si facciano oscillare pendenti da un filo, « quae tantum innuere volui ut is cui licebit per otium examinet, haec autem non sunt ita constituta, ut iis acquiescam. Profert regulam aliquam D. Eughens, nempe ut multiplicetur pondus quodlibet per quadratum suae distantiae, fiatque summa productorum: haec summa dividatur per summam momentorum » (Lugduni, editio alt. 1690, T. II, pag. 322): regola che il Deschales confessa aver esatto riscontro con la sua data di sopra, a proposito del pendolo composto di due pesi uguali. Se sia infatti AB = 2, AC = 8, B = C = 4, e per conseguenza BC = 6, sostituiti questi valori numerici nell' equazione AB : AC = CD : DB, o nella composta da lei AB + AC : AB = CD + DB : CD, avremo $CD = \frac{2 \cdot 6}{10} = 1 + {}^1/_5$, e perciò AD = AC — CD = 8 — 1 — $^1/_5$ = 6 + $^4/_5$, precisamente come s' ha dalla regola ugeniana, secondo la quale condotto il calcolo s' ha pure $AD = \frac{4 + 64}{10} = 6 + {}^4/_5$.

Ma potevasi il riscontro fra le due regole dimostrare più generalmente, concludendo il valore di AD dall' equazione AB : AC = CD : DB, la quale

dà per composizione AB + AC : AB = CD + DB : CD = BC : CD = AC — AB : CD, d'onde $CD = \frac{AB\,(AC - AB)}{AC + AB}$, e perciò AC — CD = AD = $AC - \frac{AB\,(AC - AB)}{AC + AB} = \frac{AC^2 + AB^2}{AC + AB}$, che è la formula stessa stabilita dall' Huyghens nella sua VI proposizione.

Non per questo credè il Deschales di dover revocare contro lo stesso Huyghens la sua sentenza, ma anzi, considerando il pendolo composto, nel caso che i due globi uguali comprendessero nel mezzo il centro dell'oscillazione, concluse da parecchie esperienze, istituite col variare ai pesi grandezze e distanze, *in omnibus regulam D. Eughens non ad amussim experientiis respondere* (ibid., pag. 323) a cui il signor Huyghens contrapponeva che la non rispondenza fra la teoria e la pratica, notata dal Padre, dipendeva da ciò che, ne' suoi computi, *rationem non habuit, ut debebat, ponderis baculi cui pondera erant appensa* (Op. et T. cit., pag. 225). Nè l' inconsideratezza del Deschales fu sola, ma ebbe anche altri matematici seguaci, da' quali non si può escludere il Mariotte, che, nella seconda parte del suo trattato *De la percussion,* proponendosi di trovare *le centre d'agitation d'une partie d'une ligne, qui se meut a l'entour d'un de ses points extremes, et le centre de percussion d'un pendule compost* (Oeuvres, T. I, a l'Haye, pag. 89, 91); si limitava ai pochi e più facili esempi toccati dallo stesso Deschales, e fedelmente ne imitava i processi dimostrativi.

Ma sorsero altri in mezzo alla controversia, per dire che la teorica ugeniana non corrisponde con l' esperienza, perch' è falsa, essendo il modo dell' agire la gravità nei pesi congiunti diverso dal modo dell' agire nei separati. Primo a movere questa difficoltà fu l' abate Catelani, d' onde nacque tra lui e l' Huyghens un' altra controversia, agitata più assai della prima, e nella quale prese gran parte Giacomo Bernoulli. Esaminando egli bene la proposta questione, dimostrò che veramente due corpi, ponderando a varie distanze dal centro sul braccio di una libbra, percorrono, abbandonati a sè stessi, nel medesimo tempo, uguali spazi, o cadendo liberamente o rimanendo con essa libbra congiunti. (*Controversia de hugen. centri oscill. determinatione,* Op. et T. cit., pag. 240). E come da questa parte favoriva l' Huyghens, così dall' altra confermava le opposizioni del Catelani, concludendo dalla detta dimostrazione che la somma delle altezze, alle quali risalgono i gravi separatamente componenti il pendolo, è minore della somma delle altezze, dalle quali erano quegli stessi gravi congiuntamente discesi (ivi, pag. 241). Il marchese De l' Hôpital ebbe a maravigliarsi, vedendo che dai medesimi principii ugeniani si traevano inaspettatamente conclusioni, che contradicevano alle verità de' teoremi dimostrati da lui; ond' è che, esaminate meglio le cose, ritrovò nascondersi nel discorso del Bernoulli una fallacia, consistente nel considerare le velocità acquistate, piuttosto che le virtuali, come si fa in dimostrare le ragioni dell' equilibrio nel vette, quando i pesi non sono uguali (ivi, pag. 245). Usciva l' Huyghens da questa controversia dicendo che solo

il De l'Hôpital s' era più di tutti avvicinato alla vera soluzion del problema: reputar del resto difficilissimo il risolverlo con altro metodo diverso dal suo, com' avevano tentato di fare il Wallis, il Deschales e il Mariotte, i quali « quaesiverunt tantum centrum percussionis, nec potuerunt demonstrare idem esse cum centro oscillationis, licet id revera se habeat » (ibid., pag. 246).

La sentenza però dell' Huyghens è pronunziata in forma troppo assoluta: essere il centro della percossa una medesima cosa col centro dell' oscillazione resultava dalla definizione del Roberval e del Cartesio assai manifesto, senz'aver bisogno di essere dimostrato, benchè non valessero così fatte definizioni, se non che in certi esempi particolari. Così, anche il Wallis scriveva nello Scolio alla proposizione citata: « Atque hinc ad funependula aextimanda via patet: nempe cuiuscumque figurae sit suspensum solidum, vibrationem quod spectat, tantae longitudinis reputandum esse, quanta est distantia a suspensionis puncto ad centrum » (pag. 681) e il Mariotte s'era limitato a dimostrare, nel luogo sopra citato, che « Les centres de vibration, agitation et percussion sont un même point dans un triangle, qui se meut sur sa base » (pag. 93).

Restava a confermare la verità, non per il triangolo solo o per le altre figure contemplate già dal Roberval, dal Cartesio, dal Deschales e dal Wallis, ma per ogni sistema di pesi in generale, ciò che pretendeva di aver fatto l'Huyghens, benchè le ragioni di lui si riconoscessero più tardi, quando sul principio del secolo XVIII si resero i Matematici nel calcolare più esperti. Allora fu che, ricercandosi in un sistema di corpi, solidamente attaccati a distanze invariabili sopra un piano materiale, supposto senza peso e senza inerzia, il punto dove tutte si concentrano le forze per operare contro un resistente con la massima energia; si riuscì a dimostrare che quel punto è a una distanza dall' asse, precisamente uguale a quella data dalla formula ugeniana per il centro dell' oscillazione.

Col calcolo infinitesimale poi riuscì facile a dimostrare che la regola, insegnata nella V proposizione della parte quarta dell' Orologio oscillatorio, riscontra esattamente con la verità dei teoremi robervalliani. Era il primo di questi teoremi intorno al centro di una linea come AB (fig. 333), che si farà per comodo uguale ad a, agitata mentr' è sospesa dalla sua estremità superiore. Preso di AP, uguale ad x, un elemento infinitesimale dx, moltiplicato questo per il quadrato della distanza dal punto A, sarà il prodotto $x^2\,dx$, e sarà la somma di tutti gli altri infiniti prodotti simili $\int x^2\,dx$, che, integrato ed esteso l' integrale a tutta la linea, ossia fatto $x = a$; dà $\frac{a^2}{3}$, e così abbiamo il dividendo della formula ugeniana. Il divisore poi sarà dato dalla somma degl' infiniti punti ponderosi componenti la linea, moltiplicati per la distanza del loro centro comune di gravità, ossia sarà dato dal prodotto $a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$, ond' è che per il quoziente, da cui viene indicato il

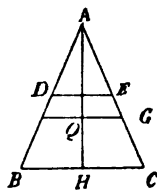



Figura 333.

centro richiesto, troveremo $\frac{a^3}{3} : \frac{a^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot a$, com' aveva ritrovato per altra via il Roberval, e dopo lui tutti gli Autori.

Rispetto al secondo teorema robervalliano, che considera il triangolo ABC, nella medesima figura, agitato intorno al vertice A, fatta AH $= a$, BC $= b$, AP $= x$, e condotte le due DE, GF parallele alla base, e distanti fra loro della quantità infinitesimale PQ $= dx$; essendo DE $= \frac{bx}{a}$, sarà l'elemento superficiale DG del triangolo uguale a $\frac{bx\,dx}{a}$, e il prodotto di lui nel quadrato della sua distanza dal punto A, $\frac{bx^3\,dx}{a}$: cosicchè $\int \frac{bx^3\,dx}{a}$ sarà la somma di tutti gl' infiniti prodotti simili, che integrata, ed esteso l'integrale a tutto il triangolo, ossia fatto $x = a$, sarà $\frac{ba^3}{4}$. Dovendosi ora questa quantità, secondo la regola ugeniana, dividere per $\frac{ab}{2} \cdot \frac{2a}{3}$, che è la somma degli infiniti elementi ponderosi del triangolo, moltiplicati per la distanza del loro centro di gravità dal punto di sospensione; avremo per quoziente $\frac{ba^3}{4} : \frac{ba^2}{3} = \frac{3}{4}\,a$, non altrimenti da quel che tanti anni prima aveva lo stesso Roberval dimostrato al Mersenno.

Non potevano questi, e altri simili riscontri, che, secondo il medesimo ordine erano facili a farsi, non avere una grande efficacia in persuadere i dissidenti, ma s'agitava allora vivamente la questione delle forze vive, dal principio della conservazion delle quali era condotta la dimostrazione del Teorema ugeniano. Pensarono perciò i Matematici di valersi d'altri principii, che non fossero controversi, e Giov. Bernoulli, applicando le leggi che muovono il vette a quello stesso Teorema, giungeva a una formula, dopo scritta la quale così notava: « Id quod omnino conforme est Regulae hugenianae, quamvis elicitae ex principio indirecto, fundato in aequalitate descensus et ascensus communis centri gravitatis, quod redit ad suppositionem *Conservationis virum vivarum* » (Opera omnia, Lausannae 1742, pag. 261). Il D'Alembert poi rese la dimostrazion del Bernoulli anche più semplice, facendola derivare dalla soluzion del seguente problema: « Trouver la vitesse d'une verge fixe, et chargée de tant de corps, qu'on voudra, en supposant que ces corps, si la verge ne les en empechoit, decrivissent dans des tems egaux les lignes infiniment petites perpendiculaires a la verge » (*Traité de Dinamique*, a Paris 1758, pag. 96).

In cotesto tempo, da certe iattanze degl' Inglesi, presero i Matematici occasione di definir nei loro precisi termini le relazioni, che passano tra il centro dell' oscillazione e quello della percossa. L'Huyghens, come udimmo, aveva detto che nè il Wallis, nè nessun altro de' suoi predecessori, era riuscito a dimostrar l'identità, benchè fosse verissima, dei due detti centri, ma lo Stone,

accademico reale di Londra, citando quel documento, che noi pure trascrivemmo dallo Scolio alla XV proposizion wallisiana *De percussione,* pretendeva che, per avere esso Wallis riconosciuta quella identità, avesse ragione di precedenza sull' Huyghens intorno alla teoria de' centri oscillatorii. Sosteneva queste sue pretensioni in un libro, stampato nel 1735 in Parigi, col titolo di *Analyse des infinimens petits,* e scritto con la principale intenzione di rivendicare al Newton il primato dell' invenzione del Calcolo infinitesimale. A quel libro facendo Giov. Bernoulli alcune argute postille, mentre mostrava da una parte l' opera, che avevano dato seco il Leibniz, l' Hôpital e altri non Inglesi a istituir l' analisi degl' infinitamente piccoli, toglieva dall'altra al Wallis, quanto all' invenzion dei centri d' oscillazione, ogni diritto di precedenza, col negar che sia, come leggermente si credeva da tutti, tra esso centro e quello della percossa alcuna connession necessaria: a persuadersi di che egli dice « il n'y a qu'a considérer ces deux choses: 1.° La nature du centre d'oscillation dépend entiérement de la nature et de l'action de la pesanteur, au lieu que, dans la theorie du centre de percussion, la pesanteur n'entre aucunement en consideration, mais seulement la matiere et la vitesse, quoique uniforme, de ses parties. De-là il arrive qu'un pendule compose de plusieurs corps de differentes densités, agité dans l'air, a son centre d'oscillation different de celui qu'il avroit, s'il etoit agité dans une liqueur, par éxemple dans l'eau. Mais le centre de pércussion sera le même dans l'air et dans l'eau. 2.° Au contraire, si les corps se meuvent dans un même milieu, le centre d'oscillation est quelque chose d'absolu et independant de toute relation, au lieu que le centre de percussion varie selon la diversité de situation du corps choqué, ensorte qu'il y a une mutuelle dépendance entre les corps choquans et choqués » (Opera cit., pag. 180).

A ridur ne' precisi termini la questione accennava anche il D'Alembert, dop' aver risoluto il problema, da cui si disse ch' egli faceva dipendere l' invenzione dei centri oscillatorii. « Il est a remarquer qu'on ne s'exprimeroit pas exactement en disant, avec quelques auteurs, que la distance du centre d'oscillation est toujours la même, soit que le milieu resiste, soit qu'il ne resiste pas. » E ciò perchè nella formula ritrovata entrano quantità « qui, dependent de la pesanteur, ne sont pas les mêmes que dans le vuide, parceque la pesanteur de chaque corps est diminuée par celle du fluide, et qu'elle l'est differentment a raison de la densité, du volume et de la figure de chaque corps » (*Traité de Dinamique* cit., pag. 100).

Ma a far queste considerazioni erano predisposte le menti dalle dottrine dell' Herman, il quale, dopo aver notato che, se il pendolo è composto di corpi di differente gravità specifica, il centro dell' oscillazione varia nella varia densità dei mezzi, per cui rimprovera coloro, che inconsideratamente confondono questo col centro della percossa; passa a dimostrare nel 1.° libro della *Foronomia* la proposizione XXXVI, che dice: non verificarsi l' identità del centro dell' oscillazione col centro della percossa, se non nel caso particolare, che i pesi componenti il pendolo siano proporzionali alle masse. « Iden-

titas centri oscillationis et percussionis eo casu, quo singularum penduli compositi partium pondera massis eorumdem proportionalia sunt » (Amstelodami 1716, pag. 108). E così può dirsi che, per opera e studio de' Matematici stranieri, giungesse al suo ultimo perfezionamento l'invenzione ugeniana.

In Italia, dove Galileo aveva insegnate intorno alla forza della percossa dottrine false, e insufficienti, ad emendare e a restaurar le quali aveva tutte esaurite le sue forze il Borelli; rimasero intatte queste importantissime questioni, cosicchè il Torricelli ebbe e restarsi muto a certe domande, che in una lettera del dì 6 Novembre 1646 gli faceva da Parigi il Mersenno: « Ab hinc anno plurimum laboravimus in regulis inveniendis, quibus agnoscitur et determinatur centrum percussionis cuiuslibet corporis alicui clavo ita appensi, ut libere hinc inde instar funependuli moveri possit... punctum seu centrum percussionis seu virtutis, hoc est in quo vehementissime percutiat vel, quod eodem recidit, putamus quantae longitudinis debet esse funependulum ut moveatur seu vibretur aequali tempore ac praedictum triangulum. Vide ut mihi significes an Galileus ea de re cogitavit et si regulam invenerit » (MSS. Gal. Disc., T. XLI, f. 28).

Nè solamente non aveva trovata la regola Galileo, ma non l'avevano trovata nemmeno gli Accademici del Cimento, quando già potevano aver notizia delle invenzioni del Roberval e del Cartesio, le quali è certo che furono comunicate, nell'Agosto del 1646, al Torricelli per lettera scrittagli di Parigi dal Mersenno: « Sit baculus sive quadratus, sive rotundus: dico funependulum longitudine subsesquialtera longitudini baculi suas habere vibrationes aequales tempore. Itaque dividatur cylindrus sive baculus in tres partes: funependulum duorum erit partium. Regula generalis, quam nobis D. Cartesius a nobis rogatus misit, haec est: omnia corpora, praeter centrum gravitatis, aliud centrum percussionis, sive agitationis habere » (ibid., fol. 59). Nonostante i nostri Accademici fiorentini non sapevano ancora dire con certezza di scienza quanta parte dell' asse della pallina d'oro dovesse aggiungersi al filo di seta, per aver la lunghezza esatta del loro pendolo prediletto. Abbiamo di ciò il documento in una nota autografa del Viviani, scritta per insegnare il modo di *trovare qual punto del pendolo sia quello, dal quale si regola il moto.*

« Prendi egli dice, una palla di piombo come A (fig. 334) e sospendila ad un filo di qualunque lunghezza come BC. Con questa fa vibrare il pendolo, e numera le vibrazioni, che esso fa in un tal tempo, v. g. in cento vibrazioni di un altro qualsiasi pendolo esploratore, che siano v. g. 60, con il filo AH e palla A. Prova poi ad accorciare il filo quanto DC, in modo che le vibrazioni del medesimo peso A col filo DC siano la metà meno, cioè 30, nel tempo che l'esploratore ne faceva pur cento. Dividi poi il residuo del filo BD in tre parti uguali, ed una divisione dal punto D gettala verso A: chè, dove il punto A termina, questo sarà il regolatore del moto del detto pendolo, e si troverà che detta misura della terza parte di BD arriva ad A, centro di gravità della palla, quando essa sarà omogenea, e il filo sia sotti-

lissimo. Ma quando anche non arrivi al centro, ma termini sopra A, ovvero sotto A, tal punto sarà nondimeno quello, che dà regola alle vibrazioni del detto pendolo » (MSS. Cim., T. X, fol. 48).

Da quali principii concludesse il Viviani questa sua regola non ci è noto, ma è certissimo in ogni modo che il punto regolatore delle vibrazioni del pendolo deve necessariamente esser più basso di A. Perchè, intendendosi divisa la palla in due emisferi soprapposti, quel di sotto, nell'agitazione, acquista maggiore momento. Che se siano dei due detti emisferi i centri di gravità in E, F, la regola semplicissima di ritrovare in G il punto, da cui si regola il moto, è data, com'insegnava il Deschales, dalla proporzione GE : GF = BF : BE.

Dopo gli Accademici del Cimento, fu forse, nel 1684, il primo in Italia a trattare de' centri delle oscillazioni e delle percosse Paolo Casati. In qual modo però ciò facesse può giudicarlo chi legge il capitolo IX del VII libro della sua Meccanica. Proponendosi egli l'invenzione del centro della percossa in un cilindro sottilissimo, o in una verga girevole intorno ad una sua estremità, considerava che i momenti andavano crescendo a proporzion de' seni degli archi concentrici, ma non sapendo applicarvi, come il Roberval, il Cartesio e il Wallis il metodo degli indivisibili, non riuscì a determinare il punto della maggiore energia delle forze, che dentro certi limiti, usandovi un metodo di falsa posizione. E più da fisico che da matematico raccoglie il fiore delle sue dottrine nell'insegnar che il centro della percossa di un sistema, per esempio di una clava, è a tanta distanza dall'asse della sospensione, quant'è la lunghezza di un pendolo isocrono, composto di un sottilissimo filo di rame, e di un piccolo globo, avvertendo che « si una perpendiculi vibratio diuturnior sit quam una clavae vibratio, decurtandum est filum, si brevior, producendum usque eo, dum perpendiculi vibrationes singulae singulis clavae vibrationibus isochronae fuerint » (Mechanic. libri, Lugduni 1684, pag. 716).

Figura 334.

IV.

Rimane a dire, secondo l'ordine propostoci, delle Forze centrifughe, a dimostrar la natura e le proprietà delle quali anche venne all'Huyghens l'occasione dall'Orologio oscillatorio. I teoremi nuovi relativi a questo argomento, e solamente pubblicati dall'Autore per dar perfezione di scienza al nuovo automato, sparsero nelle menti dell'Hook, del Newton, c di altri Matematici inglesi i germi fecondi della Meccanica celeste, d'onde è facile argomentare all'importanza della presente parte della nostra Storia, la quale, aprendosi a un tratto, poco dopo la metà del secolo XVII, com'alveo a ricevere un gran fiume, ebbe pure da lontani e sottilissimi rivoli la sua sorgente.

Quella forza, a cui piacque all' Huyghens di dare il nome di *centrifuga*, si rimase per lunghissimo tempo implicata così ne' moti di rotazione, che l' ufficio nostro si riduce ora a narrar come e quando riuscissero finalmente i Matematici a distinguerla, e a misurare la proporzione ch' ell' ha all' altra sua componente. Le prime speculazioni perciò versarono intorno a que' moti violenti, de' quali Aristotile, nella sua XII questione meccanica, era venuto a porgere i primi esempi. Si propone quivi il Filosofo di rendere la ragione perchè un proietto vada con tanto maggior impeto, girato nella fionda, che se fosse gettato dalla semplice mano: e dice che ciò forse avviene, perchè quel che si getta, nella mano, si parte dalla quiete, e nella fionda con velocità precedente: *omnia autem, cum in motu sunt, quam cum quiescunt, facilius moventur* (Operum, T. XI, Venetiis 1560, fol. 32 ad t.). Ma un' altra ragione soggiunge a questa il Filosofo, ed è che la mano fa da centro del moto, e la fionda si dilunga dal centro: *quanto autem productius fuerit id quod a centro est, tanto citius movetur* (ibid.).

Il principio aristotelico era l' unico, che senz' altra dichiarazione s' applicasse, in simili questioni meccaniche, dai Matematici, fra quali basti citare il Cardano, che, nel capitolo LVI dell' XI libro *De rerum varietate*, lo formulava con queste parole: « Omne quod movetur violenter eo velocius movetur, quo celerius et per longius spatium ab eo a quo movetur » (Op. omnia, T. III, Lugduni 1663, pag. 214).

Anche Giovan Batista Benedetti ripetè poi che *quanto maior est aliqua rota tanto maiorem quoque impetum, et impressionem motus eius circumferentiae partes recipiunt* (Speculationum liber, Venetiis 1599, pag. 159), ma egli ha il merito di avere speculato un principio più prossimo e più immediato, da concluder la proposta verità del teorema. Credè di aver egli ritrovato quel principio in un fatto, *quod a nemine adhuc, quod sciam, in trocho est observatum,* ed è che, immaginando essa trottola, mentre gira velocissimamente sul suo punzone, esser ridotta in minute schegge, queste non cadono a perpendicolo, ma vanno per linea retta orizontale, e tangente a quel punto del giro, da cui furono scisse: ciò che dall' altra parte si vede avvenire ordinariamente nelle ruote de' carri, e in qualunque altro corpo, che sia da estrinseco moto violentemente circondotto. Intorno ai quali moti rotatorii il Matematico veneziano stabilisce le dottrine seguenti: « Quaelibet pars corporea, quae a se movetur, impetu eidem a qualibet extrinseca virtute movente impresso, habet naturalem inclinationem ad rectum iter, non autem curvum. Unde, si a dicta rota particula aliqua suae circumferentiae disiungeretur, absque dubio per aliquod temporis spatio pars separata recto itinere ferretur per aerem, ut exemplo a fundis, quibus iaciuntur lapides, sumpto, cognoscere possumus. In quibus impetus motus impressus naturali quadam propensione rectum iter peragit, cum evibratus lapis per lineam rectam contiguam giro, quem primo faciebat, in puncto in quo dimissus fuit, rectum iter instituit » (ibid.).

Posto così il principio che il mobile, per inclinazion sua naturale, è di-

sposto d'andare in linea retta, tangente al punto del giro, da cui si scioglie, ed essendo facil cosa a concedere che tanto sia maggiore il moto, quanto è più secondato dalla sua propria natura; conclude il Benedetti dovere essere nella ruota maggiore, maggiore altresì l'impeto della proiezione, perchè la sua curvatura, più che nella ruota minore, s'accosta alla linea retta. « Quia, quanto maior est diameter unius circuli, tanto minus curva est eiusdem circumferentia, et tanto propius accedit ad rectitudinem linearem. Unde earumdem partium dictae circumferentiae motus ad inclinationem sibi a natura tribulam, quae est incedendi per lineam rectam, magis accedit » (ibid.).

In questi moti giratorii però, come per esempio in quello volgare della fionda, s'osserva, dice il Benedetti, un certo effetto *notatu dignus*, ed è che, quanto più cresce l'impeto del corpo girato, tanto più è necessario che, mediante la fune, si senta a lui tirare la mano. Ecco dunque proporsi alla mente dello speculatore la question della forza centrifuga propriamente detta, che par nascere dall'impeto di proiezione, ma egli non sa far altro intorno a ciò che applicare il professato principio, dicendo essere di quel notabile effetto la ragione « quia, quanto maior impetus impressus, tanto magis corpus ad rectum iter peragendum inclinatur: unde, ut recta incedat, tanto maiore vi trahit » (ibid., pag. 161).

Di qui si vede che il Benedetti aveva fatto un notabilissimo progresso, riducendo l'impeto del mobile alla forza della sua proiezione per la tangente, ma non perciò era entrato addentro al mistero di queste forze, non penetrabile se non a colui, che avesse saputo decomporre quell'unico moto proiettizio in due: uno che mena il mobile in giro, e l'altro che nello stesso tempo lo farebbe rifuggire dal centro, se un'arcana forza di attrazione non lo tenesse a sè immobile e fisso. Questa forza, che poi si disse *centripeta*, e che è una delle componenti il moto tangenziale, fu primo a riconoscerla Galileo, che ne' dialoghi dei due Massimi Sistemi, fra i promotori di questa scienza, immediatamente succede all'Autor del libro delle Speculazioni. Nella seconda Giornata, in proposito di rispondere all'obiezione, che, quando la Terra girasse in sè stessa, il moto della superficie, verso il circolo massimo, come incomparabilmente più veloce dei paralleli, dovrebbe estrudere ogni cosa verso il cielo; proponeva e dimostrava poi agl'interlocutori il seguente

TEOREMA. — « *Quanto più si cresce la ruota, tanto si scema la causa della proiezione.* »

« Siano due ruote diseguali intorno al centro A (fig. 335), e della minore sia la circonferenza BG, e della maggiore CE, e il semidiametro ABC sia eretto all'orizonte, e per i punti B, C segniamo le rette linee tangenti BF, CD, e negli archi BG, CE sieno prese due parti eguali BG, CE, e intendasi le due ruote esser girate sopra i loro centri con eguali velocità, sicchè i due mobili, quali sariano v. g. due pietre poste ne' punti B e C, vengano portate per le circonferenze BG, CE con eguali velocità, talchè, nell'istesso tempo che la pietra B scorrerebbe per l'arco BG, la pietra C passerebbe l'arco CE: dico adesso che la vertigine della minor ruota è molto

più potente a far la proiezione della pietra B, che non è la vertigine della maggior ruota della pietra C. »

« Imperocchè dovendosi, come già si è dichiarato, far la proiezione per la tangente, quando le pietre B, C dovessero separarsi dalle lor ruote, e cominciare il moto della proiezione dai punti B, C, verrebbero dall'impeto concepito dalla vertigine scagliate per le tangenti BF, CD. Per le tangenti dunque BF, CD hanno le due pietre eguali impeti di scorrere, e vi scorrerebbero, se da qualche altra forza non ne fossero deviate, la qual forza non può essere che la propria gravità. »

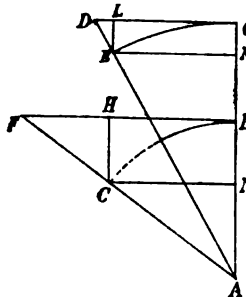



Figura 335.

« Ora considerate che, per deviar la pietra della minor ruota dal moto della proiezione, che ella farebbe per la tangente BF, e ritenerla attaccata alla ruota; bisogna che la propria gravità la ritiri per quanto è lunga la segante FG, ovvero la perpendicolare tirata dal punto G sopra la linea BF, dovecchè, nella ruota maggiore, il ritiramento non ha da essere più che si sia la segante DE, ovvero la perpendicolare tirata dal punto E sopra la tangente DC, minor assai della FG, e sempre minore e minore, secondo che la ruota si facesse maggiore. E perchè questi ritiramenti si hanno a fare in tempi eguali, cioè mentre che si passano li due archi uguali BG, CE, quello della pietra B, cioè il ritiramento FG, dovrà esser più veloce dell'altro DE, e però molto maggior forza si ricercherà, per tener la pietra B congiunta alla sua piccola ruota, che la pietra C alla sua grande: che è il medesimo che dire che tal poca cosa impedirà lo scagliamento nella ruota grande, che non lo proibirà nella piccola. È manifesto dunque ecc. » (Alb. I, 238, 39).

Trattandosi di ruote artificiali, non si potrebbe dire esser la gravità la forza, che tira la ruota al centro, nemmen quando, come qui si vuole, i semidiametri AB, AC fossero eretti all'orizonte. Ma, essendo la principale intenzione di questo teorema quella di applicarlo al moto rotatorio intorno all'asse della Terra, della quale A fosse il centro, e intorno a lui i due archi disegnati; il concetto di Galileo riscontra mirabilmente con le dottrine neutoniane, secondo le quali propriamente la forza centripeta della pietra, in un circolo concentrico con la Terra, non è che la gravità sua naturale. Torna in ogni modo benissimo, a conferire il discorso di Galileo co' teoremi del Newton, che i ritiramenti al centro, o le forze centripete, sòn proporzionali alle parti esterne FG, DE delle secanti, o alle perpendicolari GH, EL, o ai seni versi BN, MC: cosicchè non rimaneva a far altro ne' dialoghi del Mondo, per prevenire la conclusione annunziata nel V corollario della IV proposizione, scritta nel Tomo primo dei Principii di Filosofia naturale, che dimostrar la ragione delle linee GH, EL, o delle loro uguali.

Nemmeno il Mersenno, inserendo nella XVIII proposizione del suo libro *Du mouvement des corps*, pubblicato in Parigi nel 1635, questa medesima argomentazione contro chi, per gli effetti della proiezion superficiale, negava

la diurna vergine terrestre; promoveva di un passo le dottrine galileiane verso la teoria delle forze centrali, limitandosi a tradurre fedelmente in francese l' interlocuzion del Salviati.

Forse opponeva qualche difficoltà a questa promozione la Geometria elementare, mentre quella degli indivisibili, se avesse incontrato il favore di Galileo, gli avrebbe di un intuito rivelato che la proporzione tra BN e CM è quella reciproca dei raggi. Se BG, CE infatti son archi così minimi, da confondersi con le loro sottese, BG^2 è uguale a $2AB.BN$, e $CE^2 = 2AC.CM$; ond' essendo per supposizione $BG = CE$, ne consegue senz' altro $BN : CM = AC : AB$.

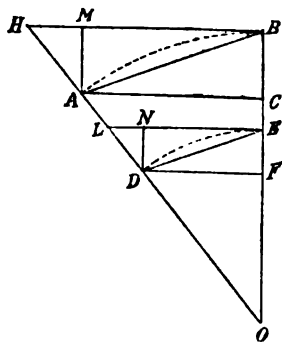
A chi poi fosse curioso di sapere se fù veramente qualche difficoltà, incontrata nella dimostrazione, o il pensiero di non divagar dal soggetto del discorso, che fece a Galileo lasciar l' occasione di concluder nel luogo citato la verità del nuovo e bellissimo teorema; inclineremmo a dire essere stato piuttosto quel motivo che questo. Perchè vinte, nel caso de' ritiramenti al centro sulle ruote di varia grandezza, ma ugualmente veloci, le difficoltà geometriche, che si paravano nel dimostrar l' altro caso; troviamo, tra i copiati dal Viviani, il teorema di Galileo, che i ritiramenti o le forze centripete, o le centrifughe a loro uguali e contrarie, stanno direttamente come i semidiametri delle ruote.

« Siano le due circonferenze AB, DE (fig. 336), sopra le quali s' intendano in B e in E posati due gravi, quali sariano due pietre, e rivolgendosi intorno al centro O le due ruote, vengano le dette pietre per la vertigine estruse secondo le direzioni delle tangenti BH, EL. Dico che il ritiramento AH, al ritiramento LD, o la perpendicolare AM, uguale alla BC, alla perpendicolare DN, uguale alla EF, ha la proporzion medesima che il semidiametro OB, al semidiametro OE. »

Figura 336.

« Imperocchè, tirate le suttese AB, ED, i triangoli simili danno che AB a DE è come OB ad OE, ed anche, che il quadrato di AB, al quadrato di DE, è come il quadrato di OB al quadrato di OE. Dall' altra parte il quadrato di AB è uguale al doppio di BO moltiplicato per BC, e il quadrato di ED è uguale al doppio di EO moltiplicato per EF. Dunque diremo che il quadrato di AB sta al quadrato di ED, come il rettangolo di BO e di BC sta al rettangolo di EC e di EF, ossia come il quadrato di BO sta al quadrato di EO. E di qui è manifesto che BC ad EF ha egual proporzione che BO ad EO, com' era il proposito di dimostrare. » (*Roba del gran Galileo, in parte copiata dagli originali, e in parte dettata da lui cieco a me Vincenzio Viviani, mentre dimoravo nella sua casa d' Arcetri*).

Rimasto questo teorema dimenticato ne' manoscritti, e l' altro della se-

conda giornata dei Massimi Sistemi chiuso nel suo germe, e perciò non apparente, si può dir che non dette Galileo nessuno impulso a far progredire la Scienza delle forze centrali, che intanto dalle umili fionde, e dalle ruote dei carri, il Borelli sublimava alle ruote celesti. A coloro che opponevano non poter la Terra moversi dal suo proprio luogo, perchè, non avendo chi la sostenti, cadrebbe; si rispondeva, come da Galileo stesso a quel peripatetico cappuccino veronese, essere una tale opposizione ridicola, « quasi che il moto velocissimo per l' opposto non sia quello, che vieta il cadere agli uccelli volanti, a' sassi scagliati, alle trottole dei fanciulli. Ma non dicono i Filosofi che la Luna e le altre stelle non cadono, perchè la velocità del loro moto le trattiene? » (Alb. VII, 61).

Questa vera Filosofia però non fu prima insegnata che dal libro *Theoricae Mediceorum,* dicendovisi che la Luna non cade sulla Terra, nè i satelliti su Giove, nè i pianeti sul Sole, perchè la forza magnetica dell' attrazione, sola causa efficiente di quelle cadute, viene equilibrata dalla contraria forza centrifuga, che svolgesi nel girare. Ma il Borelli pretendeva di più che, dalla composizione di queste forze contrarie, dipendesse la maggiore o minore velocità del pianeta nel perielio e nell' afelio: « Ex compositione dictorum motuum efficitur vis quaedam et impetus compositus, ex quo pendet periodus celeritatis acquisitae a planeta, quae a remotissimo termino, usque ad proprinquissimum, augetur ea proportione, quo distantiae decrescunt » (Florentiae 1665, pag. 77). E in ciò il valent' uomo aberrava, perchè dalla composizione di quelle due forze opposte, quando l' una fosse stata maggiore dell' altra, non poteva nascere un moto progressivo nell' orbita, ma solo un avvicinarsi o un dilungarsi del pianeta dal centro. Da che è manifesto che l' Autore, nonostante che la lettura del secondo dialogo dei Massimi Sistemi l' avesse potuto avviare alla scoperta del vero, confondeva la forza centrifuga con quella di proiezione.

Duravano dunque ancora nel 1665 le tenebre, che involgevano il cielo aristotelico, non rischiarato che da' lampi del Benedetti e di Galileo, quando apparve alla luce l' Orologio oscillatorio, nelle ultime pagine del quale l' Huyghens, dopo avere accennato a un' altra costruzione dell' automato con pendolo circolare, così soggiungeva: « Et constitueram quidem descriptionem horum cum iis demum edere, quae ad motum circularem et *Vim centrifugam,* ita enim eam vocare libet, attinent, de quo argumento plura dicenda habeo, quam quae hoc tempore exequi vacet. Sed ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, Theoremata traduntur ad vim centrifugam pertinentia, demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata » (Op., T. cit., pag. 185, 86): i quali teoremi, così solamente annunziati, son di numero tredici, i primi cinque relativi alle forze centrifughe, quando i raggi vettori son sul piano di rotazione, come nei cerchi, e gli altri otto, quasi tutti, quando essi raggi son fuori del piano della rotazione, come nei pendoli conici.

Era per l' Huyghens quasi un tentar le forze dei Matematici in ritro-

vare la dimostrazione di quei teoremi, i quali parvero anche di maggiore importanza, dappoichè aveva il Borelli additato che dipendevano da essi principalmente le leggi dei moti celesti. A scoprir così fatte leggi attendevano allora intensamente i matematici inglesi Wren, Hook, Halley, i quali perciò, rimeditando le conclusioni dei teoremi ugeniani, ne raccolsero per primo frutto la notizia distinta delle forze centrifughe, per cui si avvidero facilmente della fallacia, in ch' era incorso lo stesso Borelli. Dall' uso della fionda, pensavano, s' impara due essere le forze: una che mena in giro la pietra, e l' altra che tira la mano, le quali due forze, perciocchè si riducono in una, quando il mobile esce fuori dell' orbita, in direzion tangenziale; non può dunque esser altra quest' unica forza così diretta, che la resultante dalla composizione di quelle stesse due. E applicandovi la regola dei moti composti, era tale il discorso: Sia AB (fig. 337) la forza tangenziale, e l' arco AE si prenda così piccolo, da riguardarsi come una linea retta: costruito il parallelogrammo DE, vien da AE rappresentata la forza di circolazione, e da AD la centrifuga, cosicchè, sciogliendosi il grave da' suoi legami, la stessa forza tangenziale AB è quella che resulta dal comporsi insieme le due AE, AD. Il Borelli dunque, e tutti i seguaci di Aristotile, s' ingannavano in questo: che credevan esser le forze centrifughe una delle cause del moto nell' orbita, mentre in verità non ne son che l' effetto.

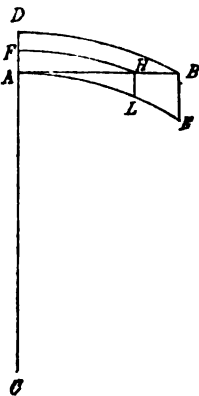



Figura 337.

Conseguiva per facile calcolo, dall' altra parte, dai teoremi annunziati dall' Huyghens, della verità de' quali si poteva aver fede, anche senza le dimostrazioni; che le forze centrifughe di due pianeti stanno direttamente come i prodotti delle masse e de' raggi delle orbite, e reciprocamente come i quadrati dei tempi periodici, cosicchè, chiamate F, f; M, m; R, r; T, t le dette forze, le masse, i raggi e i tempi; la legge di queste stesse forze è scritta da $F : f = \frac{M \cdot R}{T^2} : \frac{m \cdot r}{t^2}$. Se dunque i quadrati dei tempi, seguitava l' Hook a ragionare, stanno, secondo la terza legge kepleriana, come i cubi dei raggi, sarà $F : f = Mr^2 : MR^2$, ond' è che, per un medesimo pianeta, le forze centripete o di attrazione stanno in reciproca ragione de' quadrati delle distanze.

Se ora si risovvengano i Lettori delle cose da noi narrate, nel cap. XIV del secondo tomo, intorno alle proporzioni del diffondersi la luce, la virtù magnetica e le forze cosmiche, allo stesso modo irradianti, e che, nonostante la certezza geometrica del crescer le superficie sferiche come i quadrati dei raggi, si credeva che le forze radianti da un centro diminuissero d' intensità col semplice crescer dei raggi, per cui, non tornando il calcolo del cader della Luna, aveva abbandonato il Newton le sue sublimi speculazioni; si possono immaginare quale efficace impulso a ritornar sulla sua via ricevesse lo stesso

Newton per la notizia partecipatagli dall' Hook, che cioè, ammesse le scoperte del Kepler, conseguiva da' nuovi canoni ugeniani crescer le forze, che farebbero cader la Luna, non secondo i semplici avvicinamenti, ma secondo i quadrati degli avvicinamenti di lei alla Terra.

Germogliarono di qui i Principii matematici di Filosofia naturale, per fondamento de' quali si prevede, dal filo delle idee, come dovesse l' Autore porre la dimostrazione dei teoremi dell' Huyghens, e delle leggi dei moti, da cui, come da principii generali, scendessero i fatti dal Keplero osservati, e come tali da lui stesso descritti. Il Newton non solamente s' accorse, come l' Hook e i suoi connazionali, che le forze centrifughe conseguono com' effetto necessario dal moto circolatorio, ma che di più quell' effetto nasce sempre e per la medesima necessità, quando il moto, dalla retta direzione passa alla curva, qualunque poi siasi una tale curvità o di circolo o di ellisse o d' altra linea anche più irregolare. Nè il caratterismo di un tale effetto gli parve si trovasse espresso meglio, che dalla seconda legge kepleriana delle aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle dai raggi vettori. Il primo teorema infatti dimostrato dal Newton è tale: « Areas, quas corpora, in gyros acta radiis ad immobile centrum virium, describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales » (Genevae 1739, pag. 89). Conversamente poi dimostrò nel secondo: « Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva, in plano descripta, et radio ducto ad punctum vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales; urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum » (ibid., pag. 92).

Sia ora il circolo intorno a cui si fa il moto: è dunque già dimostrato che il grave corpo circolante è ritirato al centro, con una certa forza, della quale il Newton, che sempre vuol risalire alla universalità dei principii, attende a ritrovar la misura. Sarebbe stata l' impresa di difficile, anzi d' impossibile esecuzione, mentre che si durava a confondere le forze centrifughe con le tangenziali. Ma pure era a Galileo riuscita bene la misura delle forze dei ritiramenti dagli spazi passati ne' medesimi tempi. Il prodotto della massa per la velocità, che vale per la misura dei moti equabili e retti, non basta trattandosi dei curvi, i quali variano per altre ragioni, non difficili a scoprirsi nelle rappresentazioni, esibiteci dalle figure 337 e 335. Se la velocità è come AE, la forza centrifuga è come AD. Ma se la velocità diminuisce, riducendosi per esempio ad AL, anche la forza centrifuga diminuisce, riducendosi ad AF, ond' è che esse forze, nel medesimo circolo, dipendono dalle varie velocità, a cui sono direttamente proporzionali. Se poi s' eguagliano le velocità, e differiscono i circoli, come nella figura 335, le forze centrifughe variano anche per un' altra ragione, che è quella reciproca dei raggi. Ond' è a concludere che, per aver la misura dell' intensità delle dette forze, non basta il prodotto della massa e della velocità, ma bisogna aggiungervi per fattore il quoziente della velocità divisa per il raggio, cosicchè resulti tutto insieme quel che si cerca espresso dalla massa moltiplicata per il quadrato della velocità, e divisa per lo stesso raggio.

Il Newton però sostituiva a questo un ragionamento non men semplice, e non men concludente. Diceva che ne' moti diretti le forze son proporzionali ai prodotti delle masse e delle velocità, ma ne' curvi la proporzione deve essere anche più composta, riguardando la curvità come linee poligonari infinilatere, per gli angoli delle quali, dovendo entrare e uscire continuamente nel suo viaggio, il mobile ha bisogno di esser sospinto al moto da un impulso maggiore. Or perchè cotesti angoli son tanti più di numero, quanto l'arco è più grande, e son tanto meno incavati quant' è maggiore la curvatura, o il raggio che la descrive; la maggioranza dunque dell'impulso richiesto dovrà essere proporzionale direttamente alle velocità, e reciprocamente ai raggi, per cui le forze, che osservavano nel moto retto la semplice ragion composta delle masse e delle velocità, sopravvenendo il curvo, si compongono anche di più della ragione delle velocità divise per i raggi: ossia sarà la loro proporzion definita quella delle masse e de' quadrati delle velocità, divisi per essi raggi. « Haec est vis centrifuga, qua corpus urget circulum, et huic aequalis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus » (Principia mathem. cit., pag. 104).

Ma volendosi aver di ciò una dimostrazion matematica, il Newton sodisfa i Lettori nel suo IV teorema, con facile ragionamento, che si può ridurre alla seguente forma, ritornando indietro sopra la figura 336. Essendo le forze centrifughe, ne' gravi uguali, misurate da' seni versi EF, BC, non rimane altro a fare, che a determinare i loro valori in funzione degli elementi dei circoli, e ciò si consegue immediatamente dai canoni della Geometria più elementare, riducendo gli archi ED, AB a una piccolezza infinitesima, o come diceva il Newton alla *evanescenza*, cosicchè, confondendosi essi archi con le loro suttese, avremo $EF = \frac{DE^2}{2\,EO}$, $BC = \frac{AB^2}{2\,BO}$. E perchè, essendo uguali i tempi, come qui suppone, le velocità V, v son proporzionali agli spazi, e son proporzionali agli spazi, ossia alle circonferenze o ai loro raggi divisi per i tempi T, t, essendo essi tempi diversi; ritenute del resto le solite denominazioni, sarà la legge delle forze centrifughe espressa dalla formula generale $F : f = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$.

Di qui deduce il Newton in forma di corollarii, e conferma la verità dei primi cinque teoremi, annunziati in fine all' Orologio oscillatorio. Se i tempi sono uguali, $F : f = R : r$, cioè: *Si mobilie duo aequalia, aequaiibus temporibus circumferentias inaequales percurrant, erit vis centrifuga in maiori circumferentia, ad eam quae in minori, sicut ipsae inter se circumferentiae vel eorum diametri.* Se le velocità sono uguali, $F : f = r : R$, secondo che l' Huyghens aveva pronunziato così in secondo luogo: *Si duo mobilia aequalia, aequali celeritate ferantur in circumferentiis inaequalibus; erunt eorum vires centrifugae in ratione contraria diametrorum.* Se i raggi sono uguali, $F : f = V^2 : v^2$, e se le forze centrifughe sono uguali, $T^2 : t^2 = R : r$, ossia $T : t = \sqrt{R} : \sqrt{r}$, ciò che perfettamente corrisponde

col III e col IV ugeniano: *Si duo mobilia aequalia in circumferentiis aequalibus ferantur, celeritate inaequali, sed utraque motu aequabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum. — Si mobilia duo aequalia, in circumferentiis inaequalibus circumlata, vim centrifugam aequalem habuerint; erit tempus circuitus in maiori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.* (Opera, T. cit., pag. 188, 89).

Il teorema V aveva pel Newton una singolare importanza, direttamente entrando nell'ordine delle sue speculazioni, per cui ne volle, nello scolio alla citata proposizione IV de' suoi *Principii,* far solenne commemorazione con queste parole: « Datur autem ex descensu gravium et tempus revolutionis unius, et arcus, dato quovis tempore descriptus, per huius corollarium IX. Ex huiusmodi propositionibus Hugenius, in eximio suo tractatu *De horologio oscillatorio,* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit » (pag. 103).

Il corollario IX, che qui si cita, e per mezzo del quale si poteva, come aveva fatto l'Huyghens, conferire la gravità con la forza centrifuga, è scritto dall'Autore in questa forma: *Ex eadem demonstratione consequitur etiam quod arcus, quem corpus in circulo, data vi centripeta, uniformiter revolvendo tempore quovis describit; medius est proportionalis inter diametrum circuli, et descensum corporis, eadem data vi, eodemque tempore cadendo confectum* » (ibid., pag. 101, 2).

Sia ABG (fig. 338) il circolo, e la forza centripeta, che urge il mobile in esso, sia pari a quella che ne sollecita la discesa lungo il diametro AG, come lo solleciterebbe la gravità naturale, della quale dunque subirà il detto mobile le medesime leggi, rispetto ai tempi e agli spazi passati. Sia descritto l'arco AF, nel tempo della discesa AL: consegue, dice il Newton, dalla mia dimostrazione che AF^2 è uguale ad AL . AG. Preso infatti un arco minimo AB, in cui la forza centrifuga sappiamo essere misurata dal seno verso AC, per le note leggi dinamiche gli spazi AC, AL stanno come i quadrati dei tempi, o delle velocità, o degli spazi percorsi nel circolo, essendo per supposizione in esso i moti uniformi. Cosicchè, divisi ambedue i termini della seconda ragione per AG, avremo $AC : AL = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$. E perchè, essendo l'arco AB evanescente, uguaglia la sua sottesa, d'onde $AB^2 = AC . AG$, ossia $AC = \frac{AB^2}{AG}$; dunque anche $AL = \frac{AF^2}{AG}$, e $AL : AF = AF : AG$, secondo quel che veramente il Newton diceva conseguire dalla sua dimostrazione.

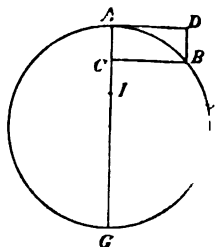



Figura 338.

Se la forza, che urge il mobile per farlo scendere lungo il diametro del circolo, è quella della sua gravità naturale, si giunge per facile via, dalla

stessa dimostrazion newtoniana, a concludere che la forza centripeta del mobile, a quella del suo peso, sta come la metà del raggio del circolo, allo spazio percorso nel tempo, che esso mobile, sollecitato dalla forza centripeta, passerebbe quel medesimo mezzo raggio. Cosicchè, chiamato S questo stesso spazio, F la forza centripeta, G la gravità del mobile o il peso, e finalmente R il raggio, avremo $F : G = \frac{R}{2} : S$. Che se $S = \frac{R}{2}$, F e G pure sono uguali, secondo il detto quinto teorema, che l'Autore dell'Orologio oscillatorio aveva proposto a dimostrare ai Matematici in questa forma: *Si mobile in circumferentia circuli feratur, ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quae sit quartae parti diametri aequalis; habebit vim centrifugam suae gravitati aequalem: hoc est eadem vi funem, quo in centro detinetur, intendit, atque cum ex eo suspensum est* (pag. 189).

Nel 1701 il marchese De l'Hôpital aveva dimostrati questi medesimi teoremi innanzi all'Accademia di Parigi, quando già l'Huyghens era morto da sei anni. Ma bene era vivo nel 1687, quando il Newton pubblicò per la prima volta la sua sublime Filosofia naturale, cosicchè vedendovi esso Huyghens la sua scienza delle forze centrifughe, non solamente conclusa da principii più generali, ma così altamente promossa alla Meccanica celeste, stimò inutile oramai il suo trattatello, che perciò Burchero De Volder e Bernardo Fullen, a' quali fu commessa la cura di pubblicarlo, insieme con gli altri opuscòli postumi dell'Autore, dissero di aver trovato *nequaquam convenienti ordine dispositum.* Nonostante hanno un carattere loro proprio, che li rende degni di storia, i teoremi delle forze centrifughe ne' pendoli conici, che l'Huyghens fa dipendere principalmente da alcuni teoremi, la verità de' quali, egli dice, *constat ex Mechanicis.*

Sia il corpo C (fig. 339) posato sul declivio AB, e la forza che ve lo trattiene tiri secondo la direzione orizzontale CE: la proporzione di questa forza, a quella della gravità assoluta del detto corpo, s' avrà decomponendo la CD, condotta perpendicolare al piano AB, nella CF, diretta secondo l'azione della gravità, e nella CG, diretta secondo l'azione della potenza. Dalla qual decomposizione resulta, osservando che $CG = FD$, e chiamando a l'angolo CDF, G la gravità, e P la potenza; $G : P = FC : FD = \text{sen}\, a : \cos a = \text{tang}\, a : 1$, d'onde è manifesto che, se l'inclinazione del piano AB sull'orizonte è ad angolo semiretto, ossia se $a = 45°$, $G = P$, e ciò vuol dire che sono uguali in quel caso la gravità del corpo, e la forza necessaria a tenerlo sul declivio. Per un'altra inclinazione qualunque a' si troverebbe, fra la gravità e la nuova potenza, la proporzione $G : P' = \text{tang}\, a' : 1$, d'onde si conclude che le potenze debbono essere proporzionali alle tangenti degli angoli delle inclinazioni. Se invece che dal piano inclinato s' immagini poi il grave sorretto dal filo HC, come nel pendolo, fatta

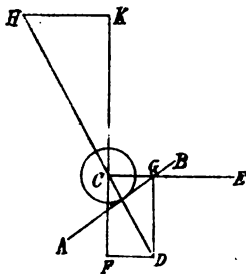



Figura 339.

rappresentare da HC la forza della trazione, questa si risolverebbe nella verticale KC, e nella orizzontale HK, in proporzion delle quali starebbe la gravità del pendolo stesso rispetto alla forza che lo sostiene in C, rimosso dalla stazion sua naturale.

Premessi i quali principii meccanici, passa l' Huyghens a dimostrare: *In curva superficie Conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvae, sive magnae fuerint, aequalibus temporibus peraguntur, quae tempora singula aequantur binis oscillationibus penduli, cuius longitudo sit dimidium lateris recti parabolae genitricis* (Opuscula posthuma, Lugd. Batav. 1703, pag. 416). Questa è la VII proposizione *De vi centrifuga,* rispondente alla VI dell'Orologio oscillatorio, la dimostrazion della quale leggendo innanzi all'Accademia parigina, il marchese De l'Hôpital, osservava che mancavano nella proposta dell'Autore due condizioni, senza le quali si rimaneva indeterminata: *prima, ut filum semper sit superficiei Conoidis perpendiculare, altera, ut semper fiat gyratio ad perpendicularem altitudinem dimidii lateris recti.* Il De Volder rispondeva che, se mai, la condizione mancante è una sola, riducendosi manifestamente la seconda alla prima; ma che in effetto la proposizione ugeniana non è limitata da condizioni, essendo ella universalissima, come *patet ex demonstratione, quam hic libellus exhibet.* In sostanza il De Volder aveva ragione, ma riuscirebbe ai Lettori del libretto la cosa anche più patente, quando alla dimostrazione, per non aver tenuto l'Autore le vie più semplici, non fosse venuta a mancare quella chiarezza, che sarebbesi potuta secondo noi conseguire, dimostrando indipendentemente l' una dall' altra le due parti, nelle quali è distinto il teorema.

Quanto alla prima, essendo nella semiparabola HDB (fig. 340) rappresentata la sezion del Conoide, sul quale s' appoggi in H il corpo, condotta la tangente HF, e la perpendicolare HG, consegue dai principii meccanici già dimostrati che la potenza, o la forza centrifuga F che l' eguaglia, e che è necessaria a sostenere il detto corpo in H, sta alla gravità naturale di lui come HG a GF: o, riguardato pendulo dal filo HL, come l'ordinata HK alla sunnormale LK. In un'altra posizione, per esempio M, la proporzione tra la forza centrifuga F', e la gravità, sarebbe quella dell'ordinata MN, alla sunnormale NO: e perchè, per la proprietà della curva, le sunnormali s'eguaglian tutte fra loro, sarà dunque F : F' = HK : MN. Ond'essendo le forze centrifughe, in queste e in tutte le altre posizioni sulla concavità del Conoide, proporzionali ai raggi delle rotazioni, saranno, per la conversa della prima *De vi centrifuga,* i tempi periodici uguali.

Figura 340.

Di qui, osservando che i pendoli H, M, e tutti gli altri, descrivono coni

tutti aventi la medesima altezza uguale alla sunnormale, o alla metà del parametro della parabola; veniva per corollario, senza trattenervi come fa l'Huyghens altro discorso, dimostrata la seguente proposizione VIII: *Si mobilia duo ex filis inaequalibus suspensa gyrentur, ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili manente immoto, fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, axes sive altitudines acquales; tempora quoque, quibus utrumque mobile circulum suum percurrit, aequalia erunt* » (ibid., pag. 418). Conversamente poi, dimostrata questa, si sarebbe potuta per corollario dimostrar la VII, quanto alla sua prima parte, osservando che i pendoli H, M descrivono, rotando intorno all'asse del Conoide parabolico, coni tutti di pari altezza.

Venendo alla seconda parte della proposizione VII, supposto essere in A il foco della parabola, per le proprietà di lei, particolarmente dimostrate dal Torricelli, nella VII e VIII del primo libro *De motu gravium*, sappiamo che l'ascissa AB è uguale a un quarto, e l'ordinata AD alla metà del lato retto, ossia del parametro, e, prolungato l'asse in E, cosicchè AB e HE siano uguali, sappiamo pure che la linea condotta fra D ed E è tangente alla curva, e che, il triangolo BAE essendo isoscele, l'angolo ADE è semiretto, per cui la forza centrifuga in D, e la gravità naturale del corpo che ivi riposa, per i lemmi meccanici poco fa commemorati, sono uguali. Di qui è che, per la conversa della quinta di questo libretto, e dell'Orologio oscillatorio, il tempo, in cui il corpo D compie il suo giro, sta al tempo della discesa naturale di lui da pari altezza alla metà del raggio DA, come la circonferenza sta a quel suo medesimo raggio: cosicchè, chiamati $T^o . P$, $T^o . \frac{AD}{2}$ i detti tempi, avremo $T^o . P : T^o . \frac{AD}{2} = 2\pi AD : AD$. Riguardato poi D come un pendolo, che faccia le sue minime oscillazioni in archi di circoli osculatori alla Cicloide, dalla XXV della seconda parte dell'Orologio oscillatorio sappiamo che il tempo di una di queste minime oscillazioni, al tempo della scesa perpendicolare per la metà della lunghezza del pendolo, ha la proporzione della circonferenza al diametro: cosicchè chiamato $T^o . O$ il tempo della detta minima oscillazione, avremo $T^o . O : T^o . \frac{AD}{2} = 2\pi AD : 2 AD$, ossia $T^o . 2 O : T^o . \frac{AD}{2} = 2\pi AD : AD$, dalla quale, paragonata con la precedente, resulta $T^o . P = T^o . 2 O$. E perchè il tempo periodico del corpo in D è uguale al tempo del medesimo corpo in M, in H, o in qual si voglia altro punto della concavità del Conoide; si conclude generalmente così la proposizione, con le parole stesse dell'Huyghens: « Tempus ergo gyrationis in Conoide parabolico aequatur tempori, quo binae peraguntur oscillationes penduli, cuius longitudo sit DA, dimidium lateris recti parabolae genitricis » (ibid., pag. 417).

Le osservazioni dunque del De l'Hôpital non hanno più luogo, data così altra forma più semplice e più chiara alla VII proposizione *De vi centrifuga*. Ma fa gran maraviglia che a quegli acuti censori parigini passasse inosser-

vata la proposizione XVI di questo stesso libretto, corrispondente con la XIII e ultima dell' Orologio oscillatorio, che un nostro Matematico, trent' anni e più dopo, sentì subodorare di falsa, così come l' Autore la pronunziava: *Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat, ubi ad punctum imum circumferentiae pervenerit, triplo maiori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret* (ibid., pag. 425).

L' occasione di sospettare che in questo teorema ugeniano s' ascondesse una fallacia venne al Grandi, quando il Bonaventuri, esaminando varie piccole carte, nelle quali aveva il Viviani scritte certe cose di Meccanica, che dovevano aggiungersi per illustrare le materie in simile argomento trattate dal suo Maestro; ebbe a notarvi, a proposito del pendolo, quel che ivi dice l' Autore del manoscritto, che cioè la forza, che fa esso pendolo tirando il filo, quando sta perpendicolare all' orizonte, « alla forza ch' egli fa tirandolo, se si pone il filo obliquo, rimovendolo dal perpendicolo, sta come il momento totale al momento discensivo, che avrebbe nel piano inclinato secondo l'obliquità del medesimo filo. Il che però non si trova esser vero, se non quando il filo obliquamente posto si tien fermo, ma non già quando vibrando si muove, perchè allora la forza centrifuga fa stirare viepiù il filo, benchè sia obliquo, di quando è semplicemente nella sua quiete nel perpendicolo » (Alb. XI, 132, 33).

Noi trattammo già, nella prima parte del cap. IV di questo Tomo, la presente questione, alla quale non rimane ora da aggiungere se non che, conferite il Bonaventuri le sue osservazioni col Grandi, questi prese motivo di correggere, e di perfezionare il teorema propostosi dal Viviani, dimostrando che le forze centrifughe, ne' pendoli variamente inclinati all' orizonte, stanno come i seni degli angoli delle inclinazioni. Poco esperto esso Grandi nel maneggio dei moti misti, di che in altre parti di questa Storia vedremo gli esempi, si condusse a ritrovare il vero per certe vie oblique, le quali nondimeno tornano alle dirette, perchè, rimosso il pendolo AB (fig. 341), dalla sua stazione perpendicolare, in C, col filo AC inclinato all' orizzonte per l' angolo CAD, che chiameremo α; decomposta la gravità CE, espressa con G, nella CF, secondo la direzione del filo, e perciò misuratrice della forza centrifuga F, e nell' altra CG, ad esso filo perpendicolare; avremo F : G = CF : CE = CH : AC = sen α : 1. Per un altro angolo d' inclinazione α' si trova allo stesso modo, tra la nuova forza centrifuga F e la gravità naturale, la proporzione F' : G = sen α' : 1, e perciò F : F = sen α : sen α'.

Figura 341.

Con questo teorema il Grandi, così studioso dell' Huyghens, ebbe a conferire la detta proposizione XVI *De vi centrifuga,* e avendo trovato che il pendolo in B, dop' essere sceso da D, ha una forza centrifuga proporzionale

ad AB, alla quale è pure proporzionale la gravità del peso fermo; *parmi*, ne concluse, *che caduto il globo per tutto il quadrante DCB, dovrà tirare il centro A doppiamente di quando gli era attaccato fermo*. (Instituz. meccaniche, Firenze 1739, pag. 128). E così, per verità, pare anche a noi, ragionando pure al modo dell'Huyghens, bench'egli dica che tripla, piuttosto che doppia essere la ritirata del centro *ad amussim experientiae consentit*, perchè, immaginando esser la forza del peso fermo in B quella, che lo farebbe passare equabilmente lo spazio BK, uguale ad AB, nel tempo della discesa naturale per la stessa AB; venendo il medesimo peso da D per l'arco, o da A per il perpendicolo, passerebbe equabilmente con l'impeto concepito, secondo le note leggi dinamiche, spazio doppio di BK, e non triplo.

Gli altri teoremi de' pendoli conici, che si dimostrano nel trattatello ugeniano, dipendono più o meno da questi, e avendo le loro particolari applicazioni alla fabbrica degli Orologi, cedono d'importanza a que' primi, sopra il metro de' quali, trasferitosi in cielo, temperava il Newton le danze degli Dei.

CAPITOLO IX.

Della proposta di una Meccanica nuova e della composizione dei moti

---

SOMMARIO

I. Della *Nouvelle Macanique* di Pietro Varignon; degli errori del Cartesio e di Galileo intorno alle proprietà dei moti composti, dimostrate da Giovan Marco Marci. — II. Di ciò che operarono i Matematici stranieri, per confutare il Cartesio, e per dimostrar come debba usarsi, e come sia vera la regola del parallelogrammo. — III. Come le fallacie di Galileo seducessero il Torricelli e il Viviani, e come fossero solennemente dal Borelli confermate co' suoi paralogismi.

I.

Le promozioni date alla Scienza meccanica dagli Stranieri, nella seconda metà del secolo XVII, parvero esser giunte al loro più alto fastigio, quando Pietro Varignon, avendo prima inserita nella sua *Histoire de la Repubblique des Lettres* una dissertazione, dove le condizioni dell'equilibrio nelle pulegge si dimostravano col principio dei moti composti; leggeva poco dipoi, innanzi all'Accademia parigina, la proposta di trattar tutte le macchine col medesimo principio: proposta, che venne postuma alla luce nel 1725, col titolo di *Nouvelle Mechanique*. Gli editori fecero preceder l'Opera, che si raccolse in due grossi volumi, da un discorso, in cui diceva l'Autore come, ripensando al metodo tenuto da Archimede, dal Cartesio e dal Wallis, nello stabilire le leggi dell'equilibrio nelle macchine semplici, gli parve che quegli insigni Matematici s'arrestassero piuttosto a provar la necessità di esso equilibrio, che il modo com'egli avviene: d'onde si sentì nascere il desiderio d'investigar le cose più addentro, mettendosi dietro a nuove speculazioni, delle quali passa a narrare il progresso.

Dice che *le premier obiet qui me vint à l'esprit ce fut un poids qu'une puissance soûtient sur un plan incliné,* intorno a che vennegli considerato

che l' impressione, fatta dal grave sul piano, è misurata dalla diagonale del parallelogrammo, di cui siano i lati presi proporzionali al peso, e alla forza che lo sostiene, d'onde vide aprirsi la mente a *choses toutes nouvelles.*

« Apres avoir ainsi trouvé, prosegue a dire, la maniere dont l'equilibre se fait sur des plans inclinez, je cherche, par le même chemin, comment des poids soûtenus avec des cordes soulement, ou appliquez à des poulies, ou bien à des leviers, font équilibre entr'eux, au avec les puissances qui les soûtiennent, et j'apperçûs de même que tout cela se faisent encore par la voye des mouvemens composez, et avec tant d'uniformité, que je ne pus m'empêcher de croire que cette voye ne fût veritablement celle, que fait la nature dans le concours d'action de deux poids, ou de deux puissances, en faisent que leurs impressions particulieres, quelque proportions qu'elles ayent, se confondent en une soule, qui se décharge toute entiere sur se point, ou se fait cet equilibre: de sorte que la raison physique des effets, qu'on admire le plus dans les machines, me paruit être justement celle des mouvemens composez. »

Chi legge però queste cose dubita se siano veramente, come vuole il Varignon, le sue speculazioni *toutes nouvelles,* e ripensa al Roberval, che aveva anch' egli, un mezzo secolo prima, dimostrate le proporzioni dei gravi sopra i piani inclinati, con questi stessi principii di Meccanica nuova: e ripensa all'Huyghens che, ne' lemmi alla VII, e nella XV proposizione *De vi centrifuga,* dava, come cosa nota appresso i Meccanici, la regola di misurare l' impressione di un corpo sopra un piano inclinato dalla diagonale del parallelogrammo, descritto sopra due linee, l' una delle quali fosse proporzionale al peso, e l' altra alla forza necessaria a tenerlo sul declivio. Che se si volesse dire non essere ancora, nel 1685, quando fece il Varignon la sua prima proposta, queste cose del Roberval e dell'Huyghens pubblicamente note, si potrebbe rispondere che nota era senza dubbio la *Spartostatica* dello Stevino, e notissimo il Corso matematico dell'Herigonio. Ma nè perciò, farebbero tuttavia istanza alcuni, sarebbe a diminuire il pregio della novità nella proposta dell'Accademico di Parigi, non avendo lo Stevino applicato il principio della composizione delle forze a tutte le macchine, nè essendosi dimostrati dall'Herigonio i principii, da'quali consegue la verità del suo teorema.

Comunque sia, la disputa, che troppo andrebbe in lungo, vien finalmente decisa dalla Storia, la quale si propone in questo capitolo a narrare come la regola del parallelogrammo delle forze fosse antichissima, e come, avendo pacificamente per tanti secoli regnato nel campo della Meccanica, giunto a un terzo del suo corso il secolo XVII, due potentissimi nemici le movessero guerra. Contro la quale essendo andate per alcun tempo deboli le difese, perchè soggiogate dalla prepotenza e disperse dal timore, insorsero poi più animose e tutte insieme raccolte nel Varignon, il quale, benchè non fosse propriamente altro che il restauratore, pure ebbe il nome, e s' acquistò appresso i più il merito di novello instauratore dei moti composti, e delle loro più ammirabili applicazioni.

Che fosse veramente antichissima la regola del parallelogrammo si rammemorò da noi stessi ai Lettori, infin dai principii di questa Storia della Meccanica, dove, nella prima parte del capitolo primo dell'altro tomo, si citava dalle Meccaniche di Aristotile la questione, risolutasi dal Filosofo con dire che, se un corpo è spinto nel medesimo tempo da due forze proporzionali ai lati di un parallelogrammo, il moto unico che ne resulta è diretto secondo la diagonale. Che veramente poi si tenessero dai Matematici queste dottrine per certe, e che s'applicassero a risolvere i più difficili problemi della Scienza, si mostrò per gli esempi di Leonardo da Vinci e di Vitellione, i quali, come cosa notissima ai Meccanici, e perciò da loro universalmente accettata, senza prendersi altra cura di dimostrarla; decomponevano le forze dei pesi, e le velocità dei raggi di luce, fatte rappresentare alla diagonale di un parallelogrammo, in due altre forze o velocità o moti, che avessero ad essa diagonale la proporzione dei lati.

Così operando, non credevano nè Leonardo nè Vitellione d'ingannarsi, sembrando a loro le ragioni del Filosofo dimostrative, come per dimostrative l'ebbe pure, un secolo e più dopo lo Stevino, il quale instituiva la sua nuova Spartostatica confermando la verità dell'aristotelico teorema. Ma i dubbi erano incominciati qualche tempo prima, quando si vollero sottilizzar col discorso quelle prime apprensioni di verità, così ben rispondenti al senso comune, e confermate dalle esperienze. Girolamo Cardano, nel libro IX dei *Paralipomeni,* ha il capitolo X intitolato *De motibus mirabilibus,* fra le quali maraviglie scriveva anche questa:

« *Si duobus motibus rectis idem feratur eodem modo altero ad alterum, ad rectum stante, movebitur secundum rectam per rectangulum, iuxta proportionem dimetientis.* »

« Sit A (fig. 342) motum ad B, et eodemmodo, idest aequaliter, in aequalibus temporibus, et regula, in qua est A, quae est AB, moveatur versus CD ita, quod sit aliqua proportio inter AB et AC et ducatur AD dimetiens: dico quod A feretur perpetuo his duobus motibus per AGD. Feratur enim in E: igitur si regula feratur in F erit ex supposito AC ad AF ut AB ad AE. Cumque communicent rectangula in A recto, erunt similia, igitur circa eamdem dimetientem. Igitur punctum G cadet in recta AD. Quod si A moveretur aequaliter in AB, ut AB regula versus CD, manifestum esset quod A ferretur per dimetientem quadrati, et superficies ABCD esset quadrata » (*Opera omnia,* T. X, Lugduni 1663, pag. 516).

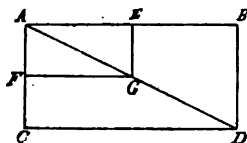



Figura 342.

La dimostrazion del Cardano, come di tutti gli Autori infino al Newton, e lo vedremo, somiglia quella di Aristotile. Ma mentre il Filosofo insegnava andar sotto la medesima regola la composizione dei moti, qualunque si fosse l'angolo del loro concorso, il Cardano soggiungeva quest'altro teorema: « Si vero eodemmodo idem punctum moveatur, sed motibus non ad rectum angulum constitutis, efficiet punctum istud lineam obliquam » (ibid., pag. 517).

E dai paralogismi di questa cardanica dimostrazione ebbero origine que'dubbi, i quali parve non lasciassero la mente quieta nemmeno al Keplero, quando, introducendo nell'Ottica il metodo usato da Vitellione, di decomporre il raggio incidente in due, l'uno perpendicolare e l'altro parallelo alla superficie dello specchio; chiamava con una certa espressione, che non sfugge all'attenzion dei Lettori, quello stesso metodo una finzione, *commentum*. Ma nei primi quarant' anni del secolo XVII i dubbi, avutane già la spinta dal Cardano, rovinarono in tali errori, che, insiem con gli sforzi per ritirarli in sul retto sentiero, formano in questa Storia un quadro notabile, di cui con brevi tocchi daremo il disegno.

Quando il Cartesio volle, nel suo celebre discorso *Del metodo*, restaurar l'Ottica, pensò di applicare alle sue dimostrazioni, sull'esempio di Vitellione, rinnovellato poco fa dal Keplero, il principio dei moti composti. Ma per poca considerazione intorno ai teoremi già dimostrati dai suoi predecessori, ch' egli al solito disprezzava, credè che il moto resultante per esempio secondo la diagonale del quadrato AB (fig. 343) dovesse equivalere alla somma dei moti componenti fatti per AH, AC, cosicchè, supposto avere questi due moti ciascuno un grado di velocità, il mobile ne avesse in B acquistati due. Similmente, facendosi il moto per AH con un grado di velocità, e per l'AD con due, credeva che per la diagonale AG andasse il mobile con velocità di tre gradi.

Secondo questa opinione le due diagonali dunque starebbero fra loro come due a tre, ciò che contradice apertamente ai canoni della Geometria, perchè $AB^2 = 2\,AH^2$, e $AG^2 = 5\,AH^2$, d'onde $AB : AG = \sqrt{4} : \sqrt{10} = 2 : \sqrt{10}$. Avrebbe dovuto di qui avvedersi il Filosofo che, non potendo non dire il vero la Geometria, quella sua opinione doveva esser falsa, ma, non permettendogli ciò il filosofico orgoglio, ricorse allo strattagemma di riguardar le linee come quelle che determinano la via, e no che misurano la quantità del moto. Ma perchè il metodo ch' egli seguiva supponeva le dette linee proporzionali alle quantità, non bastò al Cartesio l'aver sostituito i nomi alle cose, per ricoprire il paralogismo del suo discorso, nel quale, ammettendosi la coesistenza delle due equazioni $AB : AG = 2 : 3$, e $AB : AG = 2 : \sqrt{10}$, veniva a dirsi che tre è uguale alla radice di dieci. Che poi di fatto ammettesse paralogizzando il Cartesio una tale coesistenza, si ricava dalle sue proprie parole, scritte in una epistola al Mersenno, per rispondere a un suo censore, che lo aveva accusato di poca chiarezza nel chiamar *determinazione al moto* quel che si sarebbe dovuto piuttosto dire *moto determinato*.

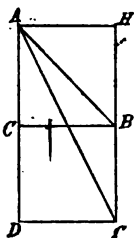



Figura 343.

« In primis ait me clarius locuturum fuisse, si pro determinatione motum determinatum dixissem, qua in re ipsi non assentior. Etsi enim dici possit velocitatem pilae ab A ad B componi ex duabus aliis, scilicet ab A ad H, et ab A ad C; abstinendum tamen esse putavi ab isto modo loquendi,

ne forte ita intelligeretur, ut istarum velocitatum, in motu sic composito, quantitas et unius ad alteram proportio remaneret, quod nullo modo est verum. Nam si, exempli causa, ponamns pilam ab A ferri dextrorsum uno gradu celeritatis, et deorsum uno etiam gradu, perveniet ad B cum duobus gradibus celeritatis, eodem tempore quo alia, quae ferretur etiam ab A dextrorsum uno gradu celeritatis, et deorsum duobus, perveniet ad G cum tribus gradibus celeritatis: unde sequeretur lineam AB esse ad AG ut 2 ad 3, quae tamen est ut 2 ad $\sqrt{10}$ » (*Epist. cartes.*, P. III, Amstelodami 1683, pag. 69).

L' error del Cartesio in credere che, facendosi separatamente il moto per la AH con un grado, e per l' AD con due, fosse nel composto per l' AG con tre gradi di velocità, esattamente serbando la somma dei due componenti; fu comune, affinchè imparino i Lettori a credere alla divinità dell' ingegno degli uomini, anche a Galileo, a cui il Lagrange attribuiva l' invenzione dei moti composti, e poi soggiungeva: *mais il paroît en même tems que Galilee n'a pas connu toute l'importance de ce theorême dans la theorie de l'equilibre,* e ciò dice perchè, dimostrando esso Galileo le proporzioni dei pesi nel perpendicolo e sopra il piano inclinato, lo vede ricorrere ai principii statici della leva, piuttosto che alla regola del parallelogrammo (*Mechanique anal.*, Paris 1788, pag. 8). Ma non deve il celebre Matematico torinese aver bene considerato quel teorema II, ch' egli cita dal IV dialogo delle Scienze nuove, perchè altrimenti l' ammirazion dell' invenzione si sarebbe convertita nella compassione del paralogismo che l' informa: paralogismo tanto men perdonabile che al Cartesio, ripensando alle tradizioni più prossime, che Galileo ebbe di quelle dottrine.

Accenna a così fatte tradizioni l' interloquio, che succede al detto teorema, e in cui fa a Simplicio difficoltà l' ammetter che l' impeto composto in B (nell' ultima figura) sia maggiore del semplice in C, mentre altrove era stato detto, e poi dimostrato, che dovevano essere que' due impeti uguali. Alla quale difficoltà risponde il Salviati essersi dimostrata una tale uguaglianza, no nel caso che il grave si muova equabilmente di moto composto, ma quando, partendosi in A dalla quiete, scende acceleratamente lungo l' AB inclinata sull' orizonte: intorno a che si sovverranno i Lettori come Galileo interpellasse Luca Valerio, il quale, in una lettera scritta da Roma il dì 18 Luglio 1609, confermava, dimostrandola così col principio dei moti composti, la verità dell' assunto:

« Essendo il moto del corpo grave D (fig. 344), mosso per l' AC all' orizonte BC, mobile verso la BC, e l' altro per una perpendicolare all' orizonte, essa ancor mobile; cosa chiara è che, quando D sarà in C, avrà acquistato tanto impeto, o inclinazione a velocemente moversi, che è la quantità dell' effetto (in quanto effetto, dico, di quella parte del moto composto, che si fa per la perpendicolare mobile eguale alla stabile AB) quanto avrebbe acquistato, se D si fosse mosso per la sola perpendicolare AB » (Alb. VIII, 47, 48).

Da questo discorso dunque, i principii che informano il quale dovevano

esser veri, perchè si vedevano condurre a conseguenze, che Galileo stimava verissime; resultava che il moto composto non era uguale alla somma, ma a uno solo dei componenti, rimanendosi l' altro senza effetto. E perchè, non in questo caso solo, ma in tutti gli altri, dove le forze sono angolari, qualche parte di esse necessariamente si elide, avrebbe dovuto persuadersi Galileo che il moto misto non può essere uguale, ma sempre minor della somma dei moti semplici separati. Tutt' altrimenti da ciò, che avrebbe suggerito il retto discorso, leggiamo annunziato così dall'Autore il teorema: *Si aliquod mobile duplici motu aequabili moveatur, nempe orizontali et perpendiculari, impetus seu momentum lationis, ex utroque motu compositae, erit potentia aequalis ambobus momentis priorum motuum.*

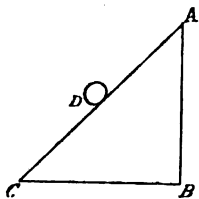



Figura 344.

« Moveatur enim aliquod mobile aequabiliter duplici latione, et motioni perpendiculari respondeat spatium AB (nella medesima ultima figura) lationi vero horizontali, eodem tempore confectae, respondeat BC. Cum igitur, per motus aequabiles, conficiantur eodem tempore spatia AB, BC, erunt harum lationum momenta inter se ut ipsae AB, BC. Mobile vero, quod secundum hasce duas motiónes movetur, describit diagonalem AC: erit momentum suae velocitatis ut AC » (Alb. XIII, 234). Chiamate dunque F, F', F'' quelle forze, o quei momenti di velocità, sarebbe secondo questo discorso $F : F' = AB : BC$, e anche $F : F'' = AB : AC$, d'onde $F + F' : F'' = AB + BC : AC$. Così (anche Galileo ripetendo i medesimi paralogismi del Cartesio) si può dire che è, ma non lo permette la Geometria, perchè, dovendo le due parti F, F' tornare uguali al tutto F'', parrebbe che i cateti all'ipotenusa, o la linea spezzata ABC dovesse tornare uguale alla AC linea retta. Onde, a salvar da una parte il suo proprio errore, e dall'altra la verità geometrica, Galileo ricorse a uno strattagemma, ch' è poi un equivoco non men meschino di quello del Cartesio, dicendo che AB, BC, AC non son linee, ma potenze, e sta bene che le potenze, o i quadrati di AB e di BC, uguaglino insieme la potenza o il quadrato di AC diagonale. « Verum AC potentia aequatur ipsis AB, BC: ergo momentum, compositum ex utrisque momentis AB, BC, est potentia tantum illis simul sumptis aequale, quod erat ostendendum » (ibid.).

Quando Galileo accomodava così questa sua dimostrazione aveva sott' occhio il terzo tomo del *Cursus Mathematicus* di Pietro Herigon, stampato per la prima volta in Parigi nel 1634, e dove è insérito un trattatello di Meccanica, la XII proposizione del quale è così espressa: *Dato pondere, duobus funibus suspenso, invenire quantum ponderis singuli funes ferant.* La soluzion del problema è data, per dir così, alla mutola, per via di segni, che sono una figura simile alla nostra (fig. 345) allato alla quale e sotto sono scritte le equazioni: $A = 1000$, $C = 800$, $D = 600$, $EB : BF = A : C$, $EB : BG = A : D$. Un corollario vi s'aggiunge, che dice: Se $C = D = A = 100$, il quadrilatero FG è una losanga, e perciò $FBG = 120°$.

Galileo e qualunque altro lettore deduceva da quelle equazioni BF : BG =

C : D: e componendo, BF + BC : BF = C + D : A, d'onde, se veramente le parti rimanendo intere dovessero tornare uguali al tutto, se cioè C + D = A, come lo stesso Galileo credeva, ne sarebbe dal Teorema herigoniano venuto per conseguenza BF + BC = BF + FE = EB, ciò che, conferito con l'altro teorema recitato nel Dialogo dal Salviati, conduceva necessariamente a dire o che non è incluso in questo esso teorema herigoniano, o ch' egli è un'aperta fallacia, perchè, non essendo l'angolo in F retto, le potenze di BF e di EF insieme non sono uguali alla potenza di BE sola. Non si sa come la pensasse intorno a ciò Galileo, ma nei discepoli di lui prevalse, come vedremo, l'opinione che la regola seguita dall'Herigonio si dovesse sospettare di falsa, e che perciò non fosse lecito comporre i moti dei lati nella diagonale del parallelogrammo, altro che nel caso delle forze ortogonali.

Figura 345.

Si potrebbe qui opportunamente ripetere da noi ai Lettori quel che disse l'Hobbes al Mersenno, a proposito del Cartesio: vedete quanto sia facile anche ai dottissimi uomini, per troppo confidar di sè, il cadere in paralogismi. Ma giova, per amor della dignità dell'ingegno umano e della Scienza, rammemorare un altro dottissimo uomo, che sanamente ragionava in mezzo ai delirii incredibili del Cartesio e di Galileo. A Giovan Marco Marci, matematico di Praga, si deve il merito di aver dimostrate le leggi della composizione dei moti con tal perfezione, da rimaner tuttavia superiore, a nostro giudizio, agli stessi autori più moderni.

Due moti si possono, dice Giovan Marco, mescere in uno solo, e questo novamente sceverarsi ne' due, non così però che la miscela torni esattamente alla somma delle parti, come a pesare con la stadera due corpi, ma facendo de' componenti una terza cosa, che non è nè l'uno nè l'altro di quelli, benchè ne partecipi delle qualità, come a mescere insieme due colori. E perchè del moto quel che può sapersi è la direzione e l'intensità, il proposito dell'Autore è quello di dimostrare come sia diretta, e quanta sia la grandezza della linea, che rappresenta il moto misto, rispetto alla direzione e alla grandezza delle linee, che rappresentano i moti semplici componenti. I principii della dimostrazione si desumono dai teoremi premessi intorno ai moti o alle forze, che produce ne' corpi la gravità naturale, con la continua e regolare successione de' suoi impulsi. Ora, supposto che un'altra forza qualunque operi in modi simili a quello della gravità, saranno simili anche le proporzioni dei moti, qualunque sia la loro direzione assoluta, diversa da quella, che è al centro della Terra. Le forze poi, che hanno generalmente, nel rettangolo della massa e della velocità del corpo mosso, la loro misura, fa più semplicemente Giovan Marco rappresentar dai quadrati, ossia dalle potenze delle linee geometriche, sapientemente però riducendo alla verità logica i paralogismi di Galileo.

Benchè sia cosa da tutti gli autori chiesta, e da tutti i lettori facilmente

concessa come assioma, pure il Matematico di Praga si propone per prima cosa di dimostrare che *Ab impulsu contrario et aequali nullus est motus; ab impulsu vero contrario et inaequali motus est aequalis excessus maioris* (*De proportione motus*, Pragae 1639, fol. 36 ad t.). Dopo la qual proposizione passa l'Autore, nella XXXI appresso, a stabilire per fondamento alle sue dottrine: *Motus secundum quid contrarii per lineam fiunt mediam, cuius intervallum determinat sinus complementi inclinationis, in ratione quam habent impulsus* (ibid., fol. 37).

Se il mobile dal medesimo punto A (fig. 346) si muova per le linee AB, AF, inclinate fra loro ad angolo maggiore o minore di un retto, « erunt hi motus secundum quid contrarii, ac proinde, in eo quo sunt contrarii, tollunt aut impediunt suum contrarium. Impulsus ergo in AF, ab impulsu in AB, et hic ab impulsu in AF retractus, quia idem mobile esse non potest in pluribus locis, ac proinde neque pluribus motibus agitari; movebitur motu inter utrumque medio, cuiusmodi linea motus AD. Dico huius lineae intervallum lineis extremis AB, AF esse sinum complementi angulorum FAD, BAD, in ratione quam habet impulsus AB ad impulsum AF » (ibid.). Condotte infatti dai punti F, B sopra la AD le perpendicolari FC, BE, e chiamate AF, AB due forze qualunque, proporzionali ai momenti della gravità naturale del medesimo corpo, o di due corpi uguali, scendenti lungo i piani inclinati AF, AB; aveva Giovan Marco dimostrato nella sua XIV, corrispondente con la III del primo libro *De motu gravium* del Torricelli, essere AF : AB = AC : AE = sen AFC : sen ABE = cos FAD : cos BAD.

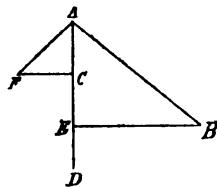



Figura 346.

Siano ora i due moti fatti per AB, AE (fig. 347) lati del parallelogrammo BE: ossendo AD il seno del complemento, ossia il coseno dell'angolo dell'inclinazione DAE, e AC il coseno dell'angolo dell'inclinazione BA, la direziòn della resultante sarà dunque per l'ACD secondo la diagonale. E perchè, condotte dai punti E, B le perpendicolari ED, BC sopra la linea della notata direzione, il moto per l'AE e per l'AD, come anche per l'AB e per l'AC, o per la sua uguale DF, secondo la XIII di Giovan Marco, e più direttamente secondo il lemma dopo la XII del sopra citato libro primo del Torricelli, si fanno in tempi eguali; è manifesto che nel tempo che il mobile sarebbe, co' moti semplici separati, portato da A in E, e da A in B, mescendosi insieme quegli stessi due moti, sarà portato per AD + DF = AF, ossia per la diagonàle del parallelogrammo. E perchè, essendo i tempi eguali, gl'impeti per AB, AE, AF, che si chiameranno B, E, F, stanno come gli spazi; sarà dunque B : F = AB : AF, E : F = AE : AF, d'onde B : E = AB : AE. Componendo, B + E : E = AB + AE : AE, e perciò B + E : F = AB + AE : AF. Così dava G. Marco matematica dimostrazione di quel che aveva semplicemente asserito nella proposizione III, che cioè, uscita fuor dell'arco la saetta, « quia a nullo deti-

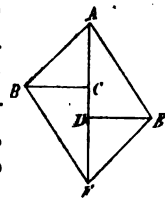



Figura 347.

netur, per lineam fit mediam inter tangentem. et lineam rectam, sive per diametrum parallelogrammi, cuius latera sunt in proportione illorum motuum » (ibid., fol. 12).

Rimaneva ancora all' Autore, nella presente dottrina dei moti misti, a risolvere una questione importante: qual proporzione cioè abbia il moto per i lati a quello per la diagonale. Il Cartesio e Galileo avevano creduto essere una tal proporzione di perfetta uguaglianza, ma in mezzo a loro così ingannati sorgeva G. Marco ad annunziare in nome della verità: *Motus perfecte mixtus fit per diametrum parallelogrammi, cuius latera constituit motus simplex, et, ex impulsu quidem aequali, est aequalis semissi, ex inaequali vero, maior semisse eiusdem motus* (ibid., fol. 37 ad t.).

Chiama moto perfettamente misto quello, che resulta di due moti semplici uguali e similmento contrari, come sarebbe in un mobile sollecitato da forze proporzionali, e dirette secondo i lati di una figura quadrata. Sia AD questa figura (348) nella quale AD, BC diametri, intersecantisi in E. Essendo $AE^2 = AC^2 - CE^2$, dunque, benchè sia vero che per AE, AC i moti sonò eguali nel tempo, differiscono nulladimeno in grandezza, e CE^2, ossia AE^2 è questa differenza. Similmente, AB^2 differisce da AE^2 di BE^2, ossia di ED^2, onde il moto per la diagonale AD è $AE^2 + ED^2 = \frac{AD}{2}$. E perchè $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + AB^2$, dunque il moto misto nella diagonale è la metà de' moti semplici componenti. « Est autem (per citar le parole proprie dell' Autore da noi commentate) motus in AB et AC, duratione quidem, aequalis motui in AE, per proposit. XIII, magnitudine vero minor, cuius excessus quadratum EB et EC, seu AE et ED. At vero duo quadrata AE, ED sunt semisses quadrati AD: hoc est motus in AB, AC, cui aequale est quadratum AD, propterea quod AD sit dupla AE aut ED; igitur motus aequaliter mixtus fit per diametrum parallelogrammi, et, ab aequali impulsu, est aequalis semissi utriusque motus simul sumpti » (ibid., fol. 38).

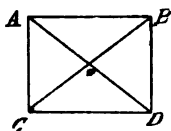



Figura 348.

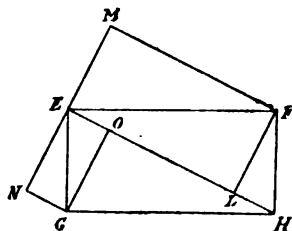
Suppongasi in secondo luogo, presegue G. Marco a dire, che i due moti siano differenti, e precisamente FE (fig. 349) doppio di EG. Condotte dai vertici G, F le perpendicolari GO, FL alla diagonale EH, sarà, per i teoremi della Geometria elementare, $EF : FH = EL : LF = LF : LH$, e anche insieme $EF^2 : FH^2 = EL^2 : LF^2 = LF^2 : LH^2$. Avendosi poi, per le cose supposte, $EF^2 = 2\,EG^2 = 2\,FH^2$, avremo anche $LF^2 = 2\,LH$, ossia $LF^2 + LH^2 = FH^2 = 3\,LH^2$: e, duplicando, $2\,FH^2 = 6\,LH^2$. Ora, perchè $EH^2 = EF^2 + FH^2$, ed $EF^2 = 2\,FH^2$, si trasformerà la trovata uguaglianza del quadrato di EH, fatte le sostituzioni, in $EH^2 = 3\,FH^2 = 9\,LH^2$, e perciò $\frac{EH^2}{2} = (4 + 1/2)\,LH^2$.

Dalla prima quadratica poi dianzi istituita resulta $EL^2 = \frac{LF^2 \,.\, EF^2}{FH^2}$: e perchè, come si disse, $EF^2 = 2\,FH^2$, e si trovò $LF^2 = 2\,LH^2$, si trasformerà quella

eguaglianza del quadrato di EL, aggiuntovi il quadrato di LH, in $EL^2 + LH^2 = 5\,LH^2$. Dunque $EL^2 + LH^2 > \frac{EH^2}{2}$. Ed essendo $EL^2 + LH^2$ il moto nella diagonale, ed $EH^2 = EG^2 + GH^2 = EG^2 + EF^2$ la somma dei moti semplici componenti, quello sarà maggiore della metà di questi, come G. Marco erasi proposto di dimostrare.

Concludesi questa teoria col rendere la ragione del perchè il moto resultante non sia nè possa essere uguale, come il Cartesio e Galileo credevano, ma si trovi sempre in difetto verso la somma dei componenti. « Causa vero huius defectus, dice l'Autore, est contrarietas illorum motuum, ex angulis proveniens, cum quibus augetur et minuitur quousque angulus latescens aequalis sit duobus rectis, in quo summa est contrarietas, ac proinde nullus esse potest motus. Angulo vero decrescente augetur similitudo motus, quousque, angulo deficiente, fiat una linea motus, in qua perfecta similitudo, nulla autem contrarietas. Itaque motus aequalis motum auget in eadem ratione: totus quidem totum, pars vero partem sibi aequalem » (ibid., fol. 39). Ciò che poi si rende evidente per la stessa figura, nella quale, diminuendo l'angolo GEF, diminuiscono anche le perpendicolari GO, LF, e al contrario crescono col crescer dell'angolo stesso. Di quelle perpendicolari poi si dice che misurano il difetto del moto: *ductae lineae perpendiculares FL, GO metientur defectum motus in EH* (fol. 38).

Figura 349.

E infatti, osservando bene, rappresentano due forze che si fanno insieme equilibrio, essendo uguali e contrarie, per cui son veramente la misura dell'elisione, quando le forze stesse, di concorrenti o di contrarie che erano, diventano angolari. Si rende la cosa anche più manifesta, costruendo i rettangoli LM, ON, in cui le forze opposte EM, EN, che uguagliano le dette perpendicolari, sono contrariamente applicate al medesimo punto E. Dalla qual costruzione si confermano altresì le cose da G. Marco già dimostrate, perchè $EF^2 = EM^2 + MF^2 = EM^2 + EL^2$, ed $EG^2 = EN^2 + NG^2 = EN^2 + EO^2$, d'onde, sommando e osservando che $EM^2 + EN^2$ è uguale a zero, $EF^2 + EG^2 = EH^2 = EL^2 + EO^2 = EL^2 + LH^2$.

Tali cose insegnava il Matematico tedesco, e sarebbero le dottrine di lui potute esser segno di stella ai naviganti nel periglioso oceano della Meccanica. Ma, rimastosi quel solitario splendore velato dalle nebbie settentrionali, predominarono nelle scuole gli errori del Cartesio e di Galileo, che, combattuti dai matematici delle straniere nazioni, e dannosamente secondati in Italia, porgono soggetto importante al seguito, e al termine del presente capitolo di storia.

II.

Quel valoroso emulo del Cartesio, che fu il Roberval, l'abbiamo dovuto più volte ammirare per le sue invenzioni, non con altro argomento felicemente da lui conseguite, che con quello dei moti composti, come nel metodo di condur le tangenti alle curve, nella teoria del piano inclinato, quando la potenza non è diretta secondo il declivio, e negli elegantissimi teoremi del nodo delle funi, che tirato sta fermo, quando le forze son proporzionali alle linee condotte dal centro di gravità ai vertici del triangolo e della piramide. Or, quello stesso Roberval aveva dimostrati i principii, de' quali faceva così le applicazioni, in un libro *Sur la composition des mouvemens,* in cui parve che le antiche tradizioni della scienza riprendessero, dopo il Cardano, il loro naturale e libero corso. S' aggiungeva al detto libro il *Projet d'un livre de Mechanique traitant des mouvemens composez,* fecondo seme di speculazioni larghe e profonde, gettato dalla frettolosa mano dell' Autore nel campo della scienza, e destinato a crescere e a fruttificare nei secoli futuri, come per esempio il seguente: *La nature en général possede les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose una infinité d'autres dans les animaux, vegetaux, mineraux etc.* (Ouvrages de Mathem. a la Haye 1731, pag. 68). Ma lo splendore di tutti questi pensieri sparsi accendesi, come a scintilla viva, a un tale teorema, posto per fondamento al trattato robervalliano:

« Soit le mobile A (nella figura 347 qui poco addietro) porté par deux divers mouvemens, desquels les lignes de direction soient AB, AE faisant l'angle BAE, et que les mouvemens droits et uniformes soient tels, qu'en mesme temps, que l'impression AB auroit porté le mobile en B, en mesme temps l'impression AE l'eust portée en E. Je dis que le mobile, porté par le mouvement compose de ces deux, sera porté le long du diametre AF du parallelogramme AF, duquel les deux lignes AB, AE son les deux costez, et que le mouvement, qu'il aura sur le diametre AF, sera uniforme. »

« Ce que nous comprendrons, si nous imaginons que la ligne AB descendant toûjours uniformement et parallelament a la ligne EF, jusqu'a ce qu'elle ne soit qu'une mesme ligne avec la ligne EF, e la ligne AE se mouvent vers la ligne BF en la mesme façon; nostre mobile A ne fait autre chose que se rencontrer à tout moment en la commune section de ces deux lignes. Or il est assez clair que les points de cette commune section sont tous dans le diamétre AF, ce que nous démonstrerons encore mieux par cette consideration » (ivi, pag. 6, 7): considerazione, che è poi quella stessa fattta dal Cardano, e prima di lui da Aristotile, per condurre le loro dimostrazioni.

Di qui si vede aprirsi, soggiungeva il Roberval, *un champs d'une infinité de belles speculations,* come sarebbero quelle, che riguardano le ri-

flessioni e le rifrazioni dei corpi obliquamente incidenti in una superficie, che ne impedisca o ne debiliti il moto. Sia AB (fig. 350) la direzione di questo moto decomposto ne' due AH, AC: la riflessione dal punto B del piano BCE, dice il Roberval, si farà con angolo uguale, o minore o maggiore dell'angolo dell'incidenza ABC, secondo che il mobile in B acquista impeto di risalire precisamente ad H, o sotto o sopra a questo punto, come per esempio in G o in I, perchè nel primo caso la resultante del moto composto dell'orizontale BE e del verticale BH, è BF; nel secondo è BL, e nel terzo BM. Rispetto poi alle rifrazioni, soggiunge lo stesso Roberval, si può supporre che nel punto dell'incidenza B il moto o aumenti o scemi la sua prima energia, cosicchè, rimanendosi invariato il moto orizontale, il verticale si riduca a BO maggiore di AC, o a BQ minore, nel qual primo caso la resultante del moto, o la rifrazione, sarebbe diretta secondo la linea BS, e nell'altro secondo la linea BR.

Si presente con facilità che in queste osservazioni aveva il Roberval di mira l'Ottica del Cartesio, contro la quale infatti si sentono apertamente pronunziare poco più sotto le seguenti parole: « Or il faut remarquer avec soin cette façon de composer, et mesler les mouvemens, puis que nous voyons que des personnes, les plus exercées dans la récherche des veritez mathematiques, se sont trompées en cet endroit. Ainsi M. Des-Cartes, pour expliquer la reflexion, décrit un cercle du centre B, qui passe par A, et trouve que le point de la circonférence, auquel le mobile retournera en autant de temps, qu'il a mis à aller de A vers B; doit estre F, au lieu que, d'un raisonnemeut semblable au nostre, il devoit en tirer comme une conséquence que le point F dans cette hypothese se rencontrera dans la circonference du cercle décrit du centre B par A. Secondement expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impression ou vistesse, et de determination, lesquels pourtant il avoit distinguez peu auparavant, car en la pag. 17, ligne derniere, il dit *et puis qu'elle ne perd rien du tout de la determination....* » (ivi, pag. 13, 14).

Figura 350.

Scriveva il Roberval queste censure in tale forma, da proporsi al giudizio del pubblico nel suo libro, ma privatamente si dirigevano epistole al Mersenno, dove gli si facevano notare i medesimi falli, perchè gli riferisse al Cartesio. L'Hobbes erasi fra tutti gli altri maravigliato del discorso poco logico fatto dall'Autore della logica del *Metodo,* che cioè una cosa manifestamente falsa si potesse dir vera, e dimostrava come invece la falsità consistesse nel credere che la quantità del moto composto fosse uguale alla somma dei componenti, dovendo essere in realtà quella sempre minore di questa, perchè nelle direzioni angolari tanto più delle forze si elide, quanto maggiore è l'angolo del concorso. E per dimostrare anche meglio questa elisione, supposto essere le due forze proporzionali ad AB, AC (fig. 351), con-

correnti in A ad angolo retto, le decomponeva ciascuna in altre due AF, FB; AE, EC, e osservava che si perdono nella resultante del moto per la BC le due forze FB, EC, operanti in diversa, anzi opposta direzione. Di qui concludeva che i moti composti nella figura 343 stanno come le diagonali AB, AG, ossia, nell'esempio del Cartesio, come due alla radice di dieci, e non come due a tre, secondo che il Cartesio stesso credeva si potesse dire, stranamente paralogizzando.

« Nam et si pilam (per riferir le parole scritte dall'Hobbes di Parigi, il dì 7 Febbraio 1641 al Mersenno) ponamus ferri ab A (nella figura 343) dextrorsum uno gradu celeritatis, et deorsum uno etiam gradu, non tamen perveniet ad B duobus gradibus celeritatis: similiter, si A feratur dextrorsum uno gradu, deorsum duobus, non tamen perveniet ad G tribus gradibus, ut D. Descartes supponit. Supponamus enim duas rectas constitutas ad angulum rectum BAC (come nella figura 351) sitque velocitas ab A versus B in ratione, ad velocitatem ab A versus C, quam habet ipsa AB ad ipsam AC: hae duae velocitates componunt velocitatem, quae est a B versus C. Dico velocitatem a B versus C esse ad velocitatem ab A versus C, vel ab A versus B, ut recta BC ad rectam AC, vel AB. »

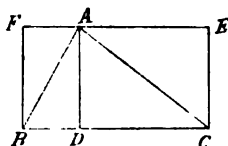



Figura 351.

« Ducatur ab A recta AD perpendicularis ad BC, et per A recta FAE eidem BC parallela: item BF, CE perpendiculares ad FE. Quoniam igitur motus ab A ad B componitur ex motibus ab F ad A, et ab F ad B, non contribuet motus compositus AB plus celeritatis ad motum a B versus C, quam possunt contribuere componentes FA, FB. Sed motus FB nihil contribuit motui a B versus C, motus enim ille determinatur deorsum, nec omnino tendit a B versus C; solus igitur motus FA dat motum a B versus C. »

« Similiter probatur AC dare motum a D versus C, in virtute solius AE. Sed celeritas, quam participat AB ab AF, et qua operatur a B versus C, est ad celeritatem totam AB in proportione FA, vel BD, ad AB: item celeritas, quam habet AC virtute AE est, ad celeritatem totam AC, ut AE vel DC ad AC; sunt ergo ambae celeritates iunctae, quibus fit motus a B versus C, ad celeritatem simpliciter sumptam in AC vel AB, ut tota BC ad AC, vel AB. Quare sumpta figura 343, erunt celeritates per AB, AG ut ipsae AB, AG, hoc est ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{5}$, hoc est ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{10}$, hoc est ut 2 ad $\sqrt{10}$, et non ut 2 ad 3. Non igitur sequitur absurdum illud ab isto modo loquendi, quod probat D. Descartes. Vide, Pater, quam pronum sit, etiam doctissimis viris, per nimiam securitatem, quandoque in paralogysmos incidere. » (*Epist. cart.*, P. III cit., pag. 73, 74).

La dimostrazione che, per essere così chiara, e perciò così efficace ad aprire le menti a conoscere il vero dei moti misti, abbiamo voluto riferire nella sua integrità; l'applicava l'Hobbes al teorema cartesiano della riflession della luce, per scoprir la fallacia del ragionamento. In quel medesimo

tempo il Fermat notava simili fallacie, nelle quali il Cartesio stesso era incorso a proposito delle rifrazioni, il teorema relativo alle quali si fondava principalmente sul supposto che rimanesse la medesima velocità nel raggio rifratto, benchè l'angolo di lui colla perpendicolare variasse da quel primo fatto nell'incidenza. Era come a dire che le diagonali BR, BS, nella fig. 350, sono uguali alla AB. E perchè ben conosceva il Fermat nascere un tale errore, nell'Autor del discorso intorno al Metodo, per non aver compresa la natura dei moti semplici, relativamente al loro composto; si mette a spiegarla in una epistola diretta al Mersenno, incominciando dal rammemorargli come di una tal qualità di moti avessero fatto uso Archimede, e altri matematici antichi nel comporre le loro Elici, e poi soggiunge: « verum quia motus ille compositus non ita frequenter in usum cadit, oportet ut alio modo consideretur, et ut specialis de eo meditatio fiat » (ibid., pag. 97).

La prima parte di questa meditazione è tale: Supposto che il mobile A (fig. 352) passi lo spazio AN in un minuto d'ora e lo spazio AC nel medesimo tempo; con ragioni molto simili a quelle del Roberval si conclude: « Fiet ergo motus compositus super linea AB, et possumus asserere grave illud percursurum lineam AR in minuto horae » (ibid., pag. 98). Cosicchè, essendo i moti equabili, e perciò le velocità, supposta l'eguaglianza dei tempi, proporzionali agli spazi, il moto per AB starà al moto per AN, o per AC, come la stessa AB alle stesse AN, AC.

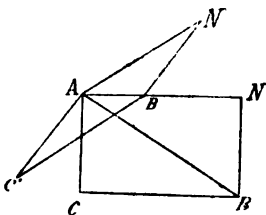



Figura 352.

Nella seconda parte del ragionamento considera il Fermat l'angolo CAN variare, e diventar per esempio maggiore qual'è C' AN', e da ragioni simili a quelle dette di sopra è portato a concludere: « quod eadem erit proportio velocitatis motus compositi in prima figùra, ad velocitatem motus compositi in secunda, quae est longitudinis lineae AB in prima ad longitudinem lineae AB' in secunda » (ibid.). E perchè AB' è manifestamente, e con facitità potrebbe provarsi dover esser necessariamente minore di AB, riman dunque così dimostrata la verità del parallelogrammo delle forze, e scoperto l'errore del Cartesio.

Queste censure dell'Hobbes e del Fermat erano scritte, come si disse, privatamente al Mersenno, al quale pure erano dirette le difese che, per la propria causa, faceva lo stesso Cartesio, aggiuntevi quelle degli amici e dei seguaci delle dottrine di lui, col non far altro insomma che avvolgersi disperatamente in nuovi paralogismi. Ma il Mersenno ebbe tanto giudizio e tanta coscienza, da non avere nessun riguardo all'amico, per difendere contro lui la verità, pubblicamente annunziata agli erranti nella XXXII proposizione della sua *Ballistica.* Ivi, a proposito dei moti composti, considerati nella figura 343 qui poco addietro, com'era stata disegnata dall'Hobbes, veniva così saviamente ripetendo le osservazioni lette e meditate nell'epistola di lui. « Ubi notandum est grave A latum vel impulsum uno gradu velocitatis

dextrorsum ad H, et uno gradu velocitatis deorsum in C, quibus pervenit ad B, non acquisivisse duos gradus velocitatis, aut tres gradus in puncto G, cum duobus gradibus celeritatis motum est ab A ad D, et uno ab A ad H per rectam AG pervenit ad G, alioqui recta AB esset ad rectam AG ut 2 ad 3, cum linea sit ad lineam ut celeritas ad celeritatem, quod verum non est, quandoquidem est AB ad AG ut 2 ad radicem 10, vel ut radix 2 ad radicem 5, hoc est: celeritas ab A ad B, ad celeritatem ab A ad G, non est ut composita ex AH et HB, ad compositam ex AH et HG: sunt enim velocitates ut subtensae AB, AG » (Parisiis 1644, pag. 110).

Utilissimi sarebbero tornati agli studiosi questi mersenniani avvertimenti, se la prepotente autorità del Cartesio e l'aforismo, male applicato al caso, che cioè le parti debbono uguagliare il tutto, non avessero congiurato così ai danni della Scienza, da consigliarla a provocare poco di poi per ristorarsene l'opera poderosa di Giovanni Wallis. Egli infatti intitolava *De motibus compositis, acceleratis, retardatis et proiectorum* il capitolo X della terza parte del suo trattato *De motu,* nel qual capitolo formulava così la VI proposizione: « Si mobile, ob duas causas motrices, duos concipiat directos impetus, puta secundum duas rectas positione datas angulum facientes, celeritatibus in se aequalibus, ad invicem vero eisdem ut parallelogrammi lateribus longitudine datis proportionalibus; feretur mobile per parallelogrammi diagonium ea celeritate, quae sit ad datas ut diagonium illud ad respectiva latera. »

« Adeoque tantumdem est, lationem quod spectat, sive feratur mobile motu ex duobus composito, qui directiones habeant secundum parallelogrammi latera, et celeritatibus ipsis proportionales, sive motu simplici secundum eiusdem diagonium et celeritate proportionali: quippe utrovis modo, eodem tempore, per eumdem tramitem eadem celeritate feretur. »

« Ideoque motui ex pluribus composito similiter accommodabitur, sive directiones habeant in eodem plano omnes, sive secus, potestque idem propterea motus infinitis modis componi. » (Londini 1671, pag. 654).

E passa il Wallis a dimostrare la proposizione nelle sue tre distinte parti, benchè le ultime due dipendano dalla prima condotta anch'essa, ad imitazione de' precedenti Autori, dal considerar che a qualunque punto preso in distanze proporzionali nelle linee de' moti semplici, diretti secondo i lati del parallelogrammo, corrisponde il moto composto in un punto della diagonale. Ma rende l'Autore in così fare l'immagine di colui, che perorando si guarda sospettoso all'intorno, perchè sa di trovarsi in mezzo a contraddittori ostinati, ai quali direttamente rivolge la parola nello Scolio dopo la proposizione seconda *De elatere.* Domandavano codesti contraddittori al Wallis chi gli avesse dato autorità di decomporre un moto unico in due, presi a capriccio e secondo gli tornava meglio, per accomodare il negozio: a' quali il Matematico rispondeva avere avuto una tale autorità da chi l'aveva data a loro di decomporre per esempio il numero 8 nelle parti 2×4, o nelle $2 \times 2 \times 2$, o nelle altre infinite, quali resulterebbero da fattori frazionari,

scegliendo fra queste infinite scomposizioni quella, che più accomoda al calcolo, certi che in ogni modo la libertà della scelta non offende le leggi o le ragioni del vero.

S' argomenta di qui che nel 1670 duravano quelle contradizioni dei Cartesiani, delle quali ebbero a fare esperienza l' Hobbes e il Fermat trent'anni prima, ed è anche resa di qui la ragione di un certo riserbo, notabile ne' Matematici di que' tempi, di non professare apertamente la regola del parallelogrammo, benchè intendessero e volessero essere intesi che quel loro metodo, riconosciuto da tutti per vero, conduceva ai medesimi resultati di quell' altro, che si diceva sbagliato. Citeremo per primo esempio, tra quei Matematici, Niccolò Witsen, il quale, nel suo libro *Del modo di costruire e di dirigere i bastimenti,* pubblicato nel 1671, risolveva il problema *In qual modo più profittevole si voltino le vele ai venti.* Ma il Witsen era discepolo dello Stevin, che egli cita, e dalla XIX proposizione statica del quale aveva appreso il modo e la ragione di risolvere i moti nei due lati di un triangolo, di cui l' altro lato fosse la diagonale del parallelogrammo doppio. La detta proposizione steviniana è celebre nella storia del piano inclinato, per esservi dimostrata la proporzion dei momenti dall' equilibrio della catena posata su due pendenze di uguale altezza, ma ben si meriterebbero maggior celebrità di lei i corollari, de' quali se si fosse rammemorato il Roberval non lo avremmo udito vantarsi di essere egli stato il primo a dimostrare qual proporzione abbia alla resistenza la potenza, che tira in direzione non parallela al declivio.

Dop' aver concluso generalmente lo Stevino, nel terzo dei corollari citati, che la resistenza assoluta del grave sta alla potenza che l' equilibra, come la lunghezza del piano sta alla sua altezza; passa nel quarto a considerare quello stesso grave configurato in un rettangolo, che, per dargli qualche aspetto di materialità, vuol s' intenda come la sezione di un cilindro o di una colonna. Sia dunque HG (fig. 353) l' asse di questa colonna, al centro di gravità della quale D venga applicata la fune DF, che impedisce al peso di scendere col contrappeso E: « il appert que comme AB à BC ainsi la colonne D au poids E » (Oeuvres mathem., Leyde 1634, pag. 449). E ciò detto, così l' Autore soggiunge nel corollario V: « Soit icy menée une perpendiculaire par le centre de la colonne D comme DK, coupant le costé d'icelle en L: alors le triangle LDI sera semblable au triangle ABC, car les angles ACB et LID sont droits, et LD est parallele à BC, et DI à AB, par quoy comme AB à BC ainsi LD à DI » (ivi). E perchè, condotta la LQ parallela ed uguale à DI, il parallelogrammo è compiuto; è manifesto dunque che lo Stevin fu il primo a riconoscere quell' importanza del teorema della composizione dei moti *dans la theorie de l'equilibre,* che il Lagrange lamentava essere sfuggita alla considerazione di Galileo, « qui au

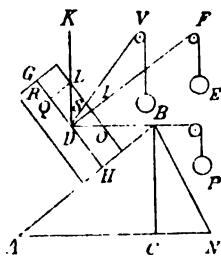



Figura 353.

lieu d'employer le principe de la composition du mouvement pour determiner directement la gravité relative d'un corps sùr un plan inclinée, il rappelle le plan incliné au levier » (*Mechanique anal.* cit., pag. 8).

Ma lo Stevino rimaneva allo stesso Galileo superiore per un' altra ragione, per aver cioè dimostrate le condizioni dell'equilibrio, non solamente quando la potenza agisce in direzion parallela, ma altresì quand'ella concorre secondo qualunque obliquità col declivio. Sia DO (nella medesima figura) questa direzione, e il peso M della colonna sia equilibrato dal contrappeso P: condotto il piano BN, con l'inclinazione CBN uguale a IDO, sarà per le cose dimostrate AB : BN = M : P. « Aussi, dice lo Stevin, LD à DO seront comme les pesanteurs y appartenans, c'est à dire comme M à P » (Oeuvr. cit., pag. 449), a quel modo che se fosse compiuto, secondo le regole note, il parallelogrammo OR. A che, in guisa di Scolio soggiungesi dall'Autore: « Ce que dessus peut aussi estre entendu d'un globe sur la ligne AB (fig. 354) comme icy joignant, là où nous dirons comme devant: que comme LD à DO, ainsi M à P (pourveu que CL soit en angles droits sur AB, c'est à dire parallele à l'axe HG du globe D) et partant comme LD à DO, ainsi la pesanteur du globe à P » (ivi).

Insegnavasi dunque dallo Stevino, come poi dal Roberval e dai Matematici moderni, a usar la regola in questo modo: Inalzate dal centro di gravità la verticale DL, che rappresenti il peso assoluto del globo, o la forza che lo tien sollevato nel perpendicolo (*elevant direct*) e sopr' essa DI come diagonale costruite un triangolo o un parallelogrammo intero, con un de' lati perpendicolare al piano inclinato, come HD, e con l'altro secondo la direzione della potenza o della forza, che tira obliquamente a sollevare lo stesso globo (*elevation oblique*), come DO: e qual proporzione è tra la linea DL e la DO, tale sarà tra il peso assoluto, e la potenza che lo tiene equilibrato sul declivio.

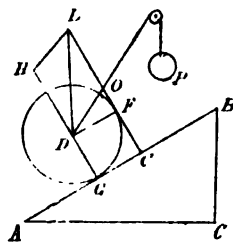



Figura 354.

A così fatta scuola ammaestrato il Witsen, francamente risolveva il suo problema navale, rassomigliando la vela, e il vascello spinto da lei lungo il solco apertogli dal timone, a un piano o a una riga come CD (fig. 355), spingente il globo A contro l'ostacolo CB, che rende immagine dell'ostacolo opposto dall'acqua al moto laterale dello stesso vascello. Rappresentata con FE la forza, che spinge la riga, o lo strale del vento, che dà nella vela, decompone esso Witsen, secondo la regola steviniana, la detta forza unica nelle due FD, ED: e perchè quella non fa nessuno effetto nello spingere, riman questa sola, che opera sopra la CD con tutta l'energia, essendole condotta perpendicolare. Una tale energia poi si comunicherebbe tutta intera al globo A, se

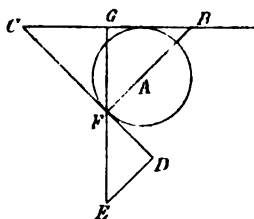



Figura 355.

l' ostacolo non ne rintuzzasse una parte, che il Witsen ha dal suo Maestro imparato a misurare dalla FG, lato del triangolo FGB o del parallelogrammo a lui doppio, fatta dalla diagonale FB rappresentare quella stessa energia intera, cosicchè non rimane che la GB, altro lato di quel medesimo parallelogrammo, a rappresentar l' attività e la direzion della forza, con cui la riga sospinge innanzi il globo, o la vela il vascello.

Premessi così fatti principii statici in generale, passa il Witsen ad applicargli alla particolar soluzione del suo problema, considerando che la più favorevole disposizion della riga è quando della forza, che immediatamente riceve, se ne perde meno, e perciò se ne partecipa più che sia possibile: ciò che comprendesi facilmente dovere avvenire quando sia $\frac{EF}{DE} = \frac{FB}{GB} = \frac{CB}{BF}$. Ma $\frac{FE}{DE} = \frac{1}{\text{sen EFD}}$, $\frac{CB}{BF} = \frac{1}{\text{sen BCF}}$; dunque EFD, ossia CFG, e BCF, ossia GCE, debbono essere uguali, ed uguali anche perciò CG e GF, affinchè il vento sopra la vela, e la vela sopra il vascello possano produrre il loro maggior possibile effetto, come con particolari esempi numerici si dimostra dall' Autore nella sua V proposizione. Il modo, con cui questa è distesa, insieme con le altre che la precedono, lo vedremo apparirci tra poco domèstico in lingua italiana, nelle carte private del Viviani, e intanto possiam renderci di qui la ragione del perchè l' Huyghens, olandese anch' egli come lo Stevino e il Witsen, trattasse qual cosa nota e consentita dai Matematici della sua nazione quel modo di comporre e decomporre nel parallelogrammo le forze, che appresso altri Matematici era penosamente dubbioso, e fieramente controverso.

Queste patrie tradizioni della Scienza le vedemmo invocate dallo stesso Huyghens, nel suo trattato *De vi centrifuga,* e nell' Orologio oscillatorio, ma non possiam tacere un altro notabile esempio di ciò, offertoci dalla prima proposizione *De potentiis fila funesve trahentibus*, che s' informa al teorema seguente di Geometria: Siano le due linee AB, AC (fig. 356), concorrenti nell' angolo A, prese secondo qualunque moltiplicità, per esempio AF = N . AB, AG = O . AC, e si costruisca sui lati AF, AG il parallelogrammo, di cui AP sia la diagonale intersecata in E dalla linea BC: dico che AP = AE (N + O). Condotte infatti le FQ, GR parallele a BC, avremo AE : AR = 1 : O, AE : AQ = 1 : N, d' onde AR : AQ = O : N, e componendo

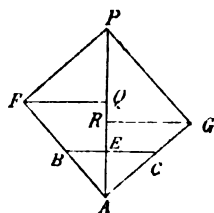



Figura 356.

$$AR + AQ : AQ = O + N : N.$$

Osservando poi che, per essere i triangoli PFQ, ARG simili, PQ = AR, e perciò AR + AQ = AP, tornerà la scritta proporzione composta ad AP : AQ = O + N : N, e da questa, AP : AE = O + N : 1, d' onde AP = AE (O + N) com' erasi detto.

Ora l'Huyghens vuol dimostrare che, se le fila AB, AC son tirate da forze proporzionali ad AB . N, AC . O, ossia ad AF, AG, la resultante o l'equivalente di queste due forze insieme è quell'unica proporzionale ad AE (N + O), ed è il mezzo della dimostrazione il citato teorema geometrico, che cioè l'AE, presa molteplice secondo la somma di N con O, uguaglia la diagonale di quel parallelogrammo, che, per le regole assai note, è atto, dice l'Autore, a rappresentare le forze, ond'egli così ne conclude la propostasi verità con queste parole: « Cùm ergo potentiae fila AB, AC trahentes sint ut AF, AG, quibus aequipollet attractio per filum AE, a potentia quae sit ut AP, *ex theoremate mechanico satis noto*; manifesta est proposita veritas » (*Opera varia* et T. I cit., pag. 287).

Non poteva nonostante l'Huyghens ignorare le contradizioni, alle quali andava soggetto quel meccanico teorema appresso i Matematici, che ignoravano o negavan fede agli insegnamenti dello Stevino, per cui parve intendesse di confermare nella verità i diffidenti, dimostrando come per altre vie si giungesse a quella medesima conclusione, alla quale era giunto il Roberval con applicarvi direttamente la regola del parallelogrammo. « Et hinc patet (conclude la sua proposizione seconda *De potentiis fila funesve trahentibus*) veritas theorematis robervalliani. *Si a centro gravitatis pyramidis fila tendantur ad quatuor angulos, quae trahantur a potentiis, quae sint inter se ut filorum ipsorum longitudines; fieri aequilibrium, manente nodo in dicto gravitatis centro* » (ibid., pag. 290).

La medesima intenzione dell'Huyghens ebbe anche il De-la-Hire, quando, nella proposizione XXI del suo *Traité de Mecanique,* risolveva, dietro i principii statici precedentemente dimostrati, il problema robervalliano: « Il faut trouver trois puissances, qui tirant un point par trois directions données, soient en equilibre entr'elles » (A Paris 1695, pag. 70). Che se siano queste tre potenze nel vigore proporzionali e dirette secondo le linee KC, KD, KE (fig. 357), « je dis que les trois puissances cherchees seron entr'elles comme les trois lignes EF ou GK son egale, EG ou KF, et EK, qui son prises dans le meme ordre, et qui sont paralleles, ou qui son partie des directions des puissances ausquelles elles respondent » (ivi, pag. 70, 71): secondo dunque la medesima regola prescritta da coloro, che applicano direttamente alla soluzion del problema, imitando il Roberval, la costruzione del parallelogrammo, ai due lati del quale prese proporzionali due qualunque delle date potenze, facesse a queste insieme equilibrio la terza, presa a proporzion della diagonale.

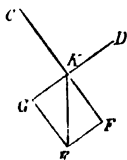



Figura 357.

Ma nella patria dell'Herigon e del Roberval altri matematici avevano preceduto il De-la-Hire, dimostrando che dai principii statici del vette e del piano inclinato si giungeva alle medesime conclusioni, che col far uso del parallelogrammo. Fra cotesti matematici è da annoverare principalmente Gastone Pardies, a cui par che accenni il Borelli là, dove esamina il modo come s'intendeva da'vari autori di confermare la verità dei teoremi dello stesso

Herigonio, e dello Stevino. Ciò vedremo particolarmente fra poco, osservando intanto che il Pardies, il De-la-Hire, l'Huyghens, il Wallis, e gli altri commemorati nel nostro discorso, preparavano e concorrevano all'opera del Varignon, i benefizi arrecati dalla quale alla Scienza si comprenderanno anche meglio, quando gli vedremo diffondersi nella nostra Italia, dove, per i falsi insegnamenti di Galileo, viziate le menti, erano più che altrove ritrose a riconoscere quella verità, della quale l'Accademico di Parigi proclamava al mondo la finale vittoria.

III.

Viziata nelle sue più profonde radici si può dire una cosa, quando nè la pronta, nè la facile correzione le giova, come si vede essere avvenuto alle menti dei discepoli di Galileo, in proposito delle dottrine intorno ai moti composti. Che pronte poi e facili fossero quelle correzioni agli errori, insegnati dal loro Maestro, si vede per l'esempio del Mersenno, il quale fu dei primi a praticarle in sè stesso, a quel tempo e con quella occasione, che gli aveva fatto riconoscere il medesimo error nel Cartesio.

Nella proposizione XXII della sua Meccanica dimostrava così il Mersenno che un moto semplice si può dir generato da due moti diversi: « Sit enim motus AB (fig. 358) simplex, quo globus vel aliud quodvis mobile feratur aequabili motu ab A ad B: certum est motum illum posse componi sive generari ex motu A in D, et ex motu A in C. Enim vero sint duo venti aequales, quorum unus ab A in C, alius ab A in D sufflet in mobile A, cuius partes omnes sunt aequaliter mobiles. Mobile non perveniet in C vel in D, sed in B: cumque pervenerit ad I, erit in medio sui motus.... Quamquam AB motus dici potest aequalis potentia duobus motibus AD, AC, ut est diameter duobus suis costis potentia aequalis » (Parisiis 1644, pag. 79-81).

Erano già stampati e approvati i fogli del volume, sopra i quali aveva inconsideratamente il Mersenno lasciate cader dalla penna queste parole, quando le censure dell'Hobbes al Cartesio lo fecero tutto insieme accorto della fallacia di Galileo, in scoprire anche meglio la quale si aiutava così col suo proprio discorso: Sottoponiamo in C un corpo alla percussion di un martello, che ora venga equabilmente mosso per la diagonale DC, ora per la GC uguale alla somma de' due lati AD, AC: com'è possibile che faccia nel percotere il medesimo effetto, con impeti tanto diversi, quanto la DC è diversa dalla GC? Non è egli manifesto che, concorrendo i due moti in A ad angolo retto, si elidono insieme, e che l'elisione è tanta, quant'è la differenza tra le due dette lunghezze lineari?

Figura 358.

Persuaso dunque il Mersenno, per queste evidentissime ragioni, della fal-

sità di ciò, che era trascorso a scrivere nel testo della sua Meccanica, che cioè i due moti per l'AD e per l'AC insieme equivalgono in potenza al moto unico per l'AB; pensò di premettere alquante pagine innumerate, e stampate dopo il volume, nelle quali, fra le altre correzioni e ritrattazioni, a chi fosse per leggere, scriveva anche questa: « Rursus quod pagina 81, linea 28, dicitur AB motum dici posse aequalem potentia duobus motibus AD et AC, est ex mente Galilaei, pag. 250 Dialogorum, quod tamen minime verum esse videtur. Sit enim aliquid in puncto C percutiendum, malleusque percussurus a puncto D ad C, per DC diametrum, ita moveatur, ut motus per DC componatur ex motu D in A, et D in B, seu A in C. Si duo illi motus DA, AC simul ita iungantur, ut malleus per lineam AC motus eodem tempore percurreret lineam AC duplam, hoc est lineam GC, quo prius percurrebat diametrum DC, certum est eo fortius a malleo per GC, quam a malleo per DC, motum percussum iri, tantoque fortius, quanto recta GC longior est recta DC, cum eo maior censeatur percussio, quo fit maiore velocitate, sitque eo maior velocitas quo malleus percussurus, et uniformiter motus, spatium maius, eodem vel aequali tempore, percurrerit. Hinc fit ut ex motibus per AD, AC, ex quibus AB motus componi supponitur, tantumdem perire videatur quanto AB brevius est AD bis sumpta, et omnes motus, qui a suis lineis rectis recedunt, semper aliquid amittent » (*Praefatio ad Mechan.* cit.).

Il fatto di queste perdite di forza, avvertito dal Mersenno, è tanto manifesto, da persuadersene facilmente qualunque ingegno volgare, e non privo effatto di senso comune. Imperocchè, supponiamo che A sia un sasso, e AD una fune soprammessa a un'altra fune, tirate ambedue da uomini ugualmente validi, o nella medesima direzione. Chi direbbe che seguitano con pari forza a tirare quel peso le due funi, anche quando, invece di star come dianzi soprammesse, si sian dilungate per un quadrante di cerchio, cosicchè uno degli uomini sia in D, e l'altro in C? Secondo il calcolo di Giovan Marco questo secondo sforzo è ridotto alla metà del primo, ma anche senza troppi calcoli insegna l'esperienza ai manuali di tirare, stando più uniti che sia possibile, perchè sanno che tanto è minore l'effetto delle funi, quanto maggiore è l'angolo del loro concorso. E il grande Galileo invece insegnava che due uomini, posti in B all'estremità della fune AB, hanno ugual potenza di tirare il masso A, che posti in D e in C all'estremità delle funi AD, AC. Questo pare incredibile in tant'uomo, ma è più incredibile che si lasciassero cader cecamente nel medesimo errore di lui altri uomini come il Torricelli, il Viviani e il Borelli, intorno a' quali ci duole di dover trattenerci a misurar quelle loro cadute, piuttosto che a contarne, come altre volte, i progressi.

Nello scolio alla proposizione XVIII del primo libro *De motu gravium* il Torricelli, quasi per digressione dal suo principale soggetto, metteva questo teorema: « *Si mobile aliquod A* (fig. 359) *ex angulo parallelogrammi alicuius, vel ex quolibet puncto diametri, feratur aequabiliter duplici simul latione, nempe progressiva secundum lineam AC, et laterali secun-*

dum AB, utcumque inclinatam, sitque proportio duarum velocitatum eadem ac proportio laterum AC ad AB homologe; dico mobile iturum esse secundum diametrum AD, hoc est per ipsam diametrum. »

« Si enim possibile est, feratur mobile extra diametrum per aliquod punctum E, ducatùrque EG parallela ad AB. Ergo quam proportionem habent spatia peracta a mobili, eam habebunt et impetus: nempe, ut spatium progressivum peractum AG, ad laterale peractum GE, ita impetus progressivus ad impetum lateralem, ideoque, ut AG ad GE, ita AC ad AB, ob suppositionem, sive AC ad CD, sive AG ad GI. Essent ergo aequales GE et EI, totum et pars. » (Op. geom., P. I cit., pag. 120).

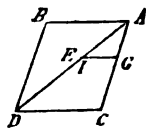



Figura 359.

Riconoscono bene i nostri Lettori esser questo del Torricelli quel medesimo teorema, posto dal Roberval per fondamento alle sue osservazioni *Sur la composition des mouvemens,* con la differenza che il Nostro tiene in dimostrar le vie oblique, piuttosto che le dirette, e sono altresì in ambedue gli Autori medesime l' intenzioni d' applicar cioè la detta proposizione meccanica al metodo di condur le tangenti alle curve.

Da un tale Scolio. col solo intermedio di un brevissimo lemma, si passa alla XIX proposizione torricelliana, nella quale si dimostra dall'Autore che gl' impeti, ne' varii punti della parabola, non son precisamente proporzionali alle loro proprie ordinate, ma sì ad altre ordinate più distanti dal vertice, quant' è la quarta parte del parametro della curva, e adduce per ragione di ciò che queste seconde ordinate son sempre l' ipotenuse di triangoli, che hanno per cateti le ordinate stesse de' punti respettivi, e l' ordinata del foco: d' onde, invocando il teorema galileiano, che cioè la somma de' momenti per i cateti equivale in potenza al momento per l' ipotenusa, ne conclude il suo intento. L' impeto insomma nel punto C (fig. 360), della parabola ACD, della quale F sia il foco, e FH la sua ordinata; dice il Torricelli esser proporzionale all' ordinata DE, presa BE uguale ad AF. « Impetus enim, qui simul sunt in C, sunt CB, HF. Ergo momentum impetus, ex ipsis compositum, debet esse potentia ipsis aequale, per 2^{am} Galilaei *De motu accelerato.* Sed et recta DE aequatur potentia ipsis CB, HF, per lemma praecedens, ergo momentum DE est momentum, sive impetus compositus ex duobus illis, qui sunt in puncto C » (ibid.).

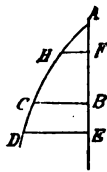



Figura 360.

Seguitando a svolgere il volume di queste Opere geometriche del Torricelli, ci abbattiamo a leggere, in sul terminar della scrittura distesa in italiano, e aggiunta al trattato *De motu proiectorum;* quelle belle considerazioni intorno al misurar quanto varino gl' impeti, fatti da una palla di cannone contro un piano resistente, secondo il variar degli angoli dell' incidenza: e supposto, per esempio, che sia AC, nella passata figura 358, una muraglia, e AB la direzione del tiro, « io noto, dice il Torricelli, che, rispetto alla parete AC, sono nella linea AB del proietto due moti insieme composti: uno cioè di avvicinamento perpendicolare alla parete, l' altro di

passaggio laterale, o parallelo alla stessa. Il perpendicolare ci viene e mostrato e misurato dalla linea BC, il parallelo dalla linea AC, poichè nel medesimo tempo vengono passati dalla palla ambedue gli spazi BC, AC » (ivi, pag. 240).

E perchè, soggiungiamo noi a questo discorso, essendo anche la BA passata nel medesimo tempo, l' impeto per essa è proporzionale allo spazio, ne consegue che questo stesso impeto sta alla somma degl' impeti per BC, AC come la linea AB sta alle due linee BC e AC, prese insieme. Ma i detti impeti sono in potenza uguali, secondo la dottrina di Galileo, fedelmente seguita dal Torricelli, dunque AB è uguale a BC con AC: l' ipotenusa cioè alla somma dei cateti, una linea retta alla spezzata.

Come un sì grande Matematico non si avvedesse di un tale assurdo, a cui precipitosamente menava il suo ragionamento, è cosa tanto da stupire, che ne invoglia di ricercar la causa di sì incredibile paralogismo: ricerca che si riduce a intendere come mai potesse il Torricelli conciliare insieme il teorema del Roberval, dimostrato nello Scolio alla proposizione XVIII, con quell' altro di Galileo citato nella proposizione seguente, senza considerar che, se l' uno era vero, l' altro necessariamente doveva esser falso. Nè, avendo esso Torricelli, nel discorso intorno alla Spirale archimedea, riconosciuto Galileo qual restauratore dei moti composti, e imitatine gli esempi; si potrebbe intendere quel che si diceva senza ammetter che la notizia del teorema roverballiano fosse pervenuta al Nostro di Francia, d' onde si verrebbe a decidere *a priori* a favore del Roberval la lite famosa intorno a chi di loro due fosse stato primo inventore del metodo delle tangenti. Imperocchè è manifesto che non poteva quel metodo essere spontaneamente sovvenuto nella mente di uno, che professava dottrine fatte apposta per contradirlo. Che se il Torricelli, senza pur contradirlo, lo accolse, e lo applicò a risolvere que'suoi vari problemi di *Meccanica nuova,* fu, con buona pace di sì grand' uomo, inconsideratezza, la quale si direbbe consigliata, per una parte, da quella cieca fede che aveva alle dottrine di Galileo, e per l' altra da uno sfrenato ardor di contendere e di non rimanere, o almeno di non apparire in nulla inferiore al suo rivale.

E così, come volle apparire, fu creduto il Torricelli dai discepoli e dagli amici, fra' quali perciò s' ingerì l' opinione ch' egli avesse introdotto nella Meccanica, e applicato alla Geometria il parallelogrammo per la composizione dei moti; e ch' egli avesse nel medesimo tempo, con la sua nuova autorità, confermate le dottrine insegnate da Galileo nel secondo teorema dei proietti. Nè dubitavano punto che l' una opinione repugnasse con l' altra, perchè, trattenendo la mente sulla proposizione XIX *De motu gravium,* non pensavano a quel che aveva dimostrato l'Autore poco prima, o a quel ch' egli aveva soggiunto di poi, tanto è vero che al Borelli, come i nostri Lettori già sanno, passò così inosservato quel che era stato scritto nell' appendice al libro torricelliano *De motu proiectorum,* ch' egli si compiaceva di essere stato il primo a dimostrar che, nelle direzioni oblique, gl' impeti delle percosse son pro-

porziali ai seni degli angoli delle incidenze. Il Ricci, a cui furono dall'amico e dal Maestro comunicati, insiem col metodo di condur le tangenti alla Cicloide, altri problemi di Meccanica nuova; fu della prima opinione, ma la seconda s' apprese così tenacemente nel Viviani e nel Borelli, che serbarono intorno a ciò pari fede agli oracoli dei loro due grandi maestri, benchè fossero in altre cose fieramente discordi.

Era da queste discordie sollecitato nel Viviani il proposito di servirsi della scienza anatomica del suo amico Stenone, per prevenir l'opera *De motu animalium,* che il Borelli allora faticosamente ammanniva. Ma lo Stenone, educato alla scuola dello Stevino, trovava comodo e ragionevole, in calcolar la potenza de' muscoli, rassomigliati a corde, che sostengono o che tirano pesi; far uso del triangolo o del parallelogrammo intero, costruito sulle direzioni delle leve, con tal regola, che, sospettata dal Viviani fallace, fu precipua causa del rimanersi que' suoi così ardenti propositi senza effetto. Una mattina, andato a far visita allo Stenone, lo trovò seduto nella sua solita stanza innanzi a un banco, sopra il quale era posato un volumone in foglio, legato in cartapecora, che tiratoselo con familiare libertà innanzi il sopravvenuto aprì, e nel frontespizio leggeva, o quasi si direbbe compitava, contornate da figure simboliche e da fregi, così fatte parole: *Scheepsbouw en Bestier, door Nicolaes Witsen, t'Amsterdam 1671.* — Oh questo, disse il Viviani, è per me un linguaggio molto simile a quello usato in Dante dalla voce chioccia di Pluto. — A cui sorridendo lo Stenone rispondeva: — Si potrebbe tradurre *De re navali veterum et hodierna commentarium Nicolai Witsen:* me l'hanno mandato, pochi giorni sono, i miei amici d'Olanda, ed è libro di una varietà di cose dilettevolissime, ora di pellegrina erudizione, ora di sottilissima scienza. Qui a facce 141 ho trovato sciolto un problema utilissimo ai naviganti, e ne fa il Witsen dipendere la soluzione da certi teoremi, ai quali so che voi non fareste buon viso, ma che io non posso non approvare e, almeno matematicamente, tenerli per veri. — E proseguiva così a esporli sommariamente, ma con tanto calore, che il Viviani disse gli avrebbe voluti volentieri esaminare con pace, se avesse avuto intelligenza della lingua, nella quale erano scritti. Allora lo Stonone si esibì di tradurglieli in lingua italiana, giacchè non eran più che cinque proposizioni, le prime delle quali assai brevi, e il Viviani, presa la penna in mano, scriveva a dettatura sopra certi fogli, che ci sono rimasti, e in fronte ai quali, tornato a casa, aggiungeva la nota, che ricopieremo qui fedelmente col resto, quasi esotica pianticella trasposta ora in mezzo alle nostre aiole:

« Da Niccolò Witsen, a faccie 141, stampato in.... traduzione dettatami dal signor Niccolò Stenone: *In qual modo più profittevole si voltino le vele ai venti.* »

« Per far questo facciasi che una linea retta, tirata dal di dietro della vela parallela allo strale del vento, sino all'opposta banda del vascello; sia lunga quanto una linea intercetta tra la vela e la prima linea: per esempio, nella figura 361, la linea CD sia lo strale del vento, BA la vela. Per fare

quel che si cerca, di presentare cioè nel miglior modo la vela al vento, dico che DL deve essere uguale alla HL, il che si dimostra per mezzo delle seguenti proposizioni, come si vedrà alla fine di esse. Come parimente con quello si dimostra in che modo si possa sapere, essendo cognita la forza del vento, lo strale e il corso del vascello, quanto meno tutti i venti laterali, secondo la loro natura, spingano meno il vascello, che se venissero a dar perpendicolarmente sopra la vela, supposto che il vento perpendicolare dia la massima velocità al vascello. »

« PROPOSIZIONE I. — *Se un corpo sopra un piano orizontale viene spinto da un altro piano perpendicolare ad esso orizonte, detto corpo dal piano impellente si allontanerà secondo la linea perpendicolare.* »

« Sia, nella medesima figura 361, il piano perpendicolare AB spinto secondo la linea CD, ed incontri in D il corpo E, e sia DF perpendicolare ad AB: dico che il corpo E scorrerà secondo la linea DF. Imperocchè la spinta del piano AB non può far forza sopra il corpo E per moverlo verso A o verso B, perchè, essendo egli egualmente piano per tutto, non vi è maggior ragione che deva il corpo moversi per altra via, che per quella che perpendicolarmente l'allontana dal corpo, che immediatamente lo tocca, benchè obliquamente venga mosso. »

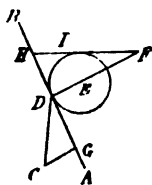



Figura 361.

« PROPOSIZIONE II. — *Se un piano sarà spinto da una linea obliqua, la forza spingente, alla resistenza del piano spinto, sta come la detta linea obliqua ad un' altra, tirata perpendicolarmente dall' estremità di detta obliqua.* »

« Sia il detto piano AB (fig. 362), la linea obliqua CD, secondo la quale venga spinta la AB. Sia DE perpendicolare ad AB: dico che la forza, con la quale il piano AB viene spinto per la linea DC, alla resistenza di detto piano, sta come CD a DE. »

« Per dimostrar questo, sia ABD una colonna; DB una leva obliqua, DC una leva diritta, e sia la forza traente per CF uguale alla forza spingente per CD: il piano BA averà la medesima resistenza alla forza traente, che alla spingente. Ora se il piano si tirerà per la linea EG talmente, che il piano AB da questa forza traente patisca lo stesso che dalla traente per CF, o dalla spingente per CD, cioè se la forza traente per EG fosse dell' istesso vigore con quella di CF; per la XIX proposizione della Statica di Stevino, la forza traente per CF, o spingente per CD, alla forza traente per EG, o alla resistenza del piano, starà come CD a DE. »

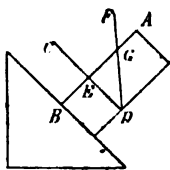



Figura 362.

« *Corollario.* — Di qui è che in un corpo, spinto come nella I proposizione, la linea CD alla CG starà come la forza, che si applica per la linea CD sopra il corpo E, al moto che riceve il medesimo corpo E. »

« PROPOSIZIONE III. — *Se un corpo E* (fig. 363) *sopra un piano orizontale si moverà verso un muro o qualche impedimento AB da un piano*

ad esso corpo perpendicolare, e secondo la linea DF perpendicolare al piano CD; la forza per DF, alla forza o resistenza del corpo E, starà come AB ad AD, quando ADF è perpendicolare a DB. »

« Imperocchè sia BD come un piano obliquo, secondo la passata proposizione, e sia EG parallela alla linea DF, ed EH parallela ad AB, ed LK perpendicolare ad AB. Sia EL una leva d'una forza traente in G, che tanto ritenga il corpo, quanto esso viene spintogli contro dal piano CDB, il che si può supporre, ed EM sia una leva d'una forza traente in H, che parimente ritenga il corpo E in equilibrio, con la forza spingente il medesimo corpo. »

Figura 363.

« Questo così supposto, di nuovo, secondo la proposizione XIX della Statica di Stevino, sarà EL ad EM come la forza in G o la spinta in FD alla forza in H, o alla spinta del corpo E secondo la linea HME. Ma per essere EM ed EL parallele alle AB ed AD, gli angoli I ed A sono uguali, siccome sono uguali EML, ADB per essere retti; e perciò li due triangoli EML, ADB sono simili. Onde ne segue che AB ad AD, come EL ad EM, cioè come la forza traente in G, o la spinta in FD, alla forza traente in H, ovvero alla forza, che spinge il corpo E. »

« Proposizione IV. — *Trovar la forza, con la quale un corpo cammina sopra un piano orizontale lungo un impedimento, quando sia mosso da un piano, che sia spinto obliquamente.* »

« Sia, come di sopra, il corpo E (fig. 364), l'impedimento AB, il piano spingente AC secondo la linea GH: si cerca la forza, con la quale il corpo E viene spinto lungo l'impedimento AB. Per esempio, se in GH fosse un peso di 10 libbre, essendo GC perpendicolare ad AC, e BDF perpendicolare alla medesima AC, e sia trovato che HG a GC stia come 5 a 4: sarà come 5 a 4 così 19 libbre ad 8, le quali in FD bisogneranno per spingere il corpo E con una forza uguale a 10 libbre per la linea GH, per la seconda dimostrata proposizione. Ora sia trovato AB a BD stare come 4 a 3: starà come 4 a 3, così 8 libbre in FD, a libbre 6, che è la forza cercata, cioè quella, con la quale il corpo E viene ad essere spinto da una spinta obliqua secondo GH di 10 libbre lungo l'impedimento AB, per la terza proposizione. »

Figura 364.

« Proposizione V. — *Data una linea, per la quale un piano debba essere spinto per far camminare un corpo lungo un dato impedimento, trovare lo stato, il sito o inclinazione del piano spingente, per far camminare il detto corpo con la massima forza possibile.* »

« *Primo caso.* — Sia il corpo A (nella figura 355 poco addietro rappresentata) l' impedimento BC, la linea, per la quale si fa la forza, EFG, posta perpendicolare all' impedimento CB. Volendo dare una tal situazione a CD, che faccia la maggior possibile forza contro il corpo A, si tiri la linea CFD in modo, che CG sia uguale a GF, e quella sarà la linea desiderata, secondo la quale si deve situare il piano, per spingere il corpo A con la maggiore forza possibile. »

« Imperocchè, essendo i due lati GC, GF uguali del triangolo CGF, e ciascuno mezzo retto, e similmente gli angoli DFE, DEF uguali fra loro nel triangolo EDF, siccome gli angoli FCB, FBC nel triangolo FBC, per essere questi tre triangoli simili fra loro; dico dunque che posta EF libbre 2, a ED 1, così libbre 10, che è la forza per EF, alle 5 libbre; questa sarà la forza spingente il piano. Inoltre, come BC 2 a BF 1, così libbre 10 spingenti il piano, a libbre 5, e questa sarà la forza, con la quale viene spinto il corpo A. »

« Ponghiamo adesso CG maggiore di GF nella proporzione, per esempio, di 4 a 3, ossia ponghiamo che il quadrato di CG stia al quadrato di GF come 16 a 9: essendo il triangolo CGF rettangolo in G, il quadrato di CF sarà 25, e CF 5, onde EF ad ED sarà come 5 a 4, per essere gli angoli GFC, DFE uguali, e gli angoli FGC, FDE retti, e però i triangoli simili. Parimente, avendo i triangoli FGC, BCF un angolo comune C, e ciascuno un retto FGC e BFC, saranno essi triangoli simili tra loro, onde BC a BF sta come 5 a 3. »

« Facciasi dunque come EF 5 a DE 4, così 10 libbre di forza ad 8 di resistenza del piano: inoltre si faccia come BC 5 a BF 3, così 8 libbre di resistenza a $4 + {}^{4}/_{5}$ di forza, con la quale il corpo A viene spinto, la quale è minore delle cinque libbre trovate nel primo supposto. Nel medesimo modo, se ponghiamo GC minore di GF, troveremo $4 + {}^{4}/_{5}$ per la forza premente il corpo A, posto cioè che GC a GF stia come 3 a 4, sicchè, quando GC e GF sono uguali, la spinta per EF sarà la più vantaggiosa. »

« *Secondo caso.* — Sia dato il corpo A, (fig. 365) la linea, per la quale si fa la forza, FDG, l' impedimento BC non perpendicolare ad FG: per trovare quel che si domanda facciasi GC uguale a GD, e giunta la linea CDE, questa sarà la desiderata situazione del piano. Imperocchè DF ad EF stia come 5 a 3, come è lecito di supporre secondo il caso di Stevino. Facciasi dunque come 5 a 3, così 10 libbre di forza in FD, a 6 libbre di resistenza del piano, e per essere GC, GD uguali saranno anco uguali gli angoli GDC, GCD. Ma GDC è anco uguale all' EDF, dunque EDF è uguale a GCD, ovvero BBD, e gli angoli BDG, DEF son retti, onde i triangoli BDC, FED sono simili: sicchè, come CB a BD, così DF ad FE, cioè come 5 a 3. Si faccia dunque come BC 5 a BD 3,

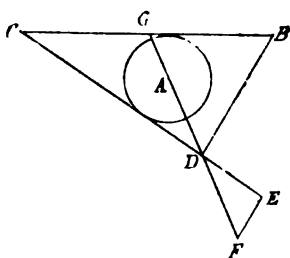



Figura 365.

così libbre sei di resistenza del piano, a libbre 3 $^3/_5$, che sarà la forza, con cui il corpo A viene spinto. Ma posto GC maggiore, ovvero minore di GD, il corpo A non verrà spinto con tanta forza, come si prova per il calcolo, e perciò questa è la situazione più vantaggiosa del piano DC. »

« *Corollario I.* — Per la quarta proposizione si è dimostrato il modo di trovare per mezzo del calcolo la forza, con la quale un vascello viene spinto, quando sia data la forza del vento contro la vela, e lo strale del vento, e la situazione della vela. Imperocchè sia AB (fig. 366) ùn vascello, che per mezzo del timone viene forzato a camminare lungo la linea AB, ovvero FG, lo strale del vento sia CD, la vela EF, e sia il vento di mille libbre di peso, ovvero sia la sua forza bastante a operare come se fosse di tanto peso, il qual vento per la linea CD, o altra parallela ad essa, urti nella vela, e sia dato che DC ad EC stia come 5 a 3. Facciasi come DC 5 ad EC 3, così libbre mille a seicento, che questa sarà la resistenza della vela. »

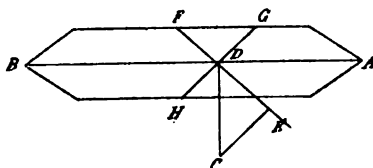



Figura 366.

« Di nuovo, sia per esempio che GF a GD stia come 5 a 4. Si faccia come 5 a 4, così seicento libbre a quattrocento ottanta, che questa sarà la forza spingente il vascello, il che chiaramente apparisce per la quarta proposizione. »

« *Corollario II.* — Dalla quinta proposizione si cava come la vela deve esser situata col maggiore avvantaggio, quando sia data la linea del vento. »

« Sia di nuovo, nella medesima figura, il vascello AB andante da B in A, sia FG l' impedimento, HG la linea del vento, FE la vela, la quale si deve situare in tal maniera, che FG sia uguale a GD, tirando la vela da F per D ad E, il qual tiramento, per la quinta proposizione, darà la maggior forza per far camminare il vascello, il che è quello, che io mi sono proposto di dimostrare. »

« E questo da tutti i marinari può essere praticato, misurando la lunghezza della banda dal luogo, dove vien segata dalla vela, sino al luogo, dove la linea del vento taglia l' istessa banda, facendo quella uguale con la linea tirata dal luogo della banda, che vien tagliata dalla linea del vento, sino al corpo della vela.

« Qui non paia strano che si misuri il vento a libbre, giacchè si può pesarlo, o almeno la di lui forza. Ma caso che la parola di peso vi dispiaccia, valetevi di quella de' gradi in suo luogo, e dite un vento di tanti gradi di forza o potenza. »

« Vero è bene che, a voler praticar ciò, non si troverebbe sempre che tutto a capello riuscisse con quella esattezza, che qui si è scritto, il che accaderebbe, perchè di rado la forza del vento è uniforme per lungo tempo, e i vascelli per alcune ragioni talvolta deviano dalla linea del loro cammino, e per l' incostanza degli impedimenti, e per non essere la situazione della

vela simile a quella delle tavole, fermandosi queste nella situazione che si dà loro, laddove le vele vengono stravolte da ogni minimo moto. » (MSS. Gal., T. CLXI, fol. 1-6).

Qual si fosse il giudizio riportato dal Viviani dopo la diligente lettura di questi teoremi del Witsen, e dopo le istanze fattegliene dallo Stenone, non si potrebbe dir con esattezza, ma noi crediamo che si rimanesse tuttavia fedele agl' insegnamenti di Galileo, sedotto, e confermatovi forse da quelle esperienze, che gli fecero eludere gli avvedimenti saggiamente suggeritigli da Michelangiolo Ricci, quando si trattava di risolvere, con miglior ragione di quella addotta nell' ultimo Dialogo dal Salviati, il problema della corda tesa. Da un tal fatto, che si narrò da noi nel capitolo I di questo Tomo, da pag. 60-67, apparisce che fu esso Ricci l' unico a que' tempi, nella scuola galileiana, che con libertà di giudizio intendesse la natura dei moti composti, e che ne sentisse la grandissima utilità delle applicazioni. Ricevuta, per mezzo del principe Leopoldo dei Medici, una di quelle scritture, nelle quali il Borelli dava saggio de' progressi che sarebbe presto per fare nella Scienza del moto, ringraziato esso Principe, che gli avesse fatte gustare così profonde e belle speculazioni, gli soggiungeva: « E saria forse bene che s' applicasse il signor Borelli a dare in luce un trattato della composizione dei moti, e dell' aumento e diminuzione loro, giacchè tant' oltre si è internato nella materia, perchè quivi pescano molti che oggidì vanno speculando per le cose geometriche, astronomiche e fisiche. Vostra Altezza si ricorderà quanto capitale ne faceva il Torricelli, e quanto se ne sia valso il Robervallio, ed altri matematici famosi, e Des-Cartes in filosofia, e Keplero nell' astronomia. Così verrebbe egli a farsi autore di tante verità, che s' inventeranno con l' aiuto di quelle dottrine dei moti, che sono innumerabili » (Fabbroni, *Lettere di uomini illustri,* T. II, Firenze 1765, pag. 127).

Le invenzioni con questi aiuti si fecero veramente e innumerevoli, come il Ricci divinava, ma da tutti altri autori da quello, in cui egli aveva riposte le sue speranze, il quale, riducendo con logica inesorabile, e più inconsiderata di quella de' suoi colleghi, il teorema galileiano alle sue ultime conseguenze, disse che i moti per i lati si possono ben comporre nel moto per la diagonale, quando si fanno i loro concorsi ad angolo retto, come nel quadrato o nel rettangolo, ma non già, quando concorrono secondo qualunque angolo, come nella losanga o nel parallelogrammo, non verificandosi in queste figure, come in quelle, la ragione addotta da Galileo dell'equivalere cioè la potenza della resultante alla somma delle due componenti. Nè lo disse il Borelli in privato discorso con gli amici, ma al pubblico in quel solenne anfiteatro della sua Scienza, che è l' Opera dei Moti animali.

Nella proposizione LXIX della Prima Parte, si voleva dimostrar dall'Autore: « Duae potentiae sustinentes, ad resistentiam, erunt ut longitudines funium obliquae, quae proportionales sint conterminalibus potentiis, ad earum sublimitates » (Romae 1680, pag. 131). Cioè: essendo le due potenze R, S (fig. 367), che per mezzo delle funi AC, BC sostengono il peso T, con

forze proporzionali ad AC, CM, se dai punti A, M si conducono sulla verticale FC, sicchè la raggiungano in D e in O le due perpendicolari AD, MO, chiama il Borelli le sezioni CD, CO le *sublimità,* alle quali dice essere le contermine potenze proporzionali, d' onde in ultimo conclude così il ragionamento: « Ergo duae potentiae R, S simul sumptae, ad resistentiam T, eamdem rationem habebunt quam duae AC, CM simul, ad duas DC, OC simul » (ibid., pag. 132).

A questo punto il Lettore, che non sa nulla ancora, crederebbe avesse voluto il Borelli trasformare così la sua proposizione per mostrar che la nuova regola da lui insegnata è quella medesima, a cui avrebbe direttamente condotto il parallelogrammo, costruito sui lati AC, CM. Tirata infatti dal punto A una parallela a CM, che incontri la verticale, e il punto F di tale incontro congiunto con M, è facile riconoscere, nella figura AM che ne resulta, la proprietà del parallelogrammo, essendo per le parallele AF, MC; AD, MO gli angoli opposti uguali. Uguali anche essendo DA a MO, e OC a FD, d' onde viene DC + OC = FC, che è la diagonale del detto parallelogrammo; la proporzionalità dunque ultimamente conclusa dal Borelli si riduce a R + S : T = AC + CM : FC, conforme a quel che avevano insegnato lo Stevino e l' Herigonio.

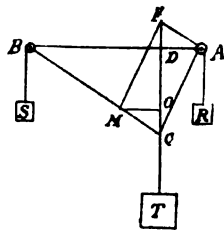



Figura 367.

Ma mentre aveva creduto il Lettore essere l' intenzion del Borelli quella di dimostrare una tale conformità, con sua gran maraviglia proseguendo s' incontra in una digressione così intitolata: « Quia Stevinus et Herigonius et alii viri doctissimi alia longe diversa via hanc eamdem propositionem se demonstrasse putant, cogor paucis innuere rationes, quibus methodum a Viris praeclaris servatam, non omnino tutam et legitimam censuerim » (ibid., pag. 133).

La maraviglia cresce tanto più, in quanto che il Borelli, per dimostrare che non era legittimo il metodo dello Stevino e dell' Herigonio, incomincia dal riferire i discorsi di quei Matematici, che ne avevano dovuta confermare la verità, riducendolo ai principii statici del piano inclinato e del vette. Il secondo di que' discorsi il Borelli l' attribuisce a un *insigne Geometra neoterico,* per il quale par che debba intendersi il Pardies, nella sua *Statique, ou Scienc des forces mouvantes,* libro stampato in Parigi nel 1673: ma il primo l' attribuisce espressamente all' Herigonio, e si può facilmente concedere al Borelli che sia in questa sua digressione il discorso *aliler et clarius ostensus,* perchè in esso Herigonio non apparisce di ciò nessuna esplicita dimostrazione. Si dubiterebbe anzi se l' Autor della detta digressione avesse veduto mai il libro oggetto alle sue contradizioni, il quale forse conosceva solamente per fama, e per le raccomandazioni, che ne faceva il Cavalieri a' suoi discepoli, come particolarmente al Rocca, con queste parole: « Di libri nuovi non ho nuova alcuna, ma non so se ella abbi visto il *Cursus ma-*

thematicus di Pietro Herigoni, matematico di Parigi, diviso in cinque tomi, stampato a Parigi, nel quale, con maniera molto breve, professa insegnare tutte le Matematiche, ed è degno di esser visto, ed opera nuova » (*Lettere d' uomini illustri a G. A. Rocca,* Modena 1785, pag. 153).

In qualunque modo, ecco quali erano, secondo il Borelli, i ragionamenti, che si facevano dai Matematici de' suoi tempi, per confermare, dai principii statici universalmente consentiti, la verità dell'uso di ricomporre nella diagonale del parallelogrammo i moti, che s' intendessero fatti per i due lati. Il globo T (fig. 368), sorretto per il centro C dalle potenze R, S, applicate alle funi AC, BC, starebbe egualmente in equilibrio sopra i due piani IH, IG, inclinati nelle direzioni delle tangenti VH, OG: e le relazioni tra il peso assoluto T, e il suo momento M^o T sul piano OG, son date, secondo le note leggi, da T : M^o T = IG : IP. Si disegni il parallelogrammo MN, e sul prolungamento di DM si abbassi dal centro C la perpendicolare CL: il triangolo DLC, che indi nasce, è simile al triangolo IPG, e perciò T : M^o T = DC : CL. Se ora si conduca da O perpendicolarmente la OQ sopra VC, i triangoli MLC, COQ danno, per la loro similitudine, LC : CM = QO : OC. E considerando essere OC la lunghezza del vette, che appoggiandosi col sostegno in O fa ruzzolare il globo sul piano; considerato inoltre che OQ è la distanza della direzione obliqua della potenza R da esso sostegno, per cui OC è la misura assoluta di R, e OQ è la misura di lei, che equilibra il momento di T sul declivio, tirando in direzione non parallela, ma convergente con esso declivio; avremo LC : CM = QO : OC = M^o . T : R. Ora, moltiplicata questa M^o . T : R = LC : CM per l'altra già trovata T : M^o. T = DC : CL, ne conseguirà T : R = DC : CM. Con simile ragionamento, soggiunge il Borelli, trovano pure questi Matematici T : S = DC : CN, e perciò R : S = CM : CN: e ancora, R + S : T = CM + CN : DC, d'onde intendono costoro di confermare la regola insegnata dallo Stevino e dall' Herigonio, per comporre in uno solo due moti, con qualunque angolo concorrenti.

Figura 368.

L' altra dimostrazione, attribuita a quell' insigne Geometra neoterico, è riferita dal Borelli stesso con tal discorso, che si può compendiare in questo modo: Le funi AC, BC (fig. 369) si riguardino come due vetti appuntati in C, e co' sostegni in A, B, cosicchè il peso T tiri in giù il vette AC, con momento, che starà al peso assoluto come la lunghezza AC dello strumento sta alla distanza AD della direzione obliqua dall' ipomoclio, mentre dall' altra parte è sostenuto esso vette, uguale in potenza ad S, con momento, che sta alla forza assoluta, la quale tenderebbe a far girare il peso T intorno al centro A; come la distanza AE sta al raggio AC, per cui si

Figura 369.

avranno le equazioni T : M°. S = CA : DA, M°. S : S = EA : CA : e, costruito il parallelogrammo MN, T : S = EA : DA = *sen* ACE : *sen* ACD = *sen* DNC : *sen* CDN = DC : CN. Il ragionamento, per dimostrare che T sta ad R, come DC a MC, è simile a questo, e perciò si giunge anche di qui a quel medesimo, che i Matematici detti di sopra avevano già concluso per altre vie.

Ora ognuno si aspetterebbe, dopo aver riferite così queste dimostrazioni, che il Borelli avesse da scoprirci dentro qualche fallacia. Ma, tutt' altrimenti da ciò, confessa che non è in esse nessuna fallace argomentazione, *nec quicquam assumptum est praeceptis mechanicis repugnans*. — Oh dunque, perchè non debbono valere que' discorsi a confermar la verità della regola herigoniana? — E risponde il Borelli che così è per due ragioni: la prima delle quali è l' esperienza, invocata da me, egli dice, a confermare quel che altrove ho dimostrato, « quod duae potentiae R et S (fig. 370), oblique sustinendo pondus T, cum eodem aequilibrari possunt, licet R ad S habeat quamcumque proportionem, ac proinde maiorem aut minorem ea, quam CM habet ad CN, et licet duae potentiae R et S simul sumptae, ad pondus T, habeant quamcumque diversam proportionem ab ea, quam CM et CN simul sumptae habent ad DC » (Loco cit., pag. 138).

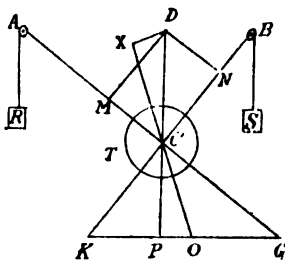



Figura 370.

Aggiungasi, prosegue a dire lo stesso Borelli, che, fatte le medesime ipotesi di quei Matematici, si giunge, ragionando dai loro medesimi principii, a concludere che il peso assoluto T sta alle due potenze R, S insieme, come CO ad OP, ossia come CD a DX. « Hoc autem nedum est evidenter falsum, sed etiam contra eosdem praeclaros auctores, qui censent pondus T, ad duas potentias R et S, esse ut DC ad MC, et CN simul sumptas, quae multo maiores sunt, quam DX, ut facile ostendi potest » (ibid., pag. 141). Di qui si passa immediatamente a concludere che, se fossero legittimi i progressi di quegli stessi preclarissimi Autori, si dovrebbe, fra le due potenze e il peso che sostengono, sempre avere la medesima proporzione, e non differente. Che se ciò non avviene, non può, dice, attribuirsi ad altro, che all' essere quelle fatte supposizioni nè possibili nè vere, « quod nimirum duo termini funium A et B, sigillatim vel coniunctim, ut centra fixa vectium usurpari possint, et quod sola potentia R, vel sola potentia S, aequari possit momento totius resistentiae T » (ibid., pag. 142).

Verrebbe di qui facile sulla bocca di ognuno la risposta che quei Matematici non trattavano di una uguaglianza, ma di una certa proporzionalità, che passa tra ciascuna parzial potenza, e la resistenza totale. In qualunque modo però s' avvedono i Lettori che debbono essere le esperienze del Borelli fallacie, e paralogismi i suoi ragionamenti. Non mancarono Matematici, anche tra noi, i quali ebbero questi avvedimenti, ma il più libero, e il più eloquente in denunziarli, fu il Varignon, il quale scrisse, e aggiunse in fine

alla sua *Nouvelle mecanique,* un opuscolo critico, diviso in due capitoli, e intitolato: *Examen de l'opinion de M. Borelli sur les proprietez des poids suspendus par des cordez.* Quanto all'esperienza, osserva saviamente il Varignon, che, in fatto d'esattezza e di precisione, « ne prouve rien, sur tout ici, ou la resistance, qui vient du frottement des poulies avec leurs pivons etc., rend ces sortes d'experiences possibles en tant de manieres differentes, qu'il n'y a presque point de sentiment, pour ou contre le quel on n'en puisse faire à son gré » (A Paris, T. II, 1725, pag. 454).

Quanto poi al ragionamento, in cui pretende il Borelli di dimostrare che il peso assoluto sta alle due potenze che lo sostengono, come CO ad OP, nella medesima figura 370, soggiunge lo stesso Varignon ch'egli è condotto da varie supposizioni o principii, tutti manifestamente falsi. Il Critico francese però non entrò addentro a ricercar la radice di queste fallacie, che perciò non si crederebbero in un ingegno, come è quello dell'Autore dei Moti animali, ma che, piuttosto ch'esser proprie di lui solo, appartennero a tutta intera quella Scuola dominatrice, nella quale si teneva con fermissima fede non aver Galileo insegnato mai nulla, che non fosse vero e perfetto. Di qui è che o non si curavano, o si disprezzavano gl'insegnamenti di quell'altra Scuola, più umile e più dispersa, istituita dallo Stevino, negli insegnamenti del quale si sarebbe dovuto piuttosto, principalmente per ciò che concerne i moti composti, cercar quella verità e quella perfezione, che non si trovava affatto nella Scienza meccanica di Galileo.

L'applicazione del parallelogrammo delle forze alla teoria del piano inclinato non era da lamentar negletta, come sembra facesse il Lagrange, perchè avrebbe dato a Galileo maggior facilità di dimostrare, ma perchè glie ne sarebbe derivata perfezione di scienza, in distinguere le varietà, e in misurar le grandezze dei momenti, con cui il grave preme il piano, e lunghesso discende: e ciò non solamente nel caso, che sia sostenuto da potenza con direzion parallela, ma comunque convergente con la linea del declivio. Nello Stevino basta tornare in dietro sulla figura 353, per vedervi distinti que' due momenti e le loro proporzioni, rispetto al peso assoluto della colonna, il qual peso essendo rappresentato dalla diagonale DL, vengono dai lati QD, DI a rappresentarsi i respettivi momenti, con cui la colonna stessa preme, o striscerebbe giù lungo il piano. Che se la direzione della potenza non è, come DF, parallela, ma, come DB, convergente con la linea AB del declivio, la diagonale DL e il lato DO, nel parallelogrammo RO nuovamente costruito, daranno la proporzione tra il peso assoluto del grave, e la forza bastante a trattenerlo in quel sito: proporzione che, ridotta in forma trigonometrica, è tale: $LD : DO = sen\,LOD : sen\,DLO$. E perchè LOD, ossia IQD, è uguale a $90^{\circ} - IDO$, e $DLO = BAC$; dunque $LD : DO = cos\,IDO : sen\,BAC$, secondo che il Dechales, infino dal 1673, annunziava nella prima edizione del suo *Mundus mathematicus* agli studiosi della Statica steviniana: « *Pondus, in plano inclinato consistens, se habet ad pondus aequalis momenti, trahens linea plano non parallela, ut sinus complementi anguli tractionis,*

ad sinum anguli inclinationis plani » (T. II, editio altera, Lùgduni 1690, pag. 204).

« Et de mesme seroit, per citar le parole proprie dello Stevino, si BN estoit de l'altre coste de la perpendicolaire BC, assavoir entre AB, BC, et sembleblament DO entre DL et DI » (Ouvr. cit., pag. 449), ossia, se la fune DB, invece di convergere con B, converge con A dalla parte opposta, come nell'esempio esibitoci dalla 354ª figura, dove, essendo LOD = 180° — DOF = 180° — (90° — ODF) = 90° — ODF, s'ha DL : LO = *sen* LOD : *sen* DLO = *cos* ODF : *sen* BAC, ossia, come dianzi, il peso sta alla potenza che lo sostiene come il coseno dell'angolo della trazione sta al seno dell'angolo dell'inclinazion del piano sull'orizonte.

Galileo invece insegnava che il peso sta alla potenza come il seno totale, ossia il raggio, sta al seno dell'angolo dell'inclinazione, con teorema, che rimanendosi nello stato, in cui la Scienza lo aveva avuto già dal Tartaglia, così assolutamente pronunziato è, a confronto di quello dello Stevino, da dire addirittura falso, non verificandosi che nel caso dell'angolo della trazione uguale a zero, perchè allora il coseno di zero torna veramente alla lunghezza del raggio.

Dall'avere il Maestro, dietro un esempio particolare, formulato un teorema generalissimo, s'ingerì ne' Discepoli l'opinione che si mantenesse sempre uguale la forza applicata a una fune secondo qualunque direzione, e il Viviani, come vedemmo (pag. 67, 68 di questo Tomo) istituiva per confermarla esperienze, e il Borelli se ne serviva come principio, da concluderne tra la potenza e il peso una proporzione, diversa da quella che passa tra i lati e la diagonale del parallelogrammo. E dal non aver saputo Galileo decomporre il peso assoluto del grave sopra il piano ne' suoi momenti parziali, derivò nel Borelli, benchè fosse per le medesime vie oblique giunto a dimostrare i teoremi del Viviani (vedi il nostro Tomo IV, pag. 244, 45), quella confusione d'idee, che trasparisce dal suo ragionamento. Fra gli altri principii quivi assunti è notabile quello, che suppone la resultante divider nel mezzo l'angolo del concorso, anco quando i moti componenti non sono uguali: supposizione affatto gratuita, ma che è in conseguenza delle dottrine professate dall'Autore, nello scolio alla proposizione LXIX di questa prima parte *De motu animalium:* « Manifeste colligitur, ex dictis propositionibus, quod duae quaelibet potentiae, sive aequales sive inaequales inter se fuerint, possunt aequilibrari alicui resistentiae, trahendo funes obliquos, efficientes cum directione resistentiae angulos acutos, sive aequales, sive inaequales inter se » (pag. 132). Ma tutte queste fallacie dipendevano dalla massima e principale, introdotta da Galileo in questa Scienza dei moti composti, che cioè, dovendo le parti essere in ogni modo uguali al tutto, le potenze sostenitrici debbono, senz'alcuna diminuzione, equivalere al tutto.

Il Varignon dunque, senza curarsi, come si diceva, di cercar d'onde avessero avuto origine, notava nel *Remarque,* in fine al capitolo I del citato *Examen* queste fallacie, incominciando da ciò che il Borelli soggiunge, dopo

aver detto che, riguardandosi la corda AC (fig. 371) come una verga rigida, girevole intorno al punto fisso A, e all'estremità C della quale sia attaccato il peso T; questo peso è da essa verga sostenuto come se riposasse sul piano CI perpendicolare ad AC, e con l'elevazione IL: *patet quod pondus T, ad vim qua idem T innitur, et comprimit planum IC, est ut IC ad CL* (pag. 139). « Cela seroit vrai, osserva qui il Varignon, si BC etoit parallele a CI perpendiculaire à AC, mais non pas, lorsqu'elle lui est oblique, comme ici, ou le poids S aide au poids T a charger le plan CI, qui ne le seroit qui par ce poids T, si BC lui étoit parallele » (*Nouvelle mechan.*, T. I cit., pag. 461).

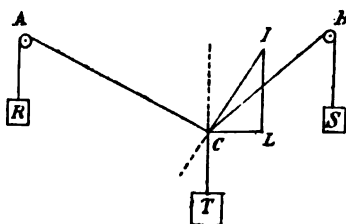



Figura 371.

È chiaro infatti che la corda AC equilibra il momento gravitativo sul piano, ma il discensivo viene equilibrato dall'altra corda BC: e se quello è secondo il Borelli proporzionale a LC, questo deve necessariamente esser proporzionale a LI. Cosicchè egli viene a dire che T sta ad S come il raggio CI sta al seno LI dell'inclinazione, ciò che non è assolutamente vero, come si credeva dai discepoli di Galileo sull'autorità del Maestro, ma nel solo caso particolare che CB sia parallela a CI: cosa che non si verifica in questo esempio, in cui la proporzione tra T ed S è quella del coseno dell'angolo della trazione ICB, e non del raggio, al seno dell'angolo dell'inclinazione del piano, secondo il teorema generalissimo e verissimo dimostrato dallo Stevino.

In un'altra fallacia, simile a questa, notava il Varignon essere incorso il Borelli, quando, dop'avere abbassata nella figura 370 la CP perpendicolare sopra la KG, soggiungeva: *Idem pondus absolutum T, ad vim qua comprimit planum CO, eamdem rationem habebit quam CO ad OP* (pag. 141). « Cela seroit vrai, si ce poids T étoit retenu sur CO par une puissance d'une direction parallele à CO » (ivi, pag. 462). Ritornando infatti sopra la fig. 353, ritratta dalla Statica dello Stevino, si vede che il momento gravitativo della colonna sul piano è proporzionale a LI, coseno dell'angolo dell'inclinazione, nel solo caso contemplato da Galileo e dal Borelli, e da loro supposto generalissimo, che la fune DF tiri con direzione parallela al declivio. Ma se tira con altra direzione, o sotto o sopra a quella, come DB, DV, il detto momento gravitativo o cresce come LO, o scema come LS, seni dell'angolo fatto dalla trazione con la linea verticale.

« Dans la critique, prosegue il Varignon, qu'il (M. Borelli) fait ensuite du raisonnement d'Hérigone, de Stevin, etc., après avoir regardé le poids T (nella figura 370) soûtenu par les cordes AC et BC, comme s'il l'étoit sur les plans CK perpendiculaire à AC, et CG perpendiculaire à CB, inegalement inclinez, il dit, pag. 141. *Tunc pondus T, dum moveri niteretur per duas rectas inclinatas CK et CG, cogeretur moveri, aut nisum exercere per diagonalem CO, secantem angulum GCK bifariam.* Pour cela il fau-

droit que ces deux plans CK, CG fussent également inclinez, et conseguentement aussi les directions AC, BC, qu'on leur suppose perpendiculaires » (ivi, pag. 461, 62).

L' ultima osservazione si fa dal Critico francese alle parole del Nostro: *Vis, quam patitur planum CO* (nella medesima figura 370) *a compressione ponderis T, aequalis est viribus ambarum potentiarum R et S, quae sustinendo idem pondus in tali situ plani CO inclinati vicem supplent.* « Cela est faux. La force resultante du concours des deux autres (ripete il Varignon al Borelli quel che tanto tempo prima avevano detto l' Hobbes al Cartesio, e il Mersenno a Galileo) est toujours moindre que leur somme, tant que leurs directions font quelque angle entr'elles. Outre que cette force resultante le long du plan CO, étant ainsi parallele a ce plan, ne seroit pas celle de sa compression, qui résulteroit du concours de cette force parallele, et de la pesanteur du poids soûttenu par elle sur ce plan » (ivi, pag. 462).

Supponiamo ora che il Borelli fosse sopravvissuto a questo esame, che del suo ragionamento faceva così l' Accademico parigino. Si crederebb' egli forse che avesse riconosciuto e confessato il suo errore? Noi per verità mettiamo la cosa in dubbio, ripensando a quei così tenaci pregiudizi della sua Scuola, che tuttavia durano dopo due secoli e mezzo. Dall' altra parte l' osservazione da noi fatta di sopra, che cioè il metodo, con cui egli si studiò di dimostrar le potenze proporzionali alle sublimità, conduceva alla medesima regola del parallelogrammo, non sarebbe dovuta bastar per sè sola a persuaderlo? E quell' altra sua opinione del non si poter comporre i moti per i lati in quello per la diagonale, altro che nel caso dei concorsi ortogonali, non gli si sarebbe potuta dissipar dalla mente come nebbia al chiaro sole di un così fatto ragionamento? Concorrano secondo qualunque angolo GCH (fig. 372) le due potenze R, S a sostenere il peso T. Costruito, secondo qualunque proporzione, un parallelogrammo, come per esempio GH, lo Stevino e l' Herigonio dicevano che le due potenze rappresentate da GC, CH equivalgono insieme alla potenza unica rappresentata dalla diagonale CD, e il Borelli ostinatamente ciò negava, perchè GCH non è, come prescrivevasi da Galileo, un angolo retto. Or bene: si abbassino dai punti G, H, perpendicolari sull' orizontale MN, le GM, HN, e le due forze GC, CH equivarranno, secondo il precetto galileiano, alle quattro GM, HN; MC, CN. E perchè queste è facile veder che sono uguali e contrarie, rimangono attive quelle sole, ossia le loro uguali QC, PC, ossia l' intera DC, diagonale del parallelogrammo, che dunque equivale in potenza alle potenze dei lati. Notabile è poi che il Borelli non s' avvede come nel metodo, ch' egli dice suo proprio, e che consiste nel pigliar le linee delle potenze proporzionali alle sublimità, si fa sempre la riduzione, dalle forze concorrenti con qualunque angolo, alle forze ortogonali, e che da questa riduzione, la quale senza volerlo, anzi reluttante lo conduce alla regola del parallelogrammo, dipende la verità di quasi tutte le sue pro-

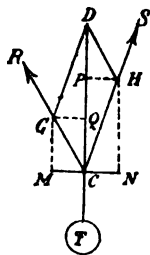



Figura 372.

posizioni, e l'aver principalmente risoluto, al modo del Simpson, il problema della corda tesa, che dette al Viviani, come si narrò, tanto travaglio.

E qui cade opportuno riferire le belle osservazioni, fatte dal Varignon in questo proposito, del decomporre ciascuna delle forze concorrenti in altre due ortogonali, come nell'esempio illustrato dall'ultima figura: « Si M. Borelli, egli dice, eût fait reflexion que les puissances R et S n'agissent pas seulement contre le poids T, mais aussi l'une contre l'autre, et que de même qu'elles concourent ensemble pour empêcher que ce poids n'attire a lui le noeud C, de même aussi chacune d'elles concourt avec lui pour empêcher que l'autre ne l'emporte; si dis-je il avoit fait cette reflexion, il avroit vû sans doute que chacune de ces puissances fait impression sur ce noeud, non seulement suivant la direction du poids qu'elles soutiennent pour le tenir toûjours a même hauteur, mais aussi suivant l'horisontale MCN, pour empêcher qu'aucune d'elles ne l'attire ni à droit ni à gauche. D'ou il avroit infailliblement conclu que ces impressions horisontales étant diametralement opposées doivent toûjours etre egales. De-là voyant qu'elles augmentent ou diminuent necessairement à mesure que les angles, que font les cordes de ces puissances avec la ligne de direction du poids qu'elles soutiennent, s'approchent ou s'eloignent de l'angle droit; il avroit enfin apperçù l'impossibilité de faire, si non aucun, du moins un tel changement a leurs directions, sans en rompre l'equilibre » (ivi, pag. 477).

Avrebbe anche di più conosciuto il Borelli, soggiungiamo noi, che male s'applicava da Galileo l'aforismo che dice dover le parti essere uguali al tutto, e ch'è un tale aforismo solamente vero, quando le parti stesse si prendono tutte, e non diminuite come qui, con diminuzione misurata dalla linea MC, o dalla CN sua eguale e contraria, la quale evidentemente riesce maggiore o minore, secondo che maggiore o minore è l'angolo del concorso. Questa osservazione, che sarebbe stata della maggiore importanza, perchè insomma tutte le fallacie in questo argomento derivavano dalla massima delle fallacie, contenutasi nel secondo Teorema galileiano, e intorno a che si passò il Varignon assai leggermente; questa osservazione, voleva dirsi, era stata fatta assai tempo prima, che il Critico francese pubblicasse il suo opuscolo sul Borelli, dal nostro piacentino Paolo Casati, il quale, a proposito del peso sostenuto da due funi, pronunziava, in mezzo ai comuni errori, la salutare sentenza, *re autem ipsa quod ex iis componitur momentum, non ex ipsorum momentorum additione conflatur, sed ex ipsis temperatur.* (*Mechanic. libri*, Lugduni 1684, pag. 103). Sia A (fig. 373) il detto peso, e AB, AC le due funi, che lo sostengono, e che supporremo essere di lunghezze uguali. Abbassate da B, C, sulla orizontale DE le BD, CE perpendicolari, osserva il Casati che, recisa la fune AC, il pendolo AB scenderebbe con momento proporzionale ad AD, e similmente, con momento proporzionale ad AE scenderebbe il pendolo AC, venendogli a mancare la fune AB, che lo tien sollevato. Si conducano le tangenti AR, AG, uguali alle DA, AE, immaginando quelle sottoposte dall'una e dall'altra parte al globo, quasi piani inclinati

alle sue libere scese: « ex quo fit corpus A, suspensum hac ratione, momenta descendendi habere in diversas partes abeuntia AR, AG. Perfecto igitur parallelogrammo ARNG, ex duobus illis momentis temperatur momentum AN » (ibid., pag. 104).

Ora essendo DA, AE i seni degli angoli delle inclinazioni DBA, ACE delle funi, i quali si suppongono noti, s'ha dalle Tavole trigonometriche AE, ossia AG, 81496, e DA, ossia AR, 37784; dai quali numeri essendo rappresentati i momenti parziali, verrà perciò la loro somma rappresentata da 119280. Ma il triangolo ANG, in cui son noti i lati AG, GN, e noto è altresì l'angolo G da essi compreso, perchè conoscesi l'angolo RAG, e il suo opposto N, che resultano ambedue dalla somma de' complementi degli angoli delle inclinazioni delle funi; può risolversi rispetto al lato AN, diagonale del parallelogrammo, la quale trovasi 81613. « Ex quibus apparet (ne conclude il Casati da questo suo calcolo, che pare istituito apposta per dimostrar quanto fosse falso il teorema di Galileo, e falsi i corollari che ne traeva il Borelli) descendendi momentum, quod componitur ex momentis in planis inctinatis, non esse 119280 ex eorum summa, sed ita temperari, ut longe minus sit, videlicet solum 81613 » (ibid., pag. 105).

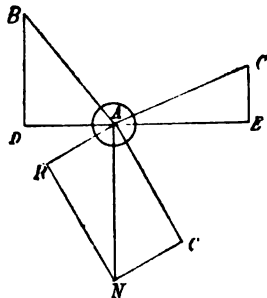



Figura 373.

Ma il Casati che, come gesuita, non apparteneva a nessuna nazione, e che, come peripatetico, era inviso alla nuova Scuola, non ebbe co' suoi insegnamenti nessuna efficacia in ridurre gli erranti sulla retta via; tanto è vero che, quando il Vanni avventò contro Galileo quel suo *Specimen* famoso, i Galieiani si trovarono impacciati nelle difese, le quali avrebbero potuto trovar paratissime nel primo degli otto libri Meccanici dell'Autor piacentino. Anzi noi preghiamo i nostri Lettori a voler tornare indietro sul capitolo IV del nostro Tomo di storia, che precede a questo, dove là troveranno, in proposito del rispondere al Vanni, descritto lo stato, in cui si trovava la Scienza dei moti composti appresso i principali Matematici dell'Europa, sul finir del secolo XVII. E ripensando alle cose lette, e a quelle che poi leggeranno nella Storia dell'Idraulica intorno ai trascorsi del Michelini, del Guglielmini e del Grandi, in materie gravissime; comprenderanno quanto benefica riuscisse l'opera del Varignon, a cui veramente vi deve l'aver, per la sua più manchevole parte, rinnovellata la Meccanica di Galileo.

La Scienza, nella quale era stato per due secoli assoluto principe quell'Uomo, rimaneva per lui in difetto anche da due altre parti, quali erano l'analisi algebrica, e la dottrina dell'infinito, da quella aborrendo, perchè recideva i nervi dell'eloquenza, e da questa, a quel che ci ha rivelato la storia, per non aver l'animo e la mente disposti a penetrare addentro alle profonde speculazioni del Cavalieri. N'ebbero di que' difetti a risentirsi naturalmente i Discepoli, e specialmente del primo, che si trovaron costretti a

dover confessare, e a riconoscere che di gran lunga rimanevan per quel motivo superati dai loro emuli d'oltremonte. Il Cavalieri, avuta dal Rocca la soluzione algebrica di un problema, gli rispondeva: « Mi sentii un prurito di applicarmi per vedere se geometricamente si poteva sciogliere tal problema, e mi ci applicai tanto più, che io le confesso ingenuamente che le operazioni algebraiche non le ho troppo alle mani, non vi avendo fatto molto studio » (*Lettere a C. A. Rocca* cit., pag. 188). E Michelangiolo Ricci si raccomandava al Marchetti, per l'onore della Scienza italiana, che sopprimesse o ritirasse la stampa di que' suoi sciagurati *Problemata Sex*, « perchè vi è molto che dire, e non vorrei che i Virtuosi oltramontani, dei quali assaissimi hanno emulazione grande con gl'Italiani, com'ella sa, pigliassero motivo di biasimare, sì perchè nelle cose di V. S. ritroveranno che riprendere, sì ancora in vedere che ella ne faccia tanto conto, con aver messo alle stampe quelle soluzioni di problemi, i quali sono veramente difficili, ma essi, che possiedono l'Algebra, in un giorno e francamente gli risolverebbero, e però meno gli stimano..... Frascati, 4 giugno 1675. » (Nelli *Saggio di storia letter.*, Lucca 1749, pag. 32).

La mirabile facilità del metodo degli indivisibili, applicato a risolvere problemi nuovi di Geometria, da tutti reputati difficilissimi, aveva nel Torricelli e nel Nardi fatte chiudere le orecchie a quelle arguzie eloquenti, con le quali pretendeva Galileo di dimostrare che il metodo cavalierano conduceva all'assurdo di ragguagliare una circonferenza, grande quanto l'orbe magno, a un semplice punto. Ma si trovarono que' due Autori, e tutti gli altri che ne avevano seguiti gli esempi, chiusa la via di progredire piu oltre, non avendo saputo nemmen essi trattare le questioni geometriche con quell'analisi algebrica, senza la quale il metodo stesso non pigliava l'agilità necessaria a sublimarsi, e a spaziare per le regioni dell'infinito.

È un fatto che Galileo, a cui pur tanto deve la Scienza del moto, le aveva anche insieme recisi così i germi, da non poter aprirsi in rami novelli, costringendola a rimanersi perpetuamente nella statura di quell'arboscello, ch'egli aveva educato ne' Dialoghi delle due nuove Scienze. O fosse presunzione di voler col suo prescrivere i limiti all'ingegno umano, o persuasione del non v'essere altri mezzi, da quelli in fuori da sè usati in far progredire la Meccanica; questa ebbe a rinnovellarsi, oltre a ciò che concerne i moti composti, per altre due parti, per l'uso cioè dell'analisi algebrica e della infinitesimale. E come fu quel primo rinnovellamento fatto dal Varignon, questi altri due pure furono opera di Matematici stranieri, i quali perciò tolsero, sul finir del secolo XVII, il principato di questa Scienza all'Italia. Così vien tolto anche insieme di mano a noi l'argomento di questa Storia, alla quale non rimane oramai che di gettare uno sguardo sopra quella superba mole, a cui i Nostri abbiam veduto come ponessero i fondamenti, e per cui raccolsero la maggiore, e più eletta parte dei materiali.

CAPITOLO X.

Dei progressi fatti dalla Meccanica nuova

SOMMARIO

I Dei *Principii matematici di Filosofia naturale* del Newton. — II. Della *Foronomia* dell'Hermann. — III. Del parallelogrammo delle forze, e del Calcolo infinitesimale nella Meccanica nuova. — IV. Della Meccanica analitica dell'Euler, del D'Alembert e del Lagrange. — V. Brevi parole di conclusione.

I.

Come, quando è nato un animale o una pianta, non si pensa più all'uovo o al seme, ma tutta la nostra ammirazione è rivolta all'apparizione di quella nuova gioventù di vita, che si manifesta nella varietà dei moti, e nella sagacia degl'istinti, o nella lussuria dei rami e nella ubertà dei fiori e de' frutti; così, tra lo scader del secolo XVII e il cominciar del seguente, l'ammirazione dei Matematici si rivolse tutta alla Meccanica nuova, non semplicemente rinnovellata per quella agilità, che le aveva il Varignon infuso nelle vecchie membra, ma per nuovi organi aggiunti, quasi ali sul dorso a chi fin allora era andato col solo passo dei piedi. La palingenesi maravigliosa apparve nei *Principii matematici di Filosofia naturale* del Newton, intorno ai quali però il tempo e l'intento nostro non ci permetton di fare che una brevissima storia.

È noto che se ne fecero in Londra, vivente l'Autore, tre edizioni: nel 1686, nel 1713 e nel 1725 sempre con nuove aggiunte e con nuove correzioni, infin tanto che l'Opera non si rimase distinta in quei tre Tomi, i quali sono oggidì per le mani degli studiosi. E perchè nel secondo Tomo si tratta delle resistenze opposte al moto dai mezzi fluidi, e delle proprietà statiche e dinamiche di essi fluidi, e nel terzo si mostra come si applichino particolarmente al circolar dei corpi celesti i teoremi di Meccanica astratta esposti nel

Tomo primo; al solo esame di questo dunque si limita il soggetto del nostro discorso.

Il trattato è diviso in XIV sezioni, nelle quali tutto è nuovo. La Meccanica antica sta compendiata in poche pagine a parte: e perchè non contien per l'Autore se non che principii comunemente ricevuti dai Matematici, e confermati dalle esperienze; ei la raccoglie sotto il titolo di *Assiomi*, ossia *Leggi del moto*. La prima legge è quella che, dopo il Keplero, si chiamò *d' inerzia*, e dalla quale dipende la seconda, che dice come le mutazioni son proporzionali alle forze motrici impresse, e dirette per la linea, lungo la quale fu fatta l' impressione. Ma la terza legge, che cioè, all' azione, sempre uguale e contraria è la reazione, è avuta dal Newton per cosa di maggiore importanza, e nello Scolio scritto dopo i corollari si trattiene a far vedere come abbia quella terza legge, non solamente l' applicazione alla teoria degli urti e delle riflessioni, ma come altresì si riducano a lei le condizioni generali dell' equilibro tra la potenza e la resistenza in tutte le Macchine, l' efficacia delle quali, egli dice, non consiste in altro, che in aumentar la forza col diminuire la velocità. « Unde solvitur, in omni aptorum instrumentorum genere, problema: *Datum pondus data vi movendi, aliamve datam resistentiam vi data superandi.* Nam si Machinae ita formentur, ut velocitates agentis et resistentis sint reciproce ut vires, agens resistentiam sustinebit, et maiori cum velocitatum disparitate eamdem vincit » (Genevae 1739, pag. 59).

Questo non era altro però che il principio antico professato da Galileo, e che il Newton faceva derivar da un assioma troppo volgare, e non bene confacentesi con la Scienza nuova, all' altezza e alla dignità della quale fu il primo che pensasse di ridurvelo Giovanni Bernoulli. Questi inviava, sottoscritta nel dì 26 Gennaio 1717, una lettera al Varignon, nella quale incomincia dal proporgli un nuovo modo per misurar l' energia, valendosi di quelle, ch' egli incominciò allora a chiamare *velocità virtuali*. Sia P (fig. 374) un punto qualunque, in un sistema di forze in equilibrio, ed F una di queste forze, che spinga innanzi o ritiri in dietro, nella direzione FP, il detto punto. Sopravvenendo un piccolissimo moto, la FP sarà trasportata in fp, mantenendosi questa sempre parallela a quella, se il sistema tutto insieme si muove parallelamente a una linea data: o, prolungate le due direzioni, concorreranno con un angolo infinitamente piccolo, se il moto del detto sistema si facesse intorno ad un centro fisso. « Tirez donc (così propriamente scriveva il Bernoulli al Varignon) PC perpendiculaire sur fp, et vous avrez Cp pour la *vitesse virtuelle* de la force F, en sorte que $F \cdot Cp$ fait ce quoi j'appelle *energie.* » Osservate, soggiunge qui lo stesso Bernoulli, che la Cp può essere o *positiva* o *negativa* rispetto alle altre forze: Venendo il punto P spinto innanzi è positiva, se l' angolo FPp è ottuso, ed è negativa, se acuto. Ma quando il punto fosse invece tirato indietro, Cp è negativa, se l' angolo è ottuso, ed è positiva se acuto: ciò che facilmente si comprende dal pensar che, con quelle contrarietà di segni, si vogliono dal Bernoulli distinguere i moti, che al punto C tendono, da quelli che ne rifuggono.

« Tout cela etant bien entendu, je forme, dit M. Bernoulli, cette proposition generale: *En tout equilibre de forces quelconque, en quelque maniere qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou mediatement, ou immediatement; la somme des energies affirmatives sera egale à la somme des energies negatives prises affirmativement* » (*Nouvelle Mecan.*, T. cit., pag. 176). Questa proposizione mi parve, dice il Varignon, così semplice e così bella, che, vedendo com'ella si poteva benissimo derivare dalla teoria dei moti composti, pensai d'introdurla nella mia Meccanica nuova, dimostrandola co' miei proprii principii applicati a ritrovar le condizioni dell'equilibrio nelle varie Macchine. E così veramente egli fece nella Sezione IX, soggiunta all'opera, come generale corollario delle teorie precedenti, ed ebbe così la notizia del Teorema bernulliano la diffusion più desiderata, e la verità di lui la più solenne conferma.

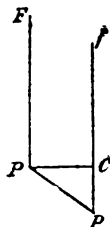



Figura 374.

Ma di quella terza Legge del moto, per tornare al Newton, si fa dall'Autore apparir l'importanza, che si diceva, in que' sei corollari comprendenti in sè tutte le leggi scoperte dalla Meccanica antica, inclusavi la stessa riforma varignoniana. Nel primo corollario infatti si propone la Regola del parallelogrammo delle forze, e nel secondo, dop' aver applicata quella regola a dimostrar le condizioni dell'equilibrio nella Libbra, nel Vette, nell'Asse, e nel Cuneo e nella Vite; ne conclude così, in poche parole, il fatto di quella *Nouvelle mecanique,* allora solamente proposta dall'Accademico di Parigi: « Usus igitur Corollarii huius latissime patet, et late patendo veritatem eius evincit, cum pendeat ex iam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode domonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum quae, ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tensis et ponderibus, directe vel oblique ascendentibus, caeterisque potentiis mechanicis componi solent, ut et vires tendinum ad animalium ossa movenda » (pag. 30).

Il terzo corollario, applicabile agli urti e alle riflessioni de' corpi duri, col ridurre in una le leggi dimostrate dal Borelli; poteva anche tacersi, senza grave scapito della Scienza, dopo i teoremi del Wallis. Ma il corollario IV che segue apparve a tutti i Matematici nuovo, e anche i censori stessi lo trovarono elegantissimo. È dall'Autore così proposto: « Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis, et propterea corporum omnium in se mutuo agentium, exclusis actionibus et impedimentis externis, commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum » (p. 36).

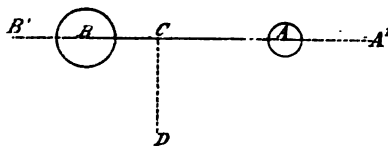



Figura 375.

Ciò che si può spiegare così in poche parole: Sia C (fig. 375) il centro di gravità dei corpi A, B: sostenuto il sistema in C, starà in quiete: abbandonato a sè stesso, cadrà lungo la linea CD verticale. E ciò sarà vero, an-

che quando i detti corpi si attraggano o si respingano a vicenda con eguale quantità di moto, ossia in modo che i prodotti delle velocità per le masse, di qua e di là, tornino uguali. Se infatti AA' × A = BB' × B, è facile vedere che il centro C della gravità non si muta. Lo stesso dicasi, nel caso che i corpi sian tre o più, componendo i loro centri di gravità nei soliti modi.

Abbiamo accennato che questo Corollario del Newton ebbe censori, fra quali s' indovina facilmente dover essere Giovanni Bernoulli, che, pur non mancando di riverenza verso il grande Matematico inglese, non poteva patire che egli, e forse peggio i suoi, volessero tirare a sè tutto il merito de' progressi, che veniva facendo la nuova Filosofia matematica. Il Bernoulli dunque sentì che il Corollario neutoniano non si dimostrava dal suo Autore secondo quella generalità, con la quale era stato proposto. E infatti non sembra avesse il Newton in mente, quando lo formulò, che di farne l' applicazione alla proposizione LXV, e alle altre simili, delle quali intendeva poi valersi nel Tomo terzo, per illustrare la teoria delle perturbazioni dei corpi celesti. I Matematici invece si credettero a prima vista di avere avuto un Teorema dinamico generale, e il Bernoulli ne scoprì sagacemente l' inganno, facendo osservare che *etsi hoc Theorema, elegantissimum quidem, in generali sensu sit propositum, demonstratio tamen Newtoni minime est generalis.* E ciò perchè, prosegue a dire, in quel suo lungo discorso non si contempla altro caso che quello, in cui i corpi concorrano a due a due, o due o più insieme combinati con un terzo, ma non si mette mai in considerazione il caso, che tre o più corpi si sospingano a vicenda in varie direzioni, tutti a una volta, e nel medesimo istante, *cuius casus neglectio, relinquit sane demonstrationem Newtoni longe imperfectissimam, quae vix periculum praestat eius quod promittitur in propositione generali.* Per supplire al qual difetto, soggiunge, è da tenere altra via, la quale è quella che mi ha menato a formulare e a dimostrar questo, che è veramente generale Teorema, da sostituirsi all' altro annunziato dal Newton in quel suo Corollario quarto: *Si dati corporis ABC* (fig. 376) *centrum gravitatis Q sollicitatur a pluribus potentiis, seu viribus motricibus, quarum directiones et quantitates designentur per rectas datas OD, OE, OF, OG etc, sitque punctum P centrum commune gravitatis punctorum D, E, F, G, instar ponderum aequalium consideratorum; dico rectam OP fore directionem, secundum quam movebitur centrum gravitatis O corporis ABC, et quidem motu sibi semper parallelo, sive accedendo versus P, sive ab eodem recedendo, prout vires motrices sunt vel trahentes vel pellentes* (Op. omnia, T. cit., pag. 341).

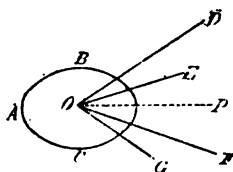



Figura 376.

Il Leibniz poi aveva reso anche più perfetto il bellissimo Teorema, soggiungendo che la resultante del moto, non solamente è diretta lungo la OP, ma è altresì misurata dalla OP stessa, presa molteplice secondo il numero

de' punti gravi, de' quali P sia, com' è detto, nel centro. Dette esso Leibniz, in una epistola al Wallis, l'annunzio della invenzione, senza però dimostrarla, ma non indugiarono molto gli studiosi ad aver la desiderata dimostrazione dall'Hermann, il quale anzi promosse la cosa tant' oltre, da riuscire a trovar la ragione ultima dell' uguagliarsi insieme i momenti nella Libbra archimedea: nè vogliam qùi tacerne ai nostri Lettori il modo, riferendosi strettamente alla storia del Corollario neutoniano, da cui insomma ebbero queste alte speculazioni il principio.

Esposto in brevi, ma chiarissime parole, e in pochi segni il Teorema del Leibniz, si propone l'Hermann a risolvere un tal problema: *Invenire mediam directionem solicitationum quarumvis AG, BG, CG, DG* (fig. 377) *quibus puncta A, B, C, D lineae rectae inflexilis AD urgentur* (Foronomia cit., pag. 18), e la pratica, della quale passa poi a dimostrar la ragione e la verità, è così comandata. Prendete fuori della verga rigida un centro qualunque O, da cui irraggino, passando per A, B, C, D... altrettante linee prefinite, ne' punti omonomi F, dalle respettive linee GF, condotte, dalle estremità G delle potenze, parallele alla direzione AD della verga. Fate gl'intervali OA', OB', OC', OD'... uguali ad AF, BF, CF, DF, e, de' punti A', B', C', D'... essendo baricentro E', per questo punto e per O fate passare una linea, che prolungata attraversi in E la verga stessa, d' onde la prolungherete ancora, in fin tanto che non vada EM lunga quanto OE', presa molteplice secondo il numero de' punti A', B', C', D'... All' ultimo, condotta la ML parallela ad AD, e presa di tal lunghezza tanto che valga quanto tutte insieme le FG, congiungete i punti L, E, e avrete nella LE, non solamente la direzione, ma anche la misura della resultante unica delle varie potenze applicate a sollecitare il sistema, di cui dunque E sarà il centro, intorno al quale o si moverà o permarrà in equilibrio.

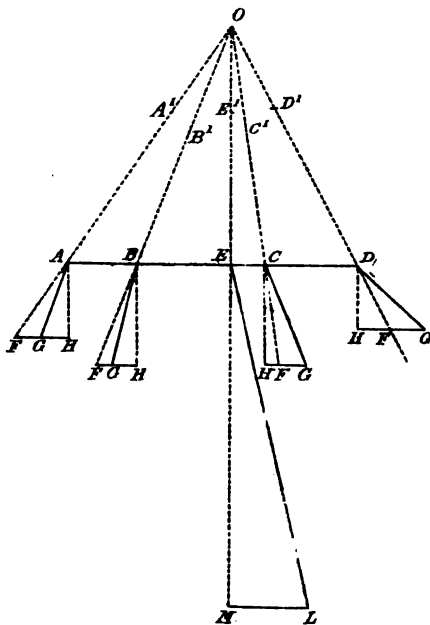



Figura 377.

Rispetto a questo centro dell'equilibrio avverte l'Herman una certa proprietà, per farne nel corollario secondo un' applicazione importante, ed è che, abbassate dai punti A, B, C, D... le AH, BH, CH. DH... perpendicolari sui prolungamenti delle FG, i rettangoli fatti da queste perpendicolari, e dalle respettive distanze dal centro E da una parte, sommati insieme, sono uguali

alla somma dei rettangoli, che in modo simile si facesser dall' altra: cioè AH . AE + BH . BE = DH . DE + CH . CE.

L' applicazione importante che si diceva è al vette sollecitato dalle potenze oblique AG, BG; DG, CG (fig. 378), intorno al centro E dell' equilibrio, da cui conducendosi sui prolungamenti delle linee rappresentanti esse potenze le perpendicolari EP, EQ; ES, ER, i triangoli simili, che per questa costruzione vengono a disegnarsi, danno i rettangoli AH . AE, BH . BE, DH . DE, CH . CE rispettivamente uguali ai rettangoli AG . EP, BG . EQ, DG . ES, CG . ER. Ma AG . EP + BG . EQ è, per le cose dimostrate, uguale a DG . ES + CG . ER; dunque AH . AE + BH . BE = DH . DE + CH . CE, ossia, per le condizioni dell' equilibrio, la somma dei momenti, che sollecitano il vette da una parte, deve essere uguale alla somma dei momenti, che lo sollecitano dall' altra. E ciò concluso, soggiunge l' Herman questo che, per la storia del quarto Corollario del Newton, è notabilissimo Scolio: « Casus Corollarii huius secundi obtinet non solum tunc cum linea AD est recta, cui potentiae obliquae AG, BG... applicantur, sed etiam in casu, quo ipsa linea applicatas potentias habens est curva, immo etiam in rotis aliisque eiusmodi organis. Uno verbo *si circa aliquod punctum potentiae aut solicitationes quaecumque in aequilibrio sunt; momenta potentiarum, quae agunt in unam partem, aequalia sunt momentis potentiarum, quae agunt in partem oppositam,* atque sic inopinato incidimus in demonstrationem directam et immediatam principii Archimedei de aequalitate momentorum, in casu aequilibrii potentiarum inter se commissarum, quod varii varie demonstrare conati sunt » (Foron. cit., pag. 21).

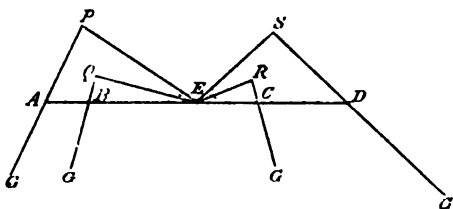



Figura 378.

Al quarto Corollario che l' Herman, il Leibniz e il Bernoulli promossero così com' abbiamo veduto, ne fa seguitare il Newton altri due d' assai minore importanza, dopo i quali riassume il suo discorso in uno Scolio, e che comincia: « Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta et experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas et corollaria duo prima Galileus invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, et motum proiectorum fieri in parabola » (pag. 45, 46), che sono gli argomenti trattati nel terzo e nel quarto Dialogo delle due nuove Scienze, ritirati qui a piè della nuova Filosofia matematica, quasi soggetta valle disegnata nel quadro, perchè possa l' occhio misurare la superba altura del monte. E perchè non si può aver la misura giusta del fastigio, senza ricercarne il principio e la radice, premettiamo queste considerazioni.

Due massimi problemi, su quella via per la quale s' erano messi i suoi nuovi studi, ebbe a trovare il Newton irresoluti: il primo de' quali era perchè i pianeti circondassero il Sole, e i satelliti Giove, in orbite ellittiche, e

il secondo, in cui si domandava quale curvità di linea descriverebbe un proietto, che a movere dalla superficie andasse finalmente a quetar nel centro della Terra.

Benchè commenti indegni della Scienza gli dovessero sembrar le ragioni del Keplero, e le opinioni del Boulliaud e del Borelli cose molto somiglianti ai romanzi, nonostante il Newton non aveva ancora trovato nulla di meglio, per risolvere il primo dei detti problemi, quando gli si rivelò, dalle speculazioni del Wren, dell' Hook e dell' Halley intorno alle forze centrali, che il Sole attrae i pianeti e Giove i satelliti con forze, che diminuiscono, non col crescere delle semplici distanze, ma de' quadrati delle distanze dal centro dell' attrazione. Allora, come emendò, e trovò che tornava bene il calcolo della velocità, con cui sarebbe caduta sulla Terra la Luna; così pensò che, del non aver saputo gli Astronomi suoi precursori render la ragione geometrica dell' eccentricità delle orbite, fosse stata potissima causa l' ignorar la vera legge del variar le forze centripete, rispetto al variare delle distanze. Ond' è che, mettendosi a cercare in qual curva si volgerebbe un proietto, il quale fosse continuamente ritirato verso un punto, con forze reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze; trovò con ineffabile compiacenza che quella curva era un' ellisse, in un foco della quale risedesse il centro dell' attrazione. Contrariamente, dato che un corpo vada in giro per un' ellisse, attratto continuamente a uno de' fochi; trovò che le forze centripete erano reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Intorno al secondo problema sopra notato i Matematici, a' tempi del Newton, erano molto discordi. Galileo, prima di aver veduto lo *Specchio ustorio* del Cavalieri, credè verosimile che un grave cadente dall' alto di una torre, menata in giro dalla vertigine della Terra, giungerebbe al centro di lei per una mezza circonferenza. Poi non dubitò di asserire che, almeno per qualche tratto, quel moto composto del retto accelerato e del circolare equabile si farebbe per una parabola, ma il Fermat pretese di dimostrare che, non potendo esser parabolica una linea, la quale ritorna all' asse, da cui si era partita; era invece una spirale, non difforme da quella di Archimede. Il Borelli, nella proposizione LVII *De vi percussionis,* sentenziò che tutte e tre queste opinioni erano false. Falsa quella prima di Galileo, perchè le scese starebbero come i seni versi delle metà degli archi passati, e perciò in proporzione assai minore di quella dei quadrati dei tempi: falsa anche la seconda dello stesso Galileo, e incompetente nella questione, non potendo evidentemente esser parabolica una curva, che ritorna in sè stessa. Ma falsa concludeva all' ultimo essere anche l' opinione del Fermat, il quale, egli dice, s' ingannò a credere che, col medesimo impeto trasversale, il mobile in tempi uguali percorra spazi sottendenti al centro angoli uguali. Or perchè è un fatto che quegli crescono successivamente, secondo che diminuiscono via via le distanze da esso centro, *constat curvam lineam non esse regularem.* (Bononiae 1667, pag. 109).

Il Newton sentì che il Borelli da una parte aveva ragione, stando egli

nell' ipotesi comune della gravità, che sollecita il mobile con impulso uniforme, ma sentì dall' altra che non si decideva nulla in proposito, non essendo verosimile che il cadente venga attratto, come supponevasi da Galileo, dal Fermat e dallo stèsso Borelli, sempre con la medesima forza, a qualunque distanza dal centro. E perchè non aveva forse pensato ancora ad assegnar la legge naturale di quelle forze, per sciogliere direttamente il problema; si limitò a darne una soluzione indiretta: *Gyretur corpus in spirali secante radios omnes in angulo dato: requiritur lex vis centripetae tendentis ad centrum spiralis* (pag. 136), e il frutto della ricerca fu che le forze centripete debbono esser reciprocamente proporzionali ai cubi delle distanze.

Poi la detta lègge naturale la desunse immaginando un grave, che giri in orbite circolari o ellittiche, ora più lontane, ora più vicine al centro, da cui venga attratto, e trovò che la legge dell' attrazione in questo caso era quella diretta delle distanze. Conseguiva di qui che, trasformandosi l' ellisse in parabola, coll' andare il centro infinitamente distante dal vertice della nuova sezione; le forze centripete, che tutte hanno verso l' infinito la medesima proporzione, divengono uniformi, e così la presente questione ricade in quella particolare di Galileo intorno ai proietti. « Si ellipsis, centro in infinitum abeunte, vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola, et vis, ad centrum infinite distans iam tendens, evadet aequabilis. Hoc est theorema Galilei » (pag. 149). Dunque, nell' ipotesi della gravità uniforme, la pietra che cade dall' alta torre viene attratta a un punto, che è a una distanza infinita, e che perciò non può essere il centro della Terra: ond' è chiaro che la detta pietra descriverà una parabola, non per un tratto solo, come pensò Galileo, ma per tutto il suo viaggio, che dovrebbe proseguire in infinito.

Traspariva da queste speculazioni che, nella Dinamica galileiana, si contemplava il solo caso particolare, in cui i corpi son continuamente sollecitati da impulsi di gravità sempre uguali, e sentì perciò il Newton che la Scienza, com' ei l' aveva trovata, era tuttavia ne' suoi principii, e che rimaneva a promoverla in assai più vasto e più nobile campo, dimostrando le leggi universalissime de' moti, nel caso che gl' impulsi gravitativi, ossia le forze centripete, variassero ora secondo le semplici distanze, ora secondo i quadrati delle distanze, ora secondo qualsiasi proporzione. Ecco l' indole della nuova Dinamica neutoniana, della quale tutte le cose scoperte, e tutti i teoremi dimostrati dai Matematici, che avevano preceduto l'Autore infino a Galileo e all' Huyghens; non sarebbero stati più che semplici corollari: ecco il compasso da misurar giusta l' estensione e la sublimità, a cui giunse la Scienza del moto nei *Principii matematici di Filosofia naturale.*

Se l' uno di que' due massimi problemi, da' quali si diceva aver avuto questa nuova Filosofia gli inizii, dette occasione al Newton di ritrovar le leggi delle forze centripete, nel corpo che gira in una spirale, in un' ellisse, in una parabola, d' onde si veniva a definir la linea descritta dal cadente, che non arrestasse il moto sulla superficie terrestre; l' altro dei detti problemi porgeva allo stesso Autore un argomento d' assai maggiore importanza,

qual' è il trattato del moto dei corpi nelle sezioni coniche eccentriche. E fu appunto per questa importanza che v' intrattenne intorno il Newton più diffusamente il discorso, com' egli stesso dice, ripensando a quel sesto corollario della proposizione IV, in cui era stato concluso che, essendo i tempi periodici nelle ellissi proporzionali ai cubi dei grandi assi, le forze centripete son reciprocamente proporzionali ai quadrati dei raggi vettori: « Casus corollarii sexti obtinet in corporibus coelestibus, ut seorsum collegerunt etiam nostrates Wrennus, Hockius et Hallaeus, et propterea quae spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi fusius in sequentibus exponere » (pag. 103): che è l' argomento sopra accennato, e che si svolge ne' teoremi della terza sezione.

Piglia dunque motivo questo argomento dalle tre celebri leggi del Keplero, astraendo dalle particolari osservazioni dei corpi celesti, e considerando il moto di un semplice punto fisico o materiale, continuamente sollecitato da forze centripete, che diminuiscono d' intensità col crescere dei quadrati delle distanze. Alla nuova Dinamica razionale preluceva nei fatti naturali osservati la notizia certa delle conclusioni, ma rimaneva al Newton a ritrovarne i principii. E perchè in que' fatti era una intima dipendenza di ragioni fra i tempi periodici, e le linee delle orbite, e le forze attrattive, cosicchè l' una poteva indifferentemente prendersi per principio, da cui conseguissero le altre; pose esso Newton per fondamento al suo trattato l' osservazione fatta dal Keplero intorno ai pianeti, che cioè le aree son proporzionali ai tempi, riducendola a dimostrarsi matematicamente in quel teorema, che è il primo e principale della Sezione seconda, e da cui si svolgono tutte le altre proposizioni relative alle forze centripete, che sollecitano i corpi, mentre girano intorno ai centri di una spirale, e delle varie sezioni di un cono.

La Sezione terza, come si disse, è propriamente quella, in cui si tratta astrattamente del moto di qualùnque corpo, supposto ch' egli pesi verso un dato punto, come i pianeti verso il Sole, e i satelliti verso Giove: e dop' aver dimostrate le proporzioni di quel peso, nel moversi ora in una, ora in un' altra delle sezioni coniche eccentriche, passa a propor la soluzione di questo massimo problema: « Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens » (pag. 170).

Esca il corpo P (fig. 379) con la velocità data, secondo la tangente PR, e subito sia costretto dalla forza centripeta, diretta verso il punto S, a descrivere la curva PQ, che per le cose dimostrate appartien senza dubbio a una sezione conica, avente in S uno de' fochi, e della quale si vuol determinare la specie. Facciasi RPH complementare dell' angolo RPS a due angoli retti: sopra un punto della PH si dovrà trovare l' altro foco della sezione, che supponesi essere H. Congiunti S e H, e dal vertice S del triangolo che indi nasce condotta la SK, perpendicolare sul lato opposto PH, e chiamato L il lato retto, ossia il parametro della curva, a qualunque sezion del cono ella

appartenga; riesce il Newton, calcolando, all' equazione L (SP + PH) = PH (2 SP + 2 KP), d' onde L : 2 SP + 2 KP = PH : SP + PH. Ora può darsi il caso che il corpo esca con tal impeto tangenziale da far sì che L, ossia il parametro, manchi, uguagli o superi il doppio della somma SP + KP, nel qual caso anche PH mancherà, uguaglierà o supererà SP + PH: cioè la linea SP sarà o positiva o nulla o negativa, e secondo che questo o quello o quell' altro caso avviene, la sezione conica dell' orbita sarà o un' ellisse o una parabola o una iperbola. « Si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam 2 SP + 2 KP, iacebit PH ad eamdem partem tangentis PR cum linea PS, ideoque figura erit ellipsis, et, ex datis umbilicis S, H et axe principali SP + PH, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas, ut latus rectum L aequale fuerit 2 SP + 2 KP, longitudo PH infinita erit, et propterea figura erit parabola, axem habens GH parallelum lineae PK, et inde dabitur. Quod si corpus maiori adhuc cum

Figura 379.

velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, ideoque, tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola, axem habens principalem aequalem differentiae linearum SP et PH, et inde dabitur » (pag. 172, 73).

Applicato questo Teorema alla Meccanica celeste, non solamente confermava la ragion geometrica della orbite ellittiche, in cui si rivolgono i satelliti e i pianeti, ma rivelava inoltre il mistero di altri corpi celesti, come delle Comete, le quali, avendo ricevuto il primo impulso tangenziale più forte dei satelliti detti e de' pianeti, descriverebbero parabole: ed, essendo quell' impulso anche più forte, iperbole; cosicchè vedute una volta in cielo non apparirebbero mai più ad occhio mortale.

La sublimità del pensiero destò in tutti la maraviglia, ed in alcuni pochi uno spirito d' emulazione, da cui furono stimolati a dire che non aveva il Newton dimostrato bene come il corpo, uscito con quell' impeto tangenziale, e con quella legge d' attrazione al centro, non potesse moversi in altra curva diversa da una sezione del cono. Fu perciò che Giov. Bernoulli e il Leibniz e il Varignon vollero tentare il problema inverso, ricercando cioè in qual curva s' avvierebbe un proietto, con un dato impulso tangenziale, e attratto a un centro fisso in reciproca ragione dei quadrati delle distanze. L' Euler si maravigliò di queste censure, quasi non resultasse ad evidenza, da quella XVII proposizion neutoniana, nessun altra curva, da una sezione conica in fuori, poter sodisfare al quesito, e si compiaceva di aver nel primo tomo della sua *Mechanica analitice exposita* data della cosa tal risoluzione, « qua Newtoni assertio extra dubium ponitur » (Petropoli 1746, pag. 271). Ma era quella risoluzione stata data alquanto prima dall' Herman, il quale, proponendosi *invenire canonem generalem determinandae gravitatis va-*

riabilis seu leges solicitationum centralium pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum (Foron. cit., pag. 74); osserva poi in uno Scolio che, se la legge delle dette sollecitazioni è la reciproca dei quadrati delle distanze, l' equazion generale della curva algebrica è propriamente quella, che si riferisce alle Sezioni del cono, concludendo così il suo discorso « Ergo in hac hypothesi centrum virium, seu solicitationum gravitatis, sunt umbilici Sectionum conicarum, quod iam omnibus constat egregie conspirare cum iis, quae demonstrata sunt ab illustr. Newtono, Leibnitio, Varignonio ed aliis, circa vires, quas vocant centripetas, in Sectionibus conicis methodis directis » (ibid., pag. 79).

Tre sono le ipotesi in tal proposito, alle quali rispondono i fatti che si osservano, o che si sperimentano nella Natura: quella delle sollecitazioni della gravità sempre uguali ne' cadenti sulla superficie terrestre, e quella delle sollecitazioni della gravità, che variano in ragion diretta delle semplici distanze, e in reciproca de' quadrati delle distanze, come s' argomenta de' corpi tendenti al centro della Terra, sotto la sua superficie, e si osserva de' Pianeti attratti al centro del Sole. S' arresta forse qui ne' primi termini la progressione, e ne' primi gradi è rotta la foga dell' ascesa: o ripensando alla instancabile operosità, e alla onnipotenza della somma Virtù creativa, si crederebbe piuttosto che fosse il Sole anch' egli un pianeta, attratto a un centro da forze decrescenti via via coll' aumentar de' cubi delle distanze, e che questo centro, a cui move il Sole, tenda a moversi anch' egli alla sua volta a un altro centro più lontano, che con tanto più debole forza l' attragga, quanto secondo i quadrato quadrati n' è cresciuta la lontananza? Chi potrebbe impor limite a questo ingradarsi sempre più in alto gli ordinamenti del Cosmo, innanzi alla pensata immensità del quale sentendosi rintuzzare il filosofico orgoglio dell' uomo, par che volesse prepotentemente reagire nel Newton, quando si propose l' invenzion dell' orbite, nelle quali si rivolgerebbero i corpi sollecitati da forze centripete, secondo qualunque ragione operanti. « Posita cuiuscumque generis vi centripeta, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum traiectoriae, in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in traiectoriis inventis » (pag. 318). Così era risalito il Newton, con l' ala del suo proprio ingegno, a descriver le vie, che percorrerebbero nello spazio immenso gl' incogniti mondi, usciti dalla mano del Creatore con qualunque forza gli fosse piaciuto di sollevare, nel gettarli, il suo braccio; mentre Galileo erasi rimasto nel suo quarto Dialogo a insegnare ai militari il modo di dirigere i tiri delle bombarde, per distrugger queste povere nostre figuline!

A pari sublime altezza promoveva il Newton la scienza del terzo dialogo galileiano, dalle pallottole di argilla cadenti dalla cima del campanile di Pisa sollevando il pensiero al cader della Luna sopra la Terra, della Terra sopra il Sole, del Sole sopra il suo centro: e finalmente, lasciate libere le ali all' ardito volo, misurare i gradi della velocità, con cui, da qualunque legge di gravità sollecitati cadrebbero i rilucenti globi dal firmamento. « Po-

sita cuiuscumque generis vi centripeta, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel discendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet, et e contra » (pag. 305).

Dai due Dialoghi di Galileo sopra commemorati la Dinamica, poco dopo la metà del secolo XVII, non avrebbe forse sperato di avanzarsi tant'oltre, quanto fece per opera dell'Huyghens nell' *Orologio oscillatorio.* Si rimaneva però quivi l'Autore tuttavia a considerare i gravi sulla superficie terrestre, come sollecitati continuamente dagl'impulsi della gravità naturale, che si supponevano, ma che di fatto non potevano essere uniformi. La Cicloide poi, ch'era la curva, sopra le proprietà meccaniche della quale, nuovamente scoperte e dimostrate, si volevano costruire i nuovi Orologi; appariva, a considerarla bene, come un'opera dell'arte piuttosto che della Natura, la quale non porge mai alla ruota genitrice una via piana, ma incurvata nell'arco di qualche circolo massimo della Terra. I teoremi ugeniani non uscivan dunque fuori di que' limiti, dentro i quali Archimede aveva circoscritta la Scienza, e il Newton, per volerla promovere alle sue generalità anche da questa parte, ricercò la Cicloide naturale, e in lei quelle leggi de' pendoli, delle qnali le scoperte dall' Huyghens non potevano essere che un caso particolare.

Sia C (fig. 380) il centro, e CB l'intervallo, con cui è descritto l'arco ABL del cerchio massimo di un globo, sulla convessità, e sulla concavità del quale arco passeggiando una ruota, descriverà due distinte curve cicloidee, e il nome di *epicicloide* dato dall'inventore a quella, suggerisce a noi di chiamare *ipocicloide* quest' altra. Essendosi da A partita la detta ruota, giunta in B, abbia descritto l'arco d'epicicloide AP. Prolungato il raggio CB di una lunghezza uguale al diametro BV, e congiunti V e P, il Newton trovò essere essenziale proprietà della nuova linea che AP a BV — VP, e 2 CE a CB hanno insieme la medesima proporzione.

Dal centro E si abbassi sul mezzo dell'arco BGP la EG, che segherà perpendicolarmente la corda in F, e al segamento EF tornerà la VP parallela e doppia, essendo anche BV diametro doppio del raggio EB. Ora, perchè

$$FG = EG - EF = \frac{2\,EB - VP}{2} = \frac{BV - VP}{2},\ \text{sarà}\ 2\,FG = BV - VP,$$

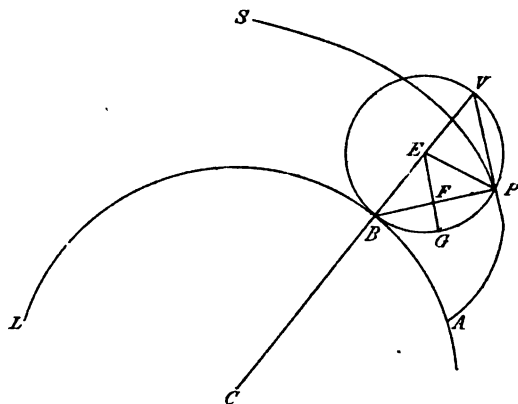
ond'è che la proporzione sopra annunziata dal Newton si potrà scrivere nella forma $AP : 2\,FG = 2\,CE : CB$. Ma 2 EG è il duplo seno verso della metà dell'arco BGP, 2 CE è la somma de' diametri del globo e della ruota, e CB è il raggio della stessa ruota; dunque è vero quel che aveva l'Autore, nella proposizione XLVIII, annunziato, che cioè « longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotae perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, quodque *cycloidem vel epycicloidem* nominare licet; erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii, qui globum ex eo tempore inter eumdem tetigit, ut summa diametrorum globi et rotae, ad semidiametrum globi » (p. 364). Per l'ipocicloide ricorre una simile proporzione, se non che il terzo termine, invece d'essere come dianzi la somma dei diametri, è la differenza.

Il pensiero della nuova curva così generata era balenato in mente anche al Nardi, quando, dop' avere accennato alle infinite cicloidi secondarie, descritte dagli infiniti circoli concentrici alla ruota, soggiungeva: *Osservo anche potersi la stessa linea cicloidale fra due periferie, ad imitazione dell' elice, disegnare.* Ma il Newton aveva ben altre intenzioni che alla Geometria pura, benchè nella sua Cicloide nuova si comprendessero anche le proprietà geometriche della volgare, la quale s' intende bene come non sia altro che la stessa Cicloide neutoniana, nel caso che il raggio BC sia infinito, e che perciò l' arco ABL si riduca a una linea retta. Se CB infatti è infinita, si rimarrà tale anche aggiungendovi il piccolo raggio BE della ruota, e perciò, essendo CR, CE uguali, la sopra trovata proporzione si trasforma in quest' altra: AP : BV — VP = 2 : 1, d' onde AP = 2 (BV — VP), in cui si sa che BV — VP è il doppio seno verso della metà dell' arco BGP. Quando il punto P, giunto in S, abbia descritta la mezza cicloide AS, allora la metà dell' arco BGP è divenuta un quadrante, il seno verso del quale uguagliando il raggio, farà AS = 2 BS, e 2 AS = 4 BS, ossia tutta intera la curva uguale al diametro quadruplicato della ruota; notissima proprietà della Cicloide ordinaria.

Le intenzioni però del Newton, come si diceva, non erano rivolte alla Geometria, ma sì alla Meccanica, per promoverla al di là di quel termine, dove l'aveva lasciata l'Huyghens. Si supponeva da lui nell' *Orologio oscillatorio* che fosse il pendolo sollecitato dagli impulsi della gravità sempre uniformi, ciò che dunque prescriveva allo strumento una sola particolare e immutabile stazione, la quale dall'altra parte non era possibile ritrovar qui sulla superficie della Terra, che in effetto non è piana, ma curva.

Figura 380.

Oscilli dunque il pendolo, disse il Newton, no nella volgare cicloide ugeniana, ma nella nostra, e le forze di gravità che lo sollecitano siano proporzionali alle distanze dal centro attrattivo: allora solamente io dimostrerò che quel pendolo è isocrono. « Si vis centripeta, tendens undique ad globi centrum, sit in locis singulis ut distantia loci cuiusque a centro, et hac sola vi agente corpus oscilletur in perimetro Cycloidis; dico quod oscillationum utcumque inaequalium aequalia erunt tempora » (pag. 374).

Di qui scendevano corollarii mirabili inaspettati: Decrescendo la gravità, dalla superficie della Terra in giù, in ragion semplice, e dalla superficie della

Terra in su in ragion de' quadrati delle distanze, non son dunque propriamente isocroni altro che i pendoli ipocicloidali, oscillanti ne' fondi delle miniere e delle caverne: non però gli epicicloidali sulla superficie terrestre, e gl' ipercicloidali sulle alture de' monti, e oscillino pure nella Cicloide neutoniana o nella volgare. « Aptantur autem propositiones a nobis demontratae ad veram constitutionem Terrae, quatenus rotae, eundo in eius circulis maximis, describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum, et pendula, inferius in fodinis et cavernis Terrae suspensa, in Cycloidibus intra globos oscillari debent ut oscillationes omnes evadant isochronae. Nam gravitas, ut in Libro tertio docebitur, decrescit in progressu a superficie Terrae, sursum quidem in duplicata distantiarum a centro eius, deorsum vero in ratione simplici » (pag. 383).

Non vogliamo, per la sua importanza, lasciar questo argomento, senza osservare che il Newton soggiunse nel suo Libro secondo le leggi del moto oscillatorio, anche avuto riguardo all' impedimento del mezzo, dimostrando che il pendolo cicloidale è solamente isocrono allora, ch' esso mezzo gli resiste in ragion semplice della velocità. Ma se le resistenze si fanno proporzionali ai quadrati delle velocità, e allora, « oscillationes breviores sunt magis isochronae. et brevissimae iisdem temporibus peraguntur, ac in medio non resistente, quam proxime: earum vero, quae in maioribus arcubus fiunt, tempora sunt paulo maiora » (pag. 201). Conseguiva di qui che, resistendo l' aria, come resulta dalle esperienze, in duplicata ragione delle celerità, nemmeno i pendoli ugeniani, secondo l' uso che se ne può fare da noi, sono isocroni. « Cyclois igitur, scriveva in tal proposito l' Eulero, quae ab Hugenio apta est demonstrata ad isochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio resistente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aere non inservit, nisi vel oscillationes sint valde parvae, vel inter se proxime aequales » (Mechan., T. II, Petropoli 1736, pag. 291): ciò che verificandosi pure ne' semplici pendoli circolari, ci fa intender come e perchè andassero così presto in disuso i magnificati Orologi nuovi olandesi.

L' opera dunque dell' Huyghens aveva più conferito ai progressi della Geometria e della Meccanica, che non a quelli della Fisica, alla quale eran principalmente rivolte le intenzioni dell'Autore. Ma la Meccanica stessa dell' Huyghens, come abbiamo veduto, aveva bisogno di essere ritirata verso la generalità de' principii, da' quali dipendeva essa, e la Meccanica galileiana insieme con lei, ciò che fece il Newton in quel modo, che da noi sommariamente s' è esposto. Non ci siamo però curati nel nostro discorso che di dare un saggio della materia, cosicchè la forma è rimasta solamente visibile a coloro, che hanno avuto per le mani e studiato il primo libro dei Principii di Filosofia naturale.

Quanti possano essere oggidì così fatti studiosi non è difficile indovinare, benchè la scarsità presente non sia forse punto minore di quella, che si notò nel suo primo venire il libro alla luce: messe ne' più lo stupore, e per qualche tempo si rimase incompreso. Lo stupore nasceva dalla novità inaspettata

delle conclusioni, e il parere impossibile che potessero queste capire nella mente di un uomo le fece giudicare incomprensibili a chi, con quelle dell' Autore, misurava le forze del proprio ingegno. Ma consistevano altre e più forti ragioni di queste difficoltà dell' intenderle, nel modo com' erano esposte e dimostrate le nuove dottrine. In Galileo rimaneva riparato l'apparente disordine dalla forma del dialogo, unificatrice presso a poco, come l' impasto nel mosaico a scaglie, ma l' Huyghens, che usciva fuori nel semplice e succinto abito del Matematico, distribuiva il suo *Orologio* in cinque parti distinte, descrivendo nella prima lo strumento, e nella seconda dimostrando que' teoremi *De descensu gravium*, che giovarono, col loro ordine e con la loro brevità, a diffondere la notizia della nuova Scienza galileiana, meglio de' prolissi ragionamenti del Salviati. Dalle leggi delle scese de' gravi nelle linee rette e nelle oblique si passa poi a dimostrare le nuove leggi della scesa de' gravi nella Cicloide. Qui dunque è tutto bene ordinato quanto al principio, al mezzo e al fine: è una figura tutta intera dalla pianta de' piedi ai capelli, mentre nel Newton non vedi del gran gigante altro che il torso, e qualcuna delle membra principali contratte, per una sublime sdegnosità michelangiolesca, e perchè mancava il marmo a rappresentar nella sua integrità la sconfinata ampiezza del concetto. Il metodo poi non è nè quello schiettamente sintetico di Galileo, nè quell' altro dell' Huyghens, qualche cosa partecipante dell' analisi cartesiana; ma, fra questa e la nuova analisi infinitesimale, fa sui più l' effetto di una nuvola molesta innanzi agli occhi, e in altri pochi provoca un disgusto espresso, somigliante a quello che si proverebbe nel mangiare una frutta di squisitissima qualità, ma tuttavia legnosa e acerbetta.

Questi secondi si riducevano a que' tre o quattro Tedeschi, che volevano sopra gl' Inglesi rivendicare alla loro nazione l' invenzion del calcolo infinitesimale: e di quel disgusto che si diceva abbiamo più volte veduto l' esempio in Giovanni Bernoulli, il quale, non solamente perfezionò alcuni teoremi neutoniani, ma in qualche parte trovatili sbagliati gli emendò, come quando, nel secondo libro *De principii*, proponendosi l'Autore di trovare la resistenza, che farebbe liberamente movere un corpo nella periferia di un circolo, chiamata G la forza assolutamente uniforme, R la resistenza incontrata dal punto M mobile in un quadrante, l' ordinata ortogogona del quale fosse QM, preso il raggio AC per asse delle ascisse, con l' origine al contatto della curva; assegnò tra G ed R la proporzion medesima, che è tra AC e QM, mentre il Bernoulli dimostrò che doveva esser invece l' altra, che è tra 2 AC e 3 QM, e il Newton docilmente corresse, nelle successive edizioni, il suo errore. La moltitudine degli studiosi però si rimaneva tuttavia atterrita dalle difficoltà, e perchè queste dipendevano come si disse dalla mancanza dell' ordine, e dalla qualità del metodo, con cui il libro era scritto; que' che avevano amore ai progressi della Scienza pensarono di ordinare in compendio, e di trattare con più facili aggressioni i teoremi del Newton, riducendoli all' intelligenza della stessa gioventù, che frequentava le scuole.

II.

Il merito di aver fatto così riprendere il corso al cavallo, che aveva adombrato, è principalmente dovuto a Giacomo Herman. Chiamato da Basilea sua patria a leggere le Matematiche nel nostro studio di Padova, elesse per soggetto delle sue lezioni l' Idrostatica. Trovò che aveva questa scienza da Archimede in poi progredito molto per opera e studio di Galileo, del Torricelli, del Pascal, del Boyle, e molto più ancora per quel che avevano il Castelli e il Guglielmini insegnato intorno alle acque correnti. « Sed quia, egli dice, eximia haec inventa in variis diariis aliisque libris dispersa et ex diversis saepe principiis elicila sunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, existimavi, si omnia iuxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque simplicibus principiis deducta et aucta publicae luci sisterem » (*Phoron. cit. praefatio*).

Da queste parole si rivela espressamente l' indole del magistero dell' Herman, il quale prosegue a dire che dovendo, per risalire alla desiderata generalità, richiamar molte dottrine appartenenti alla Meccanica pura, e non volendo rimandare i giovani suoi lettori a ricercarle altrove, pensò di premettere quello de' solidi al trattato del moto e dell' equilibrio de' fluidi, e così gli venne ripartita in due libri l' opera, alla quale impose il titolo di Legge delle forze o di *Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum.* Essendo sua principale intenzione l' ordine, ei fu il primo a trattar separatamente, prima dell' equilibrio e poi del moto dei corpi, dalla qual proprietà delle cose si venne poi a introdurre nell' uso la proprietà delle parole. Ai tempi di Galileo per Meccanica s' intendeva il trattato delle macchine: poi si messe fuori il nome di Statica, così mal definito però, come si vede nel Deschales, e in altri scrittori. Ma dopo l' Herman la parola *Meccanica* si usò a significare in generale la Scienza del moto, la quale si divise nella *Statica* e nella *Dinamica,* secondo che si trattava del moto in potenza e impedito, o nel suo attuale e libero esercizio.

La prima sezione dunque del primo libro della Foronomia è un trattato di Statica, che in sole XIV brevissime proposizioni comprende tutti i progressi fatti dalla Scienza, da Archimede in fino a que' tempi. E perchè uno di questi più notabili progressi consisteva nell' applicar i moti composti, incominciò l' Herman dal dimostrare che la resultante di due forze angolari è diretta e misurata dalla diagonale del parallelogrammo. L' ammirata brevità poi e la lucidezza nascono dalle generalità de' principii, da cui i particolari teoremi scendono dimostrati con facilità, in semplici corollari: si può dir anzi che la Statica venisse per l' Herman ridotta a un unico principio supremo, qual' è quello dell' eguaglianza de' momenti delle potenze, applicate di qua e di là dal centro della Libbra.

Di ben altra comprensione e importanza è la Dinamica, trattata dall' Herman nella Sezione seconda. I teoremi sparsi nel terzo e quarto dialogo delle due nuove Scienze; nella seconda, terza e quarta parte dell'Orologio oscillatorio, e nel primo libro de' Principii di Filosofia naturale; si trovan tutti ordinati qui in queste XLIII proposizioni, che son quasi altrettante fonti scaturite dalle alture del monte a irrigar largamento i campi della Scienza del moto. E come chi ha raggiunta la fonte riceve comodamente nella cavità della mano tutta l' acqna, che anderà poi a diffrangersi fra' sassi del ruscello; così avviene a chi legge il libro dell' Herman.

Mosse la restaurata Scienza dal fondamento di due supposizioni, l' una delle quali diceva che si raggiunge sempre uguale velocità ne' cadenti dalla medesima altezza, e l' altra che le velocità son proporzionali ai tempi. Come Galileo, il Torricelli e l' Huyghens fossero stati solleciti di confermare quel primo fondamento della Scienza con qualche ragione dimostrativa, ben se lo sanno i nostri Lettori, ma chi pensò mai o sperò di riuscire a dimostrare quell' altro principio fondamentale della Dinamica galileiana? Che sapeva o poteva egli rispondere Galileo stesso al Baliani, quando opponeva parergli più ragionevole l' ammetter che le velocità crescessero come gli spazi? niente altro se non che l' esperienze confermavano le sue supposizioni. E così come sentì l'Herman che la Scienza pativa difetto ne' suoi più vitali principii; così pensò d' infonderveli derivandoli dalle altissime fonti.

Sia la linea retta AD (fig. 381) con qualunque curva MON, e fatto centro in D, si descrivano gli archi di cerchio NE, OP, MA. S' immagini che il medesimo mobile o due mobili uguali, partendosi dalla quiete in A e in M, discendano per le due dette linee attratti al centro D con forze, che saranno uguali in N, E; O, P; M, A, per esser punti situati respettivamente a distanze uguali dal centro dell' attrazione. Sia la forza centripeta, che sollecita il punto N,

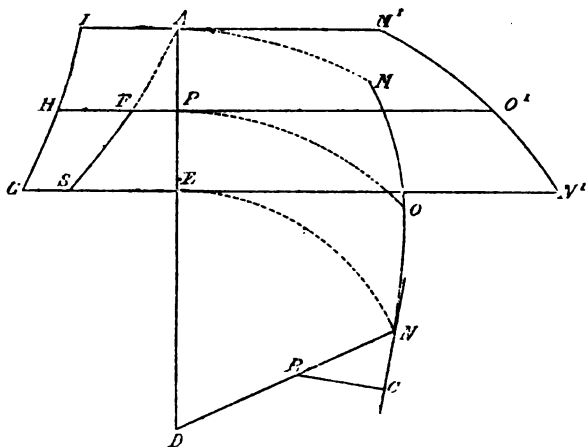



Figura 381.

rappresentata da NB, la quale si decomponga nella tangenziale NC, e nell' altra BC, perpendicolare a lei, e perciò non considerata in questo calcolo come inutile a produrre il moto discensivo. Da E alzata sopra la AD una linea ad angolo retto, si prenda in essa ES = NB, e in simile modo, cercate le forze tangenziali in O, e in tutte le altre parti della curva, le linee

che le rappresentano si applichino in P, e negli altri punti corrispondenti: è manifesto che la curva AS sarà la scala delle velocità tangenziali.

Così definite le cose, l'Herman si propone di dimostrare questo teorema: « Si mobilia M, et A ex punctis M, et A in curva MON et recta AD a quiete cadere incipiant, celeritates ipsorum in punctis N, E; O, P etc. acquisitae erunt aequales » (pag. 58). La proposizione essendo universalissima, deve esser vera a qualunque distanza trovisi il punto D. Che se questa distanza è infinita, gli archi AM, PO, EN torneranno nelle rettitudini AM', PO' EN', e perciò le velocità tangenziali in M', O', N' saranno quelle medesime delle discensive in A, P, E. « Adeoque celeritates in diversis planorum et curvarum continuam curvaturam habentium inclinationibus descensu acquisitae, aequales sunt in omni gravitatis variabilis et uniformis hypothesi, si planorum vel curvarum elevationes aequales fuerint » (ibid., pag. 62).

Ecco in qual modo il famoso supposto galileiano è dimostrato vero, e no solamente nel caso della gravità uniforme, ma in qualunque ipotesi della gravità variabile; cosicchè i corpi raggiungono velocità uguali, dopo cadute uguali, così sulla superficie e nell' interno della nostra Terra, come è nei mondi, che si governassero con altre leggi. E qui vien voglia di domandare se qualunque legge di gravità sia possibile. Chi non lo crederebbe, pensando alla Onnipotenza del Creatore? Eppure la Matematica risponde di no, per la contrarietà che talvolta non lo consente, come non consentirebbe a nessuna potenza di far che un circolo sia quadrato, e di qui è che essa Matematica decise esser solamente possibile la proposta in que' casi, ne' quali il calcolo dà un resultato reale; impossibile poi in tutti gli altri, per i quali s' hanno resultati assurdi e immaginari. Per questa via sottilmente apertasi và l'Herman a decidere tra la ipotesi di Galileo e quella del Baliani, e così nello stesso tempo gli vien conclusa la dimostrazione, che le velocità son proporzionali ai tempi e non agli spazi.

Stando infatti la velocità u in ragion diretta dello spazio s, e reciproca del tempo t, e la forza sollecitante g della gravità in ragion diretta della velocità, e pur essa reciproca del tempo; dalle equazioni $u = ds : dt$, $g = du : dt$ abbiamo $u : g = ds : du$, ossia $gds = udu$. Poniamo, come vuole il Baliani, $u = s$ o $u^2 = s^2$, d' onde viene, differenziando, $udu = sds = gds$, e perciò $g = s$. Dunque, essendo $s = o$, sarà anche $g = o$, e ciò vuol dire che, venendo meno nell'atto della discesa l' impulso della gravità, il corpo, come non potrebbe cominciare, così sarebbe impossibile che proseguisse nel moto. Di più, nella formula $dt = du : g$ posto $g = s$, avremmo secondo l' ipotesi del Baliani $dt = ds : s$, la quale equazione integrata dà $t = log . s$, cosicchè, essendo $s = o$, e il logaritmo di zero infinito; ne conseguirebbe che il mobile impiegasse un tempo infinito nella quiete, ossia che assolutamente non si movesse, *adeoque Baliani hypothesis impossibilis et imaginaria est.* (Phoron., pag. 65).

Questa ipotesi fu poi sostenuta da altri, fra i quali il Cazr, il Deschales, il Lana, tutti gesuiti: e perchè dalle cose narrate nel capitolo terzo di

questo Tomo apparisce quanto fossero insufficienti l'esperienze a decidere la questione; si comprende come giungesse opportuno, a confermare i fondamenti della Scienza galileiana, il calcolo dell' Herman, ripetuto poi dall'Eulero nel primo tomo della sua Meccanica analitica, al secondo Scolio dopo la proposizione XV, concludendovi col dire che la legge supposta da Galileo era necessaria, e che perciò ne escludeva ogni altra diversa. « Ex data vero problematis solutione unde consequitur celeritatis incrementa fore temporibus quibus producuntur proportionalia, intelligitur legem inventam necessariam esse, neque ullam aliam vi principii contradictionis existere posse » (pag. 54).

L' Herman aveva particolarmente notate alcune altre di queste ipotesi, dimostrandole in contradizion con la vera, perchè, ridotte nella formula, davano resultati anch' esse impossibili e immaginari, e dopo ciò così dice: « Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus: dispiciendum restat quid ex una alteraque gravitatis hypotesi sequi debeat » (pag. 65). Le ipotesi della gravità allora ammesse si riducevano a quella del Newton per l'interno della Terra, dove le forze sollecitanti son proporzionali alle distanze, e a quella di Galileo comunemente professata ne' cadenti sulla superficie della Terra, sollecitati da impulsi di gravità sempre uniformi. Essendo manifestamente in quella prima ipotesi la scala delle forze in un triangolo, si propose l' Herman di trovar la scala delle relative velocità, ciò che gli riuscì di facile invenzione, dietro il teorema XIX illustrato dalla figura 381, e in cui si dimostrava che, essendo IHG la scala delle gravità, i quadrati delle linee PO′, EN′, e delle altre simili, che espongono le velocità, equivalgono al doppio delle aree IAPH, IAEG.

Ciò posto, e dato che sia AD (fig. 382) la linea della scesa d'un corpo attratto al punto D, con forze proporzionali alle distanze, e perciò anche alle ordinate del triangolo ADQ, dalla DQ con qualunque angolo al centro descritto; per concluder che la scala delle velocità è il quadrante ASR di una ellisse, il semiasse maggior della quale sia AD, e $DR = \sqrt{AD \,.\, AQ}$ semiasse minore; non occorrē dimostrar altro sè non che, segnata ordinatamente qualunque linea ES, il quadrato di quėsta uguaglia il doppio dell'area del trapezio AC, a che facilmente conduce la costruzione del quadrante circolare AFL, e del triangolo isoscele AGD, dal qual triangolo e dall' altro inscrittogli AQD, prolungata la ES, in F da una partė, e in B dall'altra; avremo per le parallele AG, BE, $AG : BE = AQ : CE$. Componendo e trasponendo, sarà $AG + BE : AQ + CE = AG : AQ = 2\,T : 2\,t$, intendendosi per T, t i trapezii, de'quali $AG + BE$, $AQ + CE$ son la somma delle basi parallele. Ora essendo, per le proprietà del circolo e dell' ellisse, $EF^2 : ES^2 = DL^2 : DR^2 = AG^2 : AG \,.\, AQ = AG : AQ = 2\,T : 2\,t$, ed $EF^2 = DF^2 - DE^2 = DA^2 - DE^2 = AH - EI = AGHIBE = 2\,T$; dunque $ES^2 = 2\,t$, com' era l' intenzione di dimostrare. In qual modo poi si derivi di qui, quasi per corollario, la XLVII proposizione del Newton (T. I, pag. 362) è cosa per sè tanto manifesta, che basti averla avvertita.

Nella comune ipotesi della gravità uniforme, D andando infinitamente

distante da A, le due linee AD, QD diventano parallele, e l'area AC trasformandosi in un rettangolo riduce l'equazione alla forma $2\,AQ \,.\, AE = ES^2$, che è l'equazione di una parabola, col parametro 2 AQ. Donde è manifesto che la scala delle velocità, in questa ipotesi, è nella parabola; e perchè le ascisse rappresentan gli spazii, e le ordinate le velocità o i tempi; questi stanno dunque come le radici di essi spazi. Così l'Herman, derivandola da principii universali, confermava la verità della X proposizione del primo libro *De motu* del Torricelli, il quale fu il primo a designar la parabola per la scala delle velocità de' corpi, secondo la legge di Galileo naturalmente cadenti.

Ipotesi si possono, e anzi, a rigore di Matematica, si debbono dire le leggi della gravità sulla superficie e nell'interno della Terra, ma per gli spazi planetarii il Keplero e il Newton avevano ridotte le leggi, secondo le quali gravitano i pianeti nel Sole, a certissima tesi: di certezza fisica per le osservazioni del primo de' commemorati astronomi, e di certezza matematica per i teoremi del secondo, che applica al moto iniziale dei Pianeti le proprietà dinamiche de' proietti. La dinamica nuova neutoniana era senza dubbio più generale di quella insegnata da Galileo nel suo Dialogo quarto, dove si suppone che il centro attrattivo sia a una distanza infinita dal mobile, ma pure si limitava a rendere la ragione di un fatto particolare, quale si osserva nella Natura. L' Herman volle dare a questo problema della Scienza la sua massima generalità, proponendosi di trovare in qual curva si volgerebbe un proietto, attratto al centro con qualunque legge di gravità variabile, senza richiedere altra condizione, se non che la detta curva sia algebrica e non trascendente. Così i teoremi scritti nella terza sezione de' Principii di Filosofia naturale si derivano come semplici corollarii da questa universalissima proposizione dell'Herman, e accennammo di sopra come in uno di questi stessi corollarii, in cui si concludeva che, variando la gravità reciprocamente ai quadrati delle distanze, il proietto si volgerebbe in una sezione conica; le censurate dottrine del Newton trovarono la loro più autorevole conferma.

Figura 382.

Non sempre si porge all' Herman l'occasione di sublimare di più queste assai per sè stesse sublimi speculazioni neutoniane, ma sempre però si studia e giunge a renderle di più facile trattato, e più chiare. Potremo, fra' tanti esempi di ciò, citar le leggi delle sollecitazioni centrali nelle orbite mobili,

e del *Moto degli apsidi.* Sia ABE (fig. 383) qualunque orbita immobile, uguale e simile all'orbita A′B′E′, descritta da un proietto, che si volga in essa e con essa, la quale si suppone che giri intorno al centro C dell'attrazione con tal legge, che l'angolo ACA′, rotatorio dell'asse, all'angolo A′CB′ sotteso dall'arco A′B′ passato dal proietto nel medesimo tempo, che fu descritto l'angolo della rotazione ACA′; stia in qualunque ragion data, per esempio ACA′ : A′CB′ = H : F, o componendo B′CA : A′CB′ = H + F : F = G : F, facendo per semplicità H + F = G. Il moto dell'asse A′E′ è un esempio di quello che si chiama *Moto degli apsidi,* e che vien determinato dalla ragione di F a G, per trovar la quale il Newton ricorre al suo teorema delle serie convergenti infinite: « Sed quid, entra qui a dire l'Herman, si modum facillimum aperuero, quo idem, absque ulla serierum infinitarum auxilio, obtineri queat, imo longe plura, quandoquidem praebet canonem generalem, quaecumque solicitationis centripetae sit lex, rationem F ad G manifestantem? » (pag. 99).

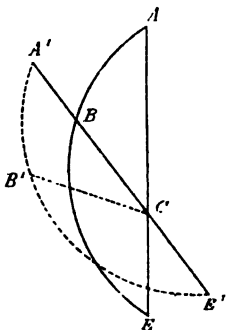



Figura 383.

Bastano questi, senz' aver bisogno di aggiungere altri esempi, a persuaderci che la facilità, con cui l'Herman dimostrava i teoremi di Galileo e del Newton, oltre tanti altri, che non si trovano compresi nelle loro proposizioni, dipendeva dall'essere risalito agli altissimi principii. Dicemmo che di mezzo a que' due grandi promotori della Scienza stava l'Huyghens, l'opera del quale, benchè forse ristretta, parve nulladimeno insigne, per aver quietate le affannose ambagi dei Matematici, col definir la vera natura della curva tautocrona. Ripensando l'Herman anche sopra questa nuova ammirata invenzione, si domandava se il tautocronismo fosse proprietà di sola la cicloide, e a chi gli avesse risposto di sì, almeno nell'ipotesi della gravità uniforme, sentiva di poter citare i progressi fatti dal Newton in questa stessa speculazione, supposto che la gravità sia variabile ora come le distanze, ora come i quadrati delle distanze dal centro dell'attrazione. Ma dato che si facessero queste variabilità in qualunque modo, qual sarebbe la curva, nella quale scendendo un grave per archi o maggiori o minori gli passerebbe nonostante tutti nel medesimo tempo? Ecco ciò che cercava di far l'Herman, con sollecitudine che si sarebbe detta un' incredibile audacia, se il fine così felicemente conseguito non avesse con lo stupore soppresso ogni alito della voce.

Circa l'asse CA (fig. 384) descrivasi la IKLN, che sia la scala della gravità variabile sollecitatrice al centro O. Da A, dove si pone il loro principio, vadano le ordinate XZ, HR, GQ e le altre simili via via crescendo con tal legge, che i loro quadrati uguaglino il doppio delle aree XN, HN, GN...: gli estremi punti Z, R, Q... delle dette ordinate si troveranno in una curva continua AZRQD, che per le cose dette è la scala delle velocità. Ora, a partire dal punto A, pure intorno all'asse AC, descrivasi una terza curva BEA, di tal figura che, menati col centro in O e con gl' intervalli CO, GO, HO...

gli archi di cerchio BC, FG, EH..., i curvilinei BFEA, FEA, EYA... alle ordinate CD, GQ, HR stiano come un numero qualunque N all' unità: lasciato un grave cadere, nella concavità disegnata, da R, da F, da Y o da qualsivoglia altro punto, giungerà in A sempre nel medesimo tempo, e perciò la BEA sarà la curva tautocrona, con qualunque legge la gravità del corpo ne vada sollecitando la discesa.

La dimostrazione non costa all' Herman che una pagina di scritto, la quale anche si potrebbe ridurre alla metà, introducendovi i simboli algebrici, e gli usati segni convenzionali: eppure è in quelle pagine condensata tutta la scienza dell' Huyghens, con le sue più notabili conseguenze. Infatti se la gravità è uniforme la linea curva ILN torna a una linea retta parallela all' asse, e la scala ARD delle velocità si riduce a una parabola conica: gli archi BC, FG, YX..., essendo O a una distanza infinita, si rettificano nelle corde, le quali ordinatamente riferiscono all' asse AC la curva tautocrona AEB, che dunque è una Cicloide ordinaria. Di qui anche consegue che il tempo impiegato dal mobile a passare la metà della curva, è al tempo della scesa perpendicolare per l' asse, come la semicirconferenza al diametro.

L' Huyhens non ebbe altra intenzione, in cercare nel tautocronismo della Cicloide il pendolo isocrono, che di applicarlo alla misura del tempo, principale e unico ufficio commessogli da Galileo. Poi il Newton dette ingerenza allo strumento di misurare le variabili distanze della superficie dal centro della Terra, e di scandagliare, per le segrete viscere di lei, la quantità e qualità della materia: nè ciò bastando, il Bernoulli additò in lui le virtù stesse dell' areometro, dalla gravità assoluta passando a rivelar la specifica dei corpi. Tutte queste proprietà, sparsamente dimostrate dai vari autori, son comprese nel teorema generale dell' Herman, il quale, ripensando da una parte alla dignità dell' argomento, e dall' altra all' insufficienza de' principii, con cui si era trattato; ebbe ragione di scrivere, compiacentesi, queste parole: « Ex corollariis proxime antecedentibus satis elucere existimo quantae utilitatis sit Theorema nostrum generale isochronismi corporum in curvis, assignata lege descriptis, descendentium, cum ex ea omnia, quae ad pendulorum motus spectant, tanta facilitate deducantur » (*Phoron.* cit., pag. 86).

Figura 384.

Sia infatti, nella medesima figura 384 illustrativa di quel teorema generale, T il centro del circolo osculatore alla curva nel tratto AY: se dal

raggio TA, come da filo attaccato in T o da verga, vada pendulo il globo A, farà questo le sue vibrazioni isocrone, ond'è che tutte le minime vibrazioni circolari si fanno nel medesimo tempo, non solamente sulla superficie terrestre, ma dovunque le sollecitazioni della gravità sian variabili secondo qualunque ragione. Chiamato T il tempo di due delle dette minime vibrazioni, M la massa del corpo A, P il suo peso, l'Herman ha per facile corollario dal suo teorema: $T = 2r\pi\sqrt{\frac{M.TA.AO}{P.TO}}$, equazione, che vale per tutti i pendoli, da qualunque variabile forza acceleratrice siano sollecitati, e dalla quale resulta che i tempi delle oscillazioni di due pendoli varii stanno in ragion diretta delle radici delle masse, delle lunghezze e delle minori distanze dal centro dell'attrazione; e in ragion contraria delle radici dei pesi e delle distanze de' punti di sospensione dal detto centro. « Haec determinatio, dice l'Herman, probe consentit cum assertionibus paulo specialioribus Neutoni, propos. LII libri primi Phil. Natur. » (ibid., pag. 85). Il Newton infatti non giunge quivi a questa determinazione dalla curva isocrona universale, ma dalle particolari proprietà dimostrate nel suo pendolo ipocicloidale, in quello cioè che oscilla in un arco della cicloide, generata dal ruzzolarsi la ruota nella concavità del cerchio massimo di un globo. Ed essendo V di esso globo la forza assoluta, trova che i tempi delle oscillazioni « *sunt in ratione, quae componitur ex subduplicata ratione longitudinis fili directe, et subduplicata ratione distantiae inter punctum suspensionis, et centrum globi inverse, et subduplicata ratione vis absolutae globi etiam inversae* » (pag. 381): ossia, come $\sqrt{\frac{AT}{OT.V}}$. Ora, avendosi $g = AO.V$, perchè la forza acceleratrice g cresce col crescere della distanza dal centro attrattivo, e della forza assoluta, ed essendo $g = \frac{P}{M}$, verrà $\frac{1}{V} = \frac{AO.M}{P}$, che sostituito riduce l'asserzione del Newton manifestamente alla determinazione dell'Herman.

Bellissime cose fin qui, senza dubbio, ma inutili a noi, che non abitiamo nè sotto terra, nè nel mondo delle astrazioni. Pensiamo perciò ai pendoli, disse l'Herman, che si possono trattar con le nostre proprie mani, e per i quali (le forze acceleratrici supposte uniformi, e AO infinita rendendosi uguale a TO) la formula del tempo, chiamata L la lunghezza del filo, si riduce a $T = 2r\pi\sqrt{\frac{M.L}{P}}$, d'onde $T:T' = \sqrt{\frac{M.L}{P}} : \sqrt{\frac{M'.L'}{P'}}$. Che se le lunghezze dei fili sono uguali, $T:T' = \sqrt{\frac{M}{P}} : \sqrt{\frac{M'}{P'}}$; se i pesi a quelle stesse lunghezze son proporzionali, $T:T' = \sqrt{M} : \sqrt{M'}$; e se di più anche le masse ad essi pesi sono proporzionali, se cioè $\sqrt{\frac{M.L}{P}} = \sqrt{\frac{M'.L'}{P'}}$; e i tempi pure anderanno uguali. Avremo all'ultimo, in pendoli ugualmente lunghi, $M:M' = PT^2 : P'T'^2$. « Atque hoc ipsum est, dice l'Herman, propos. XXVII

libri II Princ. Phil. Natur. qua usus est cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipsorum massis proportionalia sint nec ne » (*Phoron.*, pag. 85): la qual proposizione corrisponde, nelle posteriori edizioni, alla XXIV così formulata: « *Quantitates materiae in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis aequaliter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum, et ex ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo* » (pag. 189). E perchè, essendo i pesi uguali, le masse stanno direttamente come i quadrati dei tempi, ed essendo le masse uguali i pesi stanno reciprocamente come i detti quadrati; « hinc liquet, conclude il Newton, ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiae in singulis, tum comparandi pondera eiusdem corporis in diversis locis, ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis, inveni semper quantitatem materiae in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse » (pag. 194).

Perchè poi è un fatto che due diversi pendoli, quanto son più lesti, tanto fanno, nel medesimo tempo, un più gran numero N, N′ di vibrazioni, ossia, avendosi per esperienza $N : N' = T' : T$; sostituiti i valori di T′, T, verrà $N : N' = \sqrt{\frac{M' . T'}{P'}} : \sqrt{\frac{M . L}{P}}$, e anche, perchè $\frac{M}{P} = \frac{1}{g}$, $N : N' = \sqrt{\frac{L'}{g'}} : \sqrt{\frac{L}{g}}$, d'onde, in pendoli da gravità uguali sollecitati, $N : N' = \sqrt{L'} : \sqrt{L}$, e in pendoli ugualmente lunghi, $N : N' = \sqrt{g} : \sqrt{g'}$. « Atque hoc posterius (che cioè i numeri delle vibrazioni di due pendoli, con lunghezze uguali, stanno come le radici delle gravità sollecitanti) ad amussim convenit cum regula, quam Bernoullius in elegantissimo suo schediasmate, Act. Lips. 1713 m. februario inserto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates specificas eruere docet ex pendulorum experimentis, modo plane novo nec antea cognito » (*Phoron.* cit., pag. 86).

Il capitolo ultimo della Meccanica dell'Herman s'intitola *De regulis motus in collisione corporum,* dove per verità, piùttosto che promovere la scienza de' suoi precursori, ne rende la trattazione più facile e più ordinata. Notabile è nonostante l'ipotesi della conservazione delle forze assolute, che egli crede liberamente di poter professare, in mezzo alla controversie, e cita il Leibniz e l'Huyghens, per dare autorità alla sua opinione, benchè sarebbe stato forse più giusto citar prima di loro il Borelli, il quale aveva concluso il cap. XVII del suo libro *De vi percussionis* col dire: *motum neque gigni de novo, neque destrui in natura* (pag. 136).

Non ritorneremo sopra la formula generale data dall'Herman, per calcolare i centri delle oscillazioni, nè sopra quel ch'egli aggiunse, per applicarla direttamente ai pendoli, e alla teoria delle forze centrifughe, già sufficientemente illustrata dall'Hopital e dal Newton, essendo oramai tempo di concludere il nostro discorso, col rassomigliare la Foronomia, nella vita della Scienza, al ventricolo del cuore, in cui, scesovi dalle vene, s'è raccolto nella diastole il sangue. Nel successivo moto di sistole quel sangue già vivificato

si diffonderà a irrigare le membra rigogliose per la grande arteria della Meccanica analitica, alla quale ci rimarrebbe a rivolgere uno sguardo. Ma perchè si vuole che questi spiriti vitali vi siano suscitati, quasi come da fermento, dalle Regole dei moti composti e del calcolo infinitesimale; diremo prima qualche cosa di loro, nell' ammetterle che fecero i Matematici ai servigi della Meccanica nuova.

III.

O consapevoli o no i novelli Matematici, nel dimostrare le leggi dei moti composti, non si dilungarono dalla semplicità dei metodi antichi. Supposto che un corpo venga sollecitato insieme da due forze angolari, proporzionate ai lati di un parallelogrammo, il Varignon, il Newton e l' Herman procedevano, in concluder che la resultante è rappresentata in direzione e in grandezza dalla diagonale, in quel modo ch' erano già proceduti Aristotile, il Cardano, il Roberval, il Torricelli e il Wallis. Ma il Newton sopra gli altri riduceva la dimostrazion del teorema da lui formulato: *Corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis* (*Principia* cit., T. I, pag. 24) a quella così efficace semplicità, che derivava nel suo discorso dalla precisione, e dall' evidenza de' premessi assiomi, o com' egli stesso gli chiamava *Leggi dei moti.*

La prima legge è quella così detta dell' inerzia, in virtù della quale un corpo già mosso persevera uniformemente a moversi in diretto: cosicchè se prima era per esempio in A (fig. 385), e poi in D, possiamo esser certi che non è mai uscito dalla rettitudine DA del precedente viaggio. La seconda legge, dipendente dalla prima, è che la velocità di un corpo non muta nè grado nè direzione, per sopravvenirgli un altro impulso in direzione diversa: cosicchè, se il punto A per esempio si move nell' AC uniformemente, con una data velocità; con questa seguiterà a moversi parallelamente a se stesso, anche trasportato che sia nella direzione AB: assioma, che giovò ridurre alla mente di coloro, i quali, tuttavia sofisticando intorno all' impedirsi che fanno in concorrere insieme due forze, si mettevano al pericolo di errare, quando si trattava di definir l' essere, e la ragion della resultante.

Ciò premesso, sia, dice il Newton, in un dato tempo, per la sola forza M, il corpo A uniformemente portato da A in B, e, per la sola forza N, da A in C. Compiuto il parallelogrammo, perciocchè, per la seconda legge, la forza che agisce nella direzione AC non muta la velocità di avvicinarsi alla linea BD, dovrà in qualche punto di questa, alla fine del dato tempo, ritrovarsi il mobile A, e dovrà per le medesime ragioni trovarsi anche insieme in qualche punto della CD; dunque nel loro concorso D: e il mobile stesso, che a principio era in A, non può, in virtù della prima legge, non esser passato per la rettitudine AD, diagonale del parallelogrammo.

Il Varignon, nei principii che premette alla *Nouvelle mecanique,* invoca, più espressamente del Newton, l' assioma che *les espaces parcourus de vitesses uniformes en tems egaux par des corps quelconques sont entr' eux comme ces memes vitesses* (T. I cit., pag. 5), e simile fa l' Herman nel teorema III del primo libro della Foronomia, cosicchè le loro dimostrazioni procedon nel modo medesimo di quella del Newton, ma con diverso andamento. il quale consiste nel considerare che, mentre il mobile ha passato, nella direzione AC, lo spazio AK, deve nella direzione AB aver passato tale altro spazio KG, che sia AC : CD = AK : KG, cosicchè G è il punto, dove si trova il mobile alla fine di quei due moti. S' avranno allo stesso modo indicati i punti G′, G″.... dove esso mobile è giunto alla fine dei moti AK′, K′G′; AK″, K″G″.... ed è facile vedere come tutti questi punti sian disposti lungo la diagonale AD del parallelogrammo, la quale dunque indica la direzione, e misura la quantità del moto unico, che resulta dai due componenti.

Era il bel teorema, per tanti secoli quanti se ne contano da Aristotile all' Herman, andato attorno in quest' abito semplice e schietto, bene accolto da tutti e onorato, quando Giovanni Bernoulli uscì fuori con giovanile baldanza a dire che quell' abito non era il suo, e che bisognava tagliargliene un' altro, che s' adattasse meglio al suo dosso. « Peccant qui confundunt compositionem virium cum compositione motuum. Vis enim vel potentia, utpote consistens in solo nisu vel conatu, ad motum generandum, nullam sane velocitatem actualem, ne minimam quidem, producit, si corpus in quod agit est immobile. Ubi perfectum est aequilibrium, ibi nullus adest motus. Qui ergo considerari possit motus, in aequilibrii natura explicanda, non video » (*De composit. et resolut. virium,* Op. omnia, T. IV cit., pag. 256).

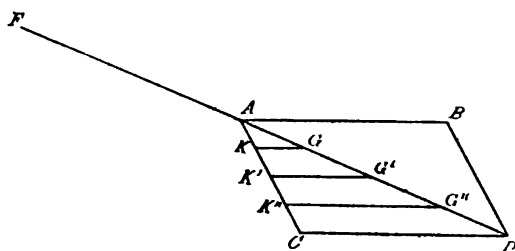



Figura 385.

Non vedeva ciò il Bernoulli, perchè non aveva letto, o aveva dimenticato quel ch' era stato scritto da alcuni Matematici insigni, essere cioè nell' equilibrio due moti uguali e contrari, e perciò la quiete non altro che apparente. Il Borelli, nel cap. XVII del suo libro *De vi percussionis,* pronunziava questa, non sentenza assoluta, ma probabile opinione: « Si vero consideretur actio illa, quae vera destructio motus appellatur, profecto in ea nil omnino destruitur, sed tantummodo imprimitur motus contrarius, ita ut postmodum in eodem subiecto duo impetus et motus contrarii vigentes et perseverantes apparentiam quietis pariant, et sic videantur ambo destructi, cum tamen utrumque vivere ac existere in natura non videatur improbabile: et universe, quotiescumque corpus aliquod post eius motum quiescere conspicitur, tunc dicendum est ab obstaculo vel impedimento eidem impressum

fuisse gradum impetus contrarium omnino aequalem ei quo prius ferebatur » (Editio cit., pag. 135).

Del resto non si vede che gran peccato facessero coloro, i quali avevano confusa la composizione dei moti con quella delle forze. Confondere le azioni si sarebbe stato gran vizio logico, perchè le forze son le cause e i moti l' effetto: ma qui si tratta di una passione, che sopravviene ai loro composti, nè si vede per qual ragione s' avesse a condannar chi dicesse che la causa e l' effetto possono, in certe loro passioni, rassomigliarsi. « Quaeritur enim, soggiunge ivi il Bernoulli, cur tres potentiae C, B, F (nella fig. 385) commune punctum A sollicitantes, ea qua dictum est conditione (cioè che la diagonale del parallelogrammo, descritto sopra due qualunque delle date forze, sia uguale e direttamente contraria alla terza) perfectum inter se servent aequilibrium? Quomodo igitur introduci possit ulla velocitas, ubi perfecta adest quies, non video. »

Ma suppongasi che le AB, AC, AF (nella medesima figura) siano tre funi, che mantengono il nodo A in equilibrio: recisa l' AF, l' equilibrio è rotto, e succede il moto nella direzione AD resultante dalla composizione dei moti per AB, AC. Ecco per qual ragione i Matematici anteriori al Bernoulli erano trapassati a introdurre le velocità, dov'era quiete perfetta. Anzi tanto facile e naturale si presentava questo passaggio, che il Bernoulli stesso, nella sua dimostrazione, come vedremo, non potè astenersi dal farlo. Il teorema insomma si può proporre in due vari modi: nel primo, che dice restare in quiete il punto A sollecitato dalle tre forze AB, AC, AF, se la diagonale AD è uguale e direttamente contraria alla terza forza AF; e nel secondo modo così: il punto A, che, divisamente, si moverebbe con le velocità AB, AC, compostamente, è diretto e va con velocità rappresentata dalla diagonale AD del parallelogrammo. In quel primo modo proposto il teorema apparterrebbe alla Statica, ma alla Dinamica nel secondo.

Ora, sarebbe stato il Bernoulli assai più giusto censore, se avesse detto che il Varignon, il Newton e l' Herman confondevano la Statica con la Dinamica: o meglio, se avesse rimproverato a quegli Autori, per aver trattato dell' equilibrio, con l' invocare le leggi del moto. Il Varignon per esempio premette come principio assiomatico della sua dimostrazione che, nei moti uniformi, essendo i tempi uguali, le velocità son proporzionali agli spazi. Ma questo non è, nè può citarsi come assioma, essendo un teorema da dimostrarsi in una Scienza superiore. Parimente l' Herman dimostra la regola di comporre in uno due moti, nella prima sezione del primo libro della Foromia, ossia nella Statica, dove anch' egli cità quella proprietà dei moti uniformi, dicendola manifesta: *manifestum est.* E poniamo che tale ei la dica per le cose già dimostrate infin da Archimede nel libro delle Spirali, non potrebbe però apparir tale alla mente de' suoi lettori, i quali si suppone che non sappiano ancora nulla della Dinamica, di che si tratterà nella Sezione seconda. Quivi era logico ammettere per cosa nota, perchè recentemente dimostrata da Galileo e dall' Huyghens, che *spatiola, aequabili motu percursa,*

sunt in composita ratione temporum et velocitatum (Phoron., pag. 55): non logico però sembra a noi che sia suppor la notizia di quelle leggi de' moti equabili, nel teorema terzo degli equilibri.

Ma come da un' altra parte trattar dei moti, senza presupporne le leggi? — A che bene a proposito ci vien la risposta dal Bernoulli: — Scansate di trattar dei moti, e attenetevi alle semplici forze. — E così, come egli disse, anche insegnò di fare con assai bella dimostrazione, non da altri principii condotta che dalla statica del vette. « Archimedes, aliique ex veteribus, ad vectis indolem recurrerunt ut phaenomena gravitationum, se mutuo in aequilibrio vel quiete retinentium, demonstrarent. Nos eorum exemplum secuti idem fecimus, dum potentiarum compositionem ad vectis leges, utpote a longo adeo tempore dmonstratas atque receptas, reduximus, reiecto nempe explicandi modo recentiorum Geometrarum, ut Cartesii, Stevini, Newtoni, Varignonii, Hermanni aliorumque, qui velocitatem saltem initialem in auxilium vocarunt, ad principii elegantissimi veritatem stabiliendam; ubi tamen nulla prorsus adest velocitas » (Op. cit., pag. 256).

La dimostrazion del Bernoulli, che nella scrittura di lui forse apparisce prolissa, si può rendere così in poche parole. Siano le tre potenze A, B, D (fig. 386) rappresentate dalle linee AP, BP, DP, concorrenti a mantenere il punto P in equilibrio. È manifesto che, rimossa una qualunque delle dette potenze, per esempio D, il punto P si moverà con direzione, dice il Bornoulli, e con forza rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo AB, costruito sulle direzioni delle due forze rimaste.

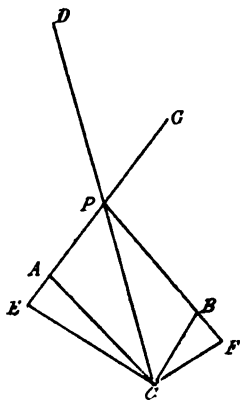



Figura 386.

Esser questa veramente e non altra la direzione resulta dall' aversi AP a BP contrariamente, come il seno dell' angolo BPC al seno dell' angolo APC: ciò che dall' Autore si dimostra prolungando le AP, PB, e sopra i loro prolungamenti abbassando dal punto C le perpendicolari CE, CF. Allora, trasferite le potenze A, B, D in E, F, C, la ECF si può riguardar come una leva angolare coll' ipomoclio in C, e in cui, per le note leggi, è A : B = CF : EC = BC : AC = AP : BP = sen BPC : sen APC.

Supponendo ora invece rimossa l' AP, il moto resultante dalle D, R sarà dunque, per le cose già dimostrate, diretto secondo PG, in modo che sia B : D = sen DPG : sen GPB = sen APC : sen PAC = AC : PC = PB : PC. E perchè PB rappresenta la potenza B, dunque PC rappresenterà la potenza D, e perciò veramente si farà il moto nella direzione e nella misura che s' era detto, cioè lungo, e per tutta intera la diagonale del parallelogrammo.

Chi potrebbe negare che questa dimostrazione non si addica meglio alla Statica di quell' altre del Varignon e dell' Herman? Anzi, perchè così que-

ste, come quelle de' precedenti autori, eccettuatone Giov. Marco, son tutte uscite dal medesimo antico stampo aristotelico, è da dire che incontrò prima al Bernoulli, non contento degli altrui processi, di dare alla dimostrazione del bello e importantissimo teorema un processo del tutto nuovo.

Un secondo e simile incontro ebbe poco di poi in Italia Vincenzo Riccati, benchè per vario, ma forse più giusto e più generoso motivo, quale si fu di persuadere la verità a quelle poche e sparse reliquie de' Galileiani, i quali duravano ostinati a dire che nella regola del parallelogrammo non si osserva la necessaria equivalenza tra le potenze componenti e la resultante. Per dare alla sua dimostrazione la maggiore evidenza, pensò il Riccati d'introdurre le potenze direttamente, invece delle velocità o delle forze, come avevano fatto gli altri. E per rendere meno astratte queste matematiche speculazioni, finse cotali potenze in corde elastiche, come quelle delle cetre, le quali corde, essendo state prima stirate, poi nel contrarsi rapiscono violentemente a sè un corpo, a cui si fossero applicate. Se sia dunque A (fig. 387) un punto mobile, e AS una corda, che con potenza rappresentata da AB lo tira un istante per lo spazio infinitamente piccolo Ap, verrà l'azione di essa potenza rappresentata dal rettangolo AB . Ap, essendo AB, come s'è detto, la forza, e Ap la velocità virtuale.

Ciò premesso, il Riccati raggiunge il suo intento, qual'era di dimostrare che, qualunque sia l'angolo del concorso, il moto per la diagonale uguaglia in potenza il moto per i due lati del parallelogrammo, in virtù di due lemmatiche proposizioni, la prima delle quali è questa: Insieme con AS (nella medesima figura) potente come AB, sia un'altra corda AT, potente come AC, applicate ambedue al punto A, il quale sia costretto a moversi nella direzione AD, quasi ritenutovi dalle sponde di un canaletto o solco inciso sul piano BC: « Se da' punti B, C, nella direzione AD si menino le normali BH, CK, e si tagli HD uguale ad AK, dico che la retta AD rappresenterà la potenza equipollente alle due potenze AB, AC » (*Dialogo delle forze vive*, Bologna 1749, pag. 221, 22).

Figura 387.

S'immagini che, rapito dal concorso delle due corde il punto A, in un primo istante abbia passato lo spazio infinitamente piccolo Aa: col centro S, intervallo Sa, e col centro T, intervallo Ta, descritti gli archetti ap, aq, è manifesto che gli spazioli Ap, Aq misurano i ritiramenti delle corde o le loro velocità virtuali: ond'essendo AB . Ap, AC . Aq le azioni delle potenze AB, AC, e AD . Aa l'azione della potenza AD; s'avrà conclusa la proposizione quando sia dimostrato AB . Ap + AC . Aq = AD . Aa, ciò che poi è d'assai facile conseguenza, imperocchè i triangoli simili ABH, Aap da una parte, e AKD, Aaq dall'altra, danno l'equazioni AB : AH = Aa : Ap, ossia

AH . Aa = AB . Ap, e AC : AK = Aa : Aq, ossia AK . Aa = AC . Aq, d' onde AB . Ap + AC . Aq = Aa (AH + AK) = Aa . AD, la quale uguaglianza, venendo così a dimostrarsi vera, non significa altro, se non che l' azione della potenza AD uguaglia le azioni delle due potenze AB, AC, e però quella potenza a questa verrà ad essere equipollente, come il Riccati s' era proposto di dimostrare.

Nell' altra proposizione, che si diceva essere stata insieme con questa da esso Riccati preparata, per riuscire con facilità all' intenzion principale; si considerano gl' incitamenti, che ha il punto mobile di delirare dal solco, e si conclude che, essendo così fatti incitamenti uguali e contrari, il punto procederebbe liberamente nel suo viaggio. La conclusione ovvia a chi riguardi la contrarietà nelle forze poste in dirittura fra loro, e perpendicolarmente alla linea AD, la trae il Riccati dal suo solito principio che cioè l' azione equivale alla potenza di una corda elastica, d' ond' egli viene a sapere che il punto A allora sarà libero di ubbidire alla sollecitazione delle potenze AB, AC, e di dirigere e contemperare ai loro impulsi il suo moto, quando le BH, CK, prese a rappresentare due forze contrarie perpendicolarmente dirette sulla linea AD, sono uguali. Dopo ciò un solo e breve passo rimane a farsi, per giungere al termine desiderato. Congiungansi con D i punti B, C: i triangoli BHD, AKC rettangoli, e con i cateti uguali, sono uguali, e perciò il quadrilatero BC è un perfetto parallelogrammo. « Questa per l' appunto, dice il Riccati, è la legge ordinaria della composizione e risoluzion delle forze, ed essa è dedotta dal principio dell' egualità tra le azioni delle potenze laterali, e l' azione dell' equipollente: cioè dal principio dell' egualità tra la cagione e l' effetto, tanto è falso che, nella legge della composizione e risoluzion delle forze, cotal principio non si mantenga » (ivi, pag. 225).

Qual efficacia avessero queste nuove dimostrazioni del Riccati e del Bernoulli, in por suggello di verità, e nel dare ordine dimostrativo al Teorema del parallelogrammo, non si saprebbe dir da noi con certezza. Ma è un fatto che il D' Alembert, pochi anni appresso, notava queste cose che trascriviamo, dop' avere distesa di quello stesso Teorema una dimostrazione sua nuova: « La dimonstration qu'on apporte d'ordinaire du Théorème précédent, consiste à imaginer que le point A (nella figura 385 qui poco addietro) se meuve uniformément sur une regle AB avec la vitesse qu'il a reçûe suivant AB, et qu'en même tems la ligne ou regle AB se meuve suivant AC, avec la vitesse que le corps A a reçûe suivant AC. On prouve très-bien dans cette supposition, que le point mobile A décrit la diagonale AD » (*Traité de Dynamiqae,* a Paris 1758, pag. 37).

Si direbbe che il D' Alembert non fece conto delle censure del Bernoulli, se non si ripensasse che, trattando esso D' Alembert della Dinamica sola, trovò le supposizioni fatte dal Varignon, dal Newton e dall' Herman non punto fuori del suo proposito, ond' ei potè senz' altro riguardo aver ragione di dire che da quegli Autori si provavano a quel modo le cose *très-bien.* Ma ascoltiamo quel che ivi soggiunge: « En général la plûpart des démonstrations

communes de cette proposition sont fondées sur ce qu'on regarde les deux puissances suivant AB et AC (nella detta figura) comme agissant sur le corps A, pendant tout le tems de son mouvement, ce qui n'est pas précisément l'etat de la question. Car l'hypothese est que le corps A tend à se mouvoir au premier instant suivant AB et AC à la fois, et l'on demande la direction et la vitesse, qu'il doit avoir en vertu du concours d'action des deux puissances. Dès qu'il a pris une direction moyenne AD, les deux tendances suivant AB et AC n'existent plus: il n'y a plus de réel que sa tendance suivant AD » (pag. 37, 38).

Per prevenir dunque anche questa difficoltà, ne' malcontenti e ne' ritrosi di professare la Meccanica nuova, pensò il D'Alembert di dimostrare che il corpo A prende, in virtù dei moti componenti, sempre la medesima direzione, sia che le due potenze agiscano un istante sopra lui, e poi lo abbandonino, sia che l' accompagnino in tutto il suo viaggio. Ammesse per buone le ragioni di coloro, che dimostravano essere nel secondo caso quella direzione lungo la diagonale del parallelogrammo; per concluder che tale dovesse esser pure anche nel primo, parve a principio al D'Alembert bastasse considerare che, ricevuto il primo impulso, il mobile, anche abbandonato a sè stesso, prosegue nella medesima dirittura, la quale, se era dunque secondo la diagonale nel principio, non devierà da essa nel mezzo e nella fine, o sia breve il tempo o sia lungo.

Poi, essendo questo un teorema così fondamentale della Dinamica, deliberò il d'Alembert di darne una prova diretta, e ricercandola nel subietto, arido per sè stesso e da altri autori sfruttato, gli venne fatto di rinvenirla a giudizio nostro ingegnosa. Era senza dubbio difficile paragonare insieme la resultante con le componenti, se, quando quella incomincia a nascere, queste già non son più, ma fu la difficoltà superata col fare in modo, che il mobile fosse in continuo conato di moversi, eppure si rimanesse in quiete nello spazio assoluto. Nè le condizioni di ciò potevano esser altre, se non che a ogni conato se ne opponesse un altro uguale in grado e in direzione contraria, come se per esempio il punto A (sempre nella medesima figura 385) posato sopra un piano fosse sollecitato a moversi con la direzione, e con la velocità AD, e il piano stesso, con quella medesima velocità, si movesse e con la direzion resultante DA in contrario.

S' immagini dunque il detto punto A sollecitato dai conati instantanei AB, AC, e il piano ABDC, su cui s' immagina posato, moversi con l' assistenza continua delle forze DB, DC, uguali e parallele alle AC, AB, sicchè il detto piano è un parallelogrammo. Si rimarrà dunque A in quiete nello spazio assoluto, ma ciò non potrebb' essere, se al suo conato al moto non si contrapponesse, con uguale velocità e direzione, il moto attuale del piano. Ora questa velocità e questa direzione si tengon dal D'Alembert per benissimo dimostrate dai Matematici, nell' ipotesi fatta da loro che sian misurate e indicate dalla diagonale DA; dunque tanto negli impulsi istantanei, quanto nella continua assistenza delle forze. il viaggio del punto A è il medesimo,

secondo che l'Autore, per prevenire ogni difficoltà, aveva creduto bene di dover dimostrare. « J'ai donc crû devoir prévenir cette difficulté, et faire voir que le chemin du corps A est le même, soit que les deux puissances n'agissent sur lui que dans le premier instant, soit qu'elles agissent continuellement toutes deux à la fois sur le corps. C'est à quoi je crois être parvenu dans la demonstration que j'ai donnée ci-dessus » (pag. 38).

Più tardi, quando la sperimentata efficacia del Teorema in risolvere le più intricate questioni della Meccanica glie ne crebbe la dignità e l'importanza, si credè di doverlo nobilitare, assumendolo alla gloria del nuovo calcolo infinitesimale. Dopo Daniele Bernoulli, che ne dette il primo esempio, il Teorema del parallelogrammo uscì tante volte fuori in quest' abito suntuoso, ch'essendo superfluo, per giudicarne la convenienza, il mostrarlo in tutte le sue comparse, basterà vederlo in quella sola, che è la più magnifica di tutte, nella *Mecanique celeste.*

Siano, dice il Laplace, x e y (fig. 388) due forze ortogonali sollecitanti il punto M, e z la loro resultante, che faccia con x un angolo θ. Dalle date x, y si tratta di determinar θ, e con esso z che ne dipende. Divise le due componenti in quantità infinitamente piccole, cosicchè vadano successivamente crescendo secondo i termini delle serie dx, $2\,dx$, $3\,dx \ldots$, dy, $2\,dy$, $3\,dy \ldots$, è manifesto che l'angolo θ riman sempre il medesimo, e che la resultante cresce nella medesima proporzione, cioè secondo i termini della serie dz, $2\,dz$, $3\,dz \ldots.$ ed è manifesto altresì che, ne' successivi incrementi delle tre forze, le relazioni di x e y a z saranno costantemente date in funzione di θ, e che perciò si avranno le due equazioni $x = z\varphi\,(\theta)$, $y = z\varphi\,(90° - \theta)$.

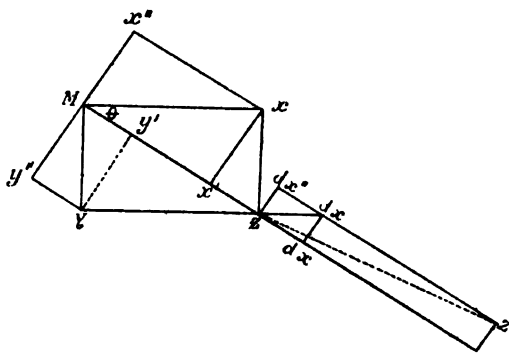



Figura 388.

Riguardando poi la x come la resultante delle due forze ortogonali x', x'', perciocchè quella è sopr' essa resultante inclinata con l'angolo θ, e questa con l'angolo $90° - \theta$; avremo dunque di x', e di x'' due altre equazioni simili a quelle scritte di sopra, cioè $x' = x\varphi\,(\theta) = \frac{x^2}{z}$, $x'' = x\varphi\,(90° - \theta) = \frac{xy}{z}$. Parimente, decomposta la y nelle due ortogonali y, y'', inclinate con gli angoli $90° - \theta$, e θ, sarà $y' = y\varphi\,(90° - \theta) = \frac{y^2}{z}$, $y'' = y\varphi\,(\theta) = \frac{xy}{z}$. Alle due x, y si potranno dunque sostituire le quattro forze x', y'; x'', y''. E perchè le due ultime, oltre a essere uguali, son diretta-

mente contrarie, e l' uguaglianza tra $x'z$ e y' produce tra $x' + y'$, ossia tra $\frac{x^2 + y^2}{z}$ e z, un' altra uguaglianza; dunque $x^2 + y^2 = z^2$. « D'ou il suit, dice il Laplace, que la resultante des deux forces x et y est representée pour la quantité par la diagonale du rectangle, dont les cotes representent ces forces » (*Traité de Mecanique celeste,* a Paris, T. I, an. VII, pag. 5).

Rimane a determinare l' angolo θ, e per far ciò immagina il Laplace che la x cresca della quantità infinitesima dx, rimanendosi l' altra y invariabile. Per maggiore chiarezza di ciò che dice l' Autore, appongasi l' incremento dx non a x direttamente, ma alla sua uguale e parallela yz, e questo incremento infinitesimale di forza così apposto decompongasi ne' due ortogonali dx', dx''. Poi dx' si prolunghi di una quantità uguale a z: è manifesto che le forze sollecitanti il punto M sono le due $z + dx'$, dx'', sopra le quali costruito un rettangolo, la diagonale di lui z' sarà la resultante, che farà l' angolo $dx''z'z = d\theta$, e l' angolo $dx''zz' = 90^\circ - d\theta$. Dunque perchè, omologamente a quel che s' è fatto di sopra, $dx'' = z'\varphi\,(90^\circ - d\theta) = - z'k\,d\theta$ (essendo k una costante arbitraria, e indipendente dall' angolo θ) e anche $dx'' = dx\,\varphi\,(90^\circ - \theta) = \frac{ydx}{z}$; avremo $\frac{ydx}{z} = - z'k\,d\theta$, d'onde, considerando che z' e z, per differire di una quantità infinitesima sono uguali, $d\theta = \frac{-ydy}{kz^2}$. Se poi in questa si cambi x in y, y in x, e θ in $90^\circ - \theta$, avremo per la variazione di y, rimanendosi x costante, $d\theta = \frac{xdy}{kz^2}$, cosicchè, per il simultaneo variar di x e di y, la variazione totale dell' angolo θ sarà $d\theta = \frac{xdy - ydx}{kz^2}$.

Questa ultima integrata rende $\frac{y}{x} = \text{tang.}\,(k\theta + C)$, ossia $y^2 = x^2 \,\text{tang}^2\,(k\theta + C) = z^2 - x^2$, d' onde $x = z\sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2\,(k\theta + C)}} = z\cos\,(k\theta + C)$, nè rimane a far altro che a determinare le due costanti. Se y è zero, evidentemente $z = x$, e $\theta = 0$, nel qual caso l' equazione si riduce a $\cos C = \frac{x}{z} = 1$, d' onde $C = 360^\circ$, che sostituito dà

$$x = z\cos\,(360 + k\theta) = z\cos k\theta.$$

Se invece è zero x, l' uguaglianza tra z e y, e tra θ e 90° che ne resulta, riduce $\cos k\theta = 0$, equazione non esistente se no nel caso che k sia un numero impari (quale si suol esprimere con $2n + 1$) e θ sia uguale θ $90^\circ : 2n + 1$. Ma nella fatta supposizione che x sia nullo evidentemente a deve essere uguale a 90°; dunque, affinchè sia $90^\circ = 90^\circ : 2n + 1$, bisogna che n sia zero, e perciò $k = 1$, il quale valore sostituito riduce finalmente l' integrata equazione alla forma $y = z\cos\theta$. « De là il suit, ne con-

clude il Laplace, que la diagonale du rectangle construit sur les droites qui representent les deux forces x et y, represente non seulement la quantité, mais encore la direction de leur resultante » (ivi, pag. 6).

Abbiamo esposta la dimostrazione non solo agli occhi, ma al giudizio dei nostri Lettori, ai quali sembrerà forse come a noi di trovarci quel difetto capitalissimo, rimproverato da altri al Duchayle, di supporre cioè come noto quel che si proponeva di dimostrare. L'ipotesi non è altro che la conversa della tesi: si vuol concludere che la risultante di due forze ortogonali è la diagonale del rettangolo, e per far ciò si suppone che le componenti siano i lati del rettangolo stesso. È poi vero che dal caso delle forze concorrenti insieme ad angolo retto si può facilmente passare agli altri casi che sia qualunque l'angolo del detto concorso, ma la proposizione del Laplace in ogni modo è particolare, e volendola ridurre alla sua generalità, il calcolo istituito da lui riuscirebbe assai più complicato. Ma rimanendosi pure in quella massima semplicità di differenziali e d'integrazioni, si domanda qual maggiore evidenza e fermezza viene a darsi al Teorema trattato a quel modo, verso l'altra trattazione del Newton, che si spedisce in così poche parole, e per intender le quali basta la notizia della Geometria più elementare?

Si direbbe che è cominciato il tempo, in cui si crederà colla potenza del calcolo di soggiogar l'esperienza e la ragione, ma alcuni Matematici fecero senno, e pensarono che al Teorema del parallelogrammo era avvenuto come agli animali domestici e alle piante, che bene spesso si ammalano per volerle troppo curare. Il Varignon, il Newton e l'Herman, che furono i primi a riconoscere di quel gran Teorema l'importanza, avrebbero senza dubbio saputo darne dimostrazione più elaborata, e al D'Alembert per esempio non mancava del calcolo più sublime nè l'uso nè il senso della potenza: eppure, avvisando nella prefazione alla sua Dinamica i Lettori di aver trattato del principio della composizion delle forze in una maniera nuova, soggiungeva di essersi guardato in essa « de ne pas deduire d'un grand nombre de propositions compliquées un principe qui, étant l'un des premiers de la Mechanique, doit nécessairement être appuyé sur des preuves simples et faciles » (pag. XIII). Di questo medesimo parere fu il Lagrange, ond'è che si ridussero alla primiera semplicità molti autori, fra' quali è particolarmente da commemorare quel Marie, tanto benemerito in Francia e fuori dell'ordinamento delle Matematiche nelle Scuole di que' tempi.

I savi metodi proposti alla gioventù pigliavano autorità dal vederli seguiti anche dai provetti, come dal Prony, il quale, ponendo per fondamento alla sua *Nouvelle architecture hydrauliche* la regola del parallelogrammo, suppone di avere un corpo in quiete posato sopra un piano, che equabilmente si muove. « Cela posé, poi soggiunge, si on conçoit qu'une force quelconque agisse sur lui (cioè sul detto corpo mobile rappresentato da A nella figura 385 qui poco addietro) selon la direction AC, et lui imprime une vitesse telle que dans une unité de temps il puisse parcourir l'espace AC uniformement, on ne peut douter qu'en vertu de cette premiere impression, qui

lui est proprie, il ne doive se trouver au point C, lorsquè cette unité de temps finira. Mais comme en vertu du mouvement du plan la ligne AC s' avance d'un mouvement parallele et uniforme vers BD, et qu'elle doit reellement se confondre avec BD au bout d'une unité de temps; il est clair que le point C se confondra avec le point D » (A Paris 1790, pag. 25). Così da questi medesimi principii, concludendo al medesimo modo che nell' introduzione al primo libro della matematica Filosofia naturale, restituiva il Prony, dopo un secolo ai meritati onori la repudiata semplicità della dimostrazion neutoniana.

Nonostante pensarono alcuni che tanta faccenda dei Matematici intorno al nobile e insigne Teorema non doveva esser riuscita senza frutto, il quale era ben raccogliere sceverato da' bozzacchioni e dalle fronde. Attendendo da una parte a rendere il metodo semplice e facile, e dall' altra a partir da principii evidenti, e non complicati con le idee di moto e di tempo, si chiedeva principalmente e unicamente si concedesse per vero che la resultante divide nel preciso mezzo l' angolo fatto da due componenti uguali. Chi vuol che tutto sia dimostrato pretenderà forse di aver dimostrazione anche di questo, ma chi più saviamente ripensa che un punto di partenza è necessario alla possibilità logica di ogni discorso, non dubiterà di concedere il postulato, dipendente da quell' altro non saputosi ancora negar da nessuno, che cioè la direzion della resultante è media fra la direzion delle due componenti, le quali, se si uguagliano, par dunque evidente che la medietà debba esser perfetta.

Dietro ciò è manifesto che la resultante delle due forze uguali AB, AC (fig. 389) è diretta secondo la AD, diagonale del rombo CB, e nel modo che si dirà ragionando, facilmente si dimostra che alla stessa AD deve essere inoltre la detta resultante uguale: Sia, se è possibile, minore. Divisa tutta la AD in parti uguali, grandi o piccole a piacere, come le D*a*, *ab*, *bc* .... dicasi per esempio che la resultante è A*a*. Si inscrivano nel maggior rombo i rombi EK, FI.... GH: come della A*a* son le componenti AB, AC, così della A*b* saranno AE, AK, e su su procedendo della resultante, che s' è già in A esaurita, rimarranno le componenti AG, AH, ciò che è assurdo. Se poi si dice che la resultante è maggiore di AD, ragionando in simile modo, e sopr' analoga costruzione, giungeremo a un' ultima resultante senza più le componenti, altro assurdo manifesto. Non potendo esser dunque la resultante delle forze uguali AB, AC nè minore nè maggiore di AD, sarà l' AD stessa, e avremo perciò, non solamente la direzione, ma la grandezza altresì di lei rappresentata dalla diagonale del rombo.

Figura 389.

Di qui concluderemo per la conversa che all' unica AD equivalgono le due forze AB, AC, e si potranno all' occorrenza sostituir le une alle altre.

Da questo corollario, e da quel lemma, vien aperta la via alla dimostra-

zione, quando le forze son di differente grandezza, e retto o acuto ne sia l'angolo del concorso. Nel primo caso infatti (fig. 390) che rappresenta il rettangolo AD, in cui son tirate le diagonali AD, BC, e intorno a cui son disegnati i rombi EG, FG; chi cercasse la resultante X delle due componenti date, la troverebbe facilmente osservando che all'una AC equivalgono le due forze AE, AG, e all'altra AB le due AF, AG, onde X = AC + AB = AE + AG + AF + AG. E perchè AE, AF sono uguali e contrarie, e 2 AG = AD, dunque X = AD.

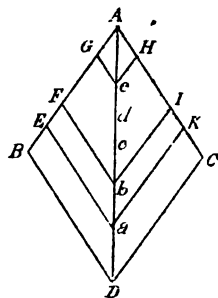
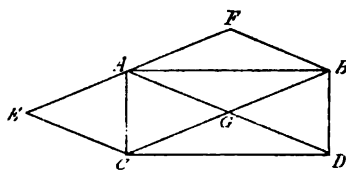



Figura 390.

Se poi l'angolo del concorso è acuto, (fig. 391) e allora, costruiti i rettangoli EF, HG, sarà, per l'applicazione del caso precedente, X = AC + AB = AF + AE + AG + AH. E perchè AE, AH sono uguali e contrarie, e AF = GD, sarà ancora X = AD.

Diventando l'angolo BAC ottuso si giunge anche in questo caso a concludere similmente, dietro una omologa costruzione, e perciò sempre, siano le forze uguali o diverse, e con qualunque angolo concorrenti, la resultante avrà direzione e grandezza proporzionali alla diagonale del parallelogrammo fatto sulle due componenti.

Così conducendo la dimostrazione si soddisfaceva a coloro, che la volevano indipendente da qualunque idea di moto, e dall'altra parte era così semplice e facile, da bastare per la piena intelligenza di lei le prime nozioni della Geometria. Tali essendo le avventure del Teorema, quando, tra il finir del secolo XVII e il cominciar del seguente, s'ingerì nella Meccanica nuova; non ci rimane a dir, secondo il proposito fatto, che del Calcolo infinitesimale, altro massimo efficiente di quel rinnovamento della Scienza.

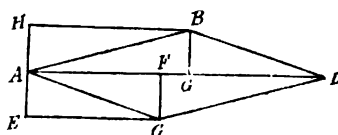



Figura 391.

Come dalle tradizioni antiche di Pappo e di Archimede derivasse, nel nostro Nardi e nel francese Roberval, la dottrina dell'infinito, non è necessario ripeterlo a chi ha letto i fatti da noi narrati in questo stesso Tomo. Sull'esempio offertogli dalla XXI proposizione del IV libro delle Matematiche collezioni anche il Nardi riguardava le superficie come composte d'infiniti rettangoli, e i solidi rotondi d'infiniti cilindri: di rettangoli cioè e di cilindri, le altezze de' quali fossero minime, o indivisibili come dicevasi allora. È notabile la definizione data da esso Nardi di questi indivisibili, dicendo tali precise parole, nella sua Quadratura nuova della parabola, da noi altrove integralmente trascritte dall'originale: *Dividasi la retta AM in parti minime, sicchè, essendo una di loro AD, manchi DM da AM meno di ogni proposta distanza:* notabile si diceva, perchè fa esatto riscontro con i *differenziali* leibniziani.

L' essere delle parti indivisibili componenti le linee, le superficie e i solidi, era definito, a quel modo che Pappo suggeriva al Nardi, anche dal Roberval, il quale così conclude nell' introduzione al suo *Traité des indivisibles:* « Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, et compose la ligne intiere. L'infinité des lignes represente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies represente l'infinité de petites solides, qui composent ensemble le solide total » (*Ouvrages de Matem.* cit., pag. 209),

Benchè il Nardi e il Roberval, non riconoscendo altri Maestri che gli antichi, si potessero compiacere di essere stati i primi a istituire il nuovo metodo degli indivisibili, concessero nonostante generosamente ambedue le prime parti del merito al Cavalieri, il quale si lasciò incautamente uscir di bocca che di punti si compongon le linee, di linee le superficie, e di superficie i solidi. Farebbe maraviglia il trovare, dopo le opposizioni di Galileo, rimasta questa improprietà di linguaggio nel libro della Geometria nuova, se non si ripensasse che non avrebbe creduto mai l'Autore d' incontrarsi in lettori tanto indiscreti, e se forse non avesse temuto, col rifare il libro, di perdere l' opportunità di dedicarlo a que' signori, padroni suoi di Bologna. L' indiscretezza, a cui si accennava, consisteva nell' interpetrare rigidamente che i punti, non aventi nessuna dimensione, potessero generar la linea, e la linea, con una dimensione sola, la superficie che ne ha due, e la superficie il solido, che ne ha tre: del qual rigore indiscreto dava il primo esempio Galileo nell' obiezione famosa, tolta dal considerar l' esaustione della scodella in un circolo, e del cono inscritto in un punto.

Dalle risposte fatte, come si narrò a pag. 123 del Tomo precedente, apparisce chiaro che il Cavalieri negava terminarsi la scodella in un circolo, e il cono in un punto, perchè il punto che genera la linea, e la linea che genera la superficie debbono, secondo le sue definizioni, aver ciascuno una dimensione minima, quella di lunghezza e questa di altezza, cosicchè, venendo a mancare un tal minimo elemento da una parte e dall' altra, l' orlo della scodella non si riduce a un circolo, nè l' apice del cono a un punto, ma ambedue svaniscono, e anche nell' evanescenza perciò sono uguali.

Che tale fosse veramente il concetto del Cavalieri si dichiara da quelle parole scritte in risposta a Galileo, e sopra le quali giova ritornar col pensiero per meditarle: « Al suo dubbio della scodella pareami ancora si potesse risponder così: che nel concetto di tutte le linee d' una figura piana, o di tutti i piani di un corpo, non si debbono, secondo le mie definizioni, intendere le estreme, benchè paiano del medesimo genere, poichè chiamo tutte le linee d' una figura piana le comuni sezioni del piano segante la figura nel moto fatto da esso da un estremo all' altro, o da una tangente infino all' opposta tangente. Ora poi che il principio e termine del moto non è moto, perciò non si debbono computare le estreme tangenti fra tutte le linee, e così non è maraviglia, intendendo lo stesso per i piani ne' solidi, che questi

estremi restino diseguali, come nel suo esempio della scodella » (Campori, *Carteggio gal.* cit., pag. 422, 423).

Ecco in queste parole il metodo degli indivisibili, presentato sotto il medesimo aspetto di quello delle *flussioni,* che il Newton giusto immaginò per evitar le censure fatte al Cavalieri. E perchè l'ultimo termine della flussione è nella evanescenza, come il Newton è sollecito d'avvertire che la infinita piccolezza della quantità non si considera, quando è svanita, perchè allora è nulla, ma nell'atto della evanescenza; così similmente avverte il Cavalieri che il termine del moto non è moto.

Se il Newton, togliendosi dal numero degli indiscreti, indovinava questo consenso, non avrebbe, per parergli troppo dura, rifiutata l'ipotesi degl'indivisibili, come non la rifiutarono il Torricelli e il Cartesio co' loro numerosi e valenti seguaci, i quali non si può credere che fossero di così debole ingegno, da non conoscere che un punto senza alcuna dimensione, non può, nemmeno moltiplicandosi all'infinito, prodursi nella lunghezza di una linea. Del proprio senno supponevano que' valentuomini ne partecipassero anche i loro lettori, nella mente de' quali perciò non sospettarono il dubbio che linee disegnate a intessere una superficie avessero la sola dimensione della lunghezza: benchè quella della larghezza la mettessero così piccola, da non sembrar conveniente il farla apparire, e quasi che col tacerla credessero di significar meglio, e di farne meglio intendere l'incomprensibile piccolezza.

Al Torricelli e al Cartesio si può aggiungere il Roberval, il quale, benchè avesse dal canto suo scansato ogni occasione alle censure, dichiarava quelle fatte al Cavalieri per ingiuste, e le diceva mosse dall'invidia di certi scioli, che si metton fra' piedi a' valentuomini per indugiarne i progressi. La difesa è tanto più eloquente, in quanto che esso Roberval la faceva, dop' aver detto d'essersi già servito degli indivisibili, per risolver non pochi difficilissimi problemi, cinque anni prima che il Cavalieri pubblicasse la sua nuova Geometria. « Illa ergo indivisibilia an ante nos clarissimus Cavalerius invenerit nescio: certe illud scio me integro quinquennio, antequam in lucem emiserit, ea doctrina usum fuisse in solvendis multis iisque plane arduis propositionibus. Attamen ergo tanto viro non eripiam, nec possum, nec si possem faciam.... Est autem inter clarissimi Cavalerii methodum et nostra exigua quaedam differentia. Ille enim cuiusvis superficiei indivisibilia secundum infinitas lineas, solidi autem indivisibia secundum infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique, sed et quidam ex superbis illis sciolis, qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud certe hoc unum satis habent ut in magnorum Virorum opera insurgant, quod a se minime profecta esse invideant; occasionem carpendi Cavalerii arripuerunt, tamquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficiebus revera constare vellet » (*Epist. ad Torricellium,* Ouvrages cit., pag. 367, 68).

Che tra que' geometri volgari e fra quegli scioli superbi intendesse il Roberval di comprendere Galileo, noi non lo crediamo, ma è un fatto che Galileo fu il primo a cogliere in fallacia il Cavalieri, quasi egli avesse vo-

luto dire di fatto che le linee constan di punti, come di linee le superficie, e di superficie i solidi. La zizania, sparsa ne' dialoghi delle due nuove Scienze da quel nimico uomo del Salviati, crebbe in mezzo alla buona sementa del Cavalieri, specialmente per opera del celebre Maclaurin, il quale scrisse contro la Matematica degli infiniti un libro, che il D'Alembert condannò col titolo di malvagio: *mauvais livre contré la certitude de la Geométrie.*

Insorsero contro queste insane calunnie i Matematici, e mentre da una parte ne rimproveravano agramente i colpevoli, si consigliarono dall'altra di levarne ogni ooccasione, con usare una maggiore proprietà di linguaggio, e con definire più precisamente le matematiche ragioni dell'infinito. Un certo Autore, per citar qualche esempio, volle mettersi a commentare l'*Analyse des infiniment petits* del marchese De l'Hopital, e mandò a Giovanni Bernoulli, per averne da lui il giudizio, il suo commentario. Era quell'Autore fra il numero de' congiurati ai danni dell'Analisi infinitesimale, non per deliberato animo, ma per ignoranza, e il Bernoulli, fattegli prima notare certe espressioni, che suonano troppo dure a un orecchio geometrico, seguitava così a dirgli liberamente: « Elles jettent plûtot dans l'erreur, et dans le prejugé, ou on est avant que d'etre Geometre, comme si le corps étoit composé de surfaces, la surface composée de lignes, et la ligne composée de points: prejuge fort difficile à détruire dans les jeunes gens, et qui les empéche de comprendre les démonstrations sur les figures geometriques. Car qu'est-ce qui les trouble d'avantage, que quand ils ne savent pas distinguer, par exemplé, la surface d'avec les lignes qui la terminent? Il ne faudroit donc pas se servir de ces façons de parler, qui noutrissent les prejugés au lieu de les détruire » (*Opera omnia*, T. IV cit., pag. 162).

Il D'Alembert credeva che anche da un'altra parte derivassero i pregiudizi, dal non essersi cioè ben definito il concetto delle quantità infinitamente piccole, le quali, egli diceva, non sono qualche cosa di reale, come dai più si crede, ma una semplice idea di relazione. « Le methode des infiniment petits n'est autre chose que la méthode des raisons premieres et dernieres, c'est-a-dire des rapports des limites des quantités finies. Quand'on a bien conçù l'esprit et les principes de cette Methode, alors il est utile de la mettre en usage pour parvenir à des solutions élégantes » (*Traité de Dynam.* cit., pag. 50).

In questo stato d'incertezze, di ostacoli e di battaglie, quale da questi esempi ci si rappresenta, nel primo quarto e nella prima metà del secolo; era il Calcolo infinitesimale anche nel principio, quando la Meccanica nuova cominciò a chiamarlo in suo aiuto. Il Newton, trovatoselo innanzi con l'abito messogli addosso dal Cavalieri, giudicandolo poco decente, volle da sè rivestirlo di un abito nuovo. « Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minus geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, idest ad limites summarum et rationum de-

ducere, et propterea limitum illorum demonstrationes, qua potui brevitate, praemittere » (*Principia Philos.* cit., L. I, pag. 80, 81).

Il Newton dunque credè di aver migliorato e corretto il metodo degli indivisibili, non riguardando le quantità crescenti per apposizione di parti, ma per un moto continuo, o per un continuo flusso del punto nel generar la linea, della linea nel generare la superficie, della superficie nel generare il solido, e dell'angolo per la rotazione di un lato, dalla qual genesi meccanica è manifesto perchè venisse al metodo il nome delle *flussioni*. Un tal metodo però non è in sostanza diverso da quello del Cavalieri, il quale, come abbiamo veduto e come si potrebbe notar nel suo libro, ripete spesso i nomi di esaustione, di esinanizione e di moto, equivalenti a quelli delle evanescenze, de' limiti, e delle flussioni neutoniane. Forse nel metodo dell'Inglese è più unità di concetto, e più matematica precisione, ma l'avere introdotto l'elemento straniero del moto, che si fa col tempo, il quale ha la sua misura dalla velocità e dallo spazio, fece sì che i processi non si rendessero direttamente applicabili altro che alla Geometria, a cui si limitava la istituzione del Cavalieri. Dentro questi limiti poi veniva a trattenere e a risospingere il metodo riformato il principio dominatore di lui, ch'escludeva le quantità assolute, per considerarne solamente la relazione, tanto è vero che il Newton non insegnò a differenziare altro che equazioni.

In considerar queste cose si troverebbe forse la norma ai giudizi da farsi intorno alle pretese degli Inglesi, per l'invenzione del Calcolo infinitesimale. Ma lasciando le dispute altrui, per passare ai fatti nostri, esaminiamo qual uso facesse di quel Calcolo il Newton, e quali vantaggi ne ritraesse per dimostrare que' suoi sublimi teoremi di Meccanica nuova: e dall'esame resulterà confermato che i vantaggi venuti dallo strumento rifatto erano quelli stessi che i precedenti Matematici avevano avuto dall'originale. Anzi, chi paragoni co' trattati robervalliani della Cicloide, e con quegli altri torricelliani delle seconde quadrature delle parabole e dei baricentri, le proposizioni scritte nel primo libro dei Principii di Filosofia naturale, non esita a decider che la Matematica piglia più agile, più largo e più robusto il volo là per gl'indivisibili, che qua per le flussioni.

I Tedeschi hanno senza dubbio maggior merito nell'invenzione, ma anch'essi nel pretenderlo sembran troppo dimentichi de' benefizi ricevuti dalle prime tradizioni. Ascoltiamo il Leibniz: « L'analyse des infinis est intierement differente de la Geometrie des indivisibles de Cavalieri, et de l'Arithmetique des infinis de M. Wallis. Car cette Geometrie de Cavalieri, qui est tres-bornie d'ailleurs, est attachée aux figures, ou elle cherché les sommes des ordonnées; et M. Wallis pour faciliter cette recherche nous donné par induction les sommes de certains rangs de nombres; au lieu que l'analyse nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en general, comme fait la spacieuse ordinaire » (*Opera omnia,* T. III, Genevae 1768, pag. 260, 61).

Più proprio è far tra la Geometria del Cavalieri e l'Analisi infinitesi-

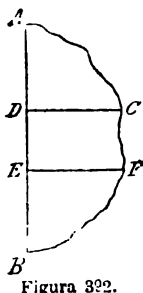
male la differenza, che è tra la fanciullezza e la virilità, rimanendo sempre medesima la persona. E come di questa medesimezza potrebb' essere una prova l' abito che sta bene addosso nelle due varie età, solamente a ridurne le proporzioni del taglio; così sarebbe prova dell' identità de' due metodi l' adattarsi proporzionatamente agl' indivisibili le fogge stesse dei differenziali. La prova fu fatta dall' Herman sul teorema centrobarico del Guldino, premessovi per lemma il teorema ugeniano che cioè la somma de' momenti di più corpi divisi equivale al momento unico di essi corpi insieme, dal loro comun centro di gravità ponderanti.

Quanto da quel lemma derivasse facilità nelle dimostrazioni che il Nardi, il Cavalieri e il Torricelli dettero della Regola guldiniana, si può comprendere dal confrontare que' loro lunghi e laboriosi discorsi con questo, che si spedisce così in due parole: Sia AB (fig. 392) l' asse, intorno a cui si rivolge la figura ACFB, per generare il solido rotondo, che s' affalda de' circoli descritti dai raggi DC, EF, o di tutti gli altri infiniti: cosicchè, chiamato quel solido S; sarà $S = \pi (DC^2 + EF^2 \ldots) = 2\pi (DC \cdot \frac{DC}{2} + EF \cdot \frac{EF}{2} \ldots)$. Ma le quantità dentro parentesi son la somma de' momenti delle infinite linee ponderose, che s' immaginano concentrate nel loro mezzo, i quali momenti sono uguali, pel Teorema ugeniano, al momento che resulta dal moltiplicar le dette infinite linee ponderose, ossia la figura F, per la distanza D del suo centro di gravità dall' asse; dunque $S = 2\pi D \cdot F$, come per la regola del Guldino.

Figura 392.

Al corollario, che immediatamente deriva da questa proposizione, e che dice stare i solidi rotondi in ragion composta delle figure genitrici, e delle distanze de' loro centri di gravità, o delle circonferenze da esse distanze, come raggi, descritte intorno all' asse della rotazione; si giungerebbe, per la medesima via brevissima, dal teorema del Rocca, secondo il quale i solidi S, S′ stanno come i momenti delle figure F, F′ (Torricelli, *Op. Geom.* cit., P. II, pag. 76). Ma questi momenti sono, secondo il detto Teorema ugeniano, uguali al prodotto di quelle stesse figure, e delle distanze D, D′ de' loro centri di gravità dall' asse; dunque $S : S' = D \cdot F : D' \cdot F' = 2\pi D \cdot F : 2\pi D' \cdot F'$.

L' Herman sostituì, come il Nardi e il Roberval, alle linee genitrici dei circoli i rettangoli generatori dei cilindri, le lunghezze de' quali rettangoli chiama y, e le altezze dx, essendo x l' asse, cosicchè la figura F, che resulta dalla somma di cotesti infiniti rettangoli, verrà data da $\int y dx$. Essendo poi la somma degli infiniti momenti de' rettangoli ponderosi $\int {}^1/_2\, y^2\, dy$, dunque, chiamata D la distanza del centro di gravità della figura dall' asse, sarà $D \cdot \int y dx = D \cdot F = \int {}^1/_2\, y^2\, dx$, ossia $2\pi D \cdot F = \int \pi y^2\, dx$. Ma questa significa la somma degl' infiniti cilindri, che compongono il solido rotondo, ossia lo stesso solido rotondo S; dunque $S = 2\pi D \cdot P$. « Figura genitrix dicatur F, distantia centri eius gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figu-

rae y ad axem rotationis, dx elementum axis, solidum, ex conversione figurae F circa axem x, dicatur S, eius elementum dS. Quibus positis, per praesentem propositionem, erit D . F aequale summae momentorum elementorum magnitudinis $F = \int {}^1/_2\, yydx$, nam elementum ipsius F est ydx, et huius momentum $^1/_2\, yydx$. Sit p circumferentia circuli, cuius radius est I, et ducatur antecedens aequatio in p, ut fiat $p\,D\,.\,F = \int {}^1/_2\, pyydx$. Iam pD est circumferentia radii D, et py circumferentia radii y, atque adeo. $^1/_2\, pyy$ area circuli eiusdem radii y, et per cousequens $^1/_2\, pyydx$ cylindrulus solido S inscriptus, seu eius elementum dS. Ergo $p\,D\,.\,F = \int dS = S$, quod erat ostendendum (*Phoron.* cit., pag. 15).

Il libro, in cui si dava questa dimostrazione, era dedicato al Leibniz, in quel tempo che più calorosamente i connazionali di lui agitavano la questione con i connazionali del Newton, intorno a chi si dovesse de' due grandi uomini dir primo inventore del Calcolo infinitesimale. L' Herman volle forse insinuare che l' invenzione era più antica, e che, essendo stata già fatta, non era maraviglia che per opera del Newton e del Leibniz, l' uno inconsapevole dell' altro, avesse nel medesimo tempo presa un' educazione diversa. Se non fu questa l' intenzione dell' Herman difficilmente si spiegherebbe com' egli integrasse gli elementi delle figure genitrici de' solidi rotondi, riguardando le ordinate y come tutte invariabili, ciò che renderebbe dimostrativa la proposizione solamente nel caso che il solido generato dalla figura fosse un cilindro: e dall' altra parte si vedeva impossibile l' integrare le dette ordinate, variabili senz' alcuna legge, come nelle figure irregolari. Il solo pensiero di queste variabili, che in un medesimo termine possono esser più d' una, e le regole ritrovate per differenziarle e integrarle nelle serie ordinate, bastava per far comprendere quanto avesse progredito l' Analisi nuova sopra il Metodo degl' indivisibili, e perciò l' Herman, nello Scolio all' XI proposizione, si contenta di dare un' idea della istituzion leibniziana con qualche esempio, accennando come quella stessa ardua istituzione dipendeva dal seguente principio semplicissimo, e che parrebbe a primo aspetto di nessun uso: « Si fuerint quotcumque decrescentes magnitudines A, B, C, D, F, erunt omnium differentiae simul sumptae aequales excessui maximae supra minimam » (*Phoron.* cit., pag. 37).

L' intenzione di scrivere, non per i Geometri provetti ma per i giovani principianti, al genio de' quali più che le algebriche par che s' addicano le dimostrazioni lineari, fu cagione che l' Herman così sobriamente usasse il Calcolo infinitesimale, e questo con metodi, che s' avvicinavano in qualche modo ai geometrici del Cavalieri. L' uso esteso, continuo e sicuro di quello stesso Calcolo, che parve essere divenuto la ruota maestra del carro, incominciò a farsi da' successori, i progressi de' quali, che ora ci rimangono a esaminare, si rassomigliavano al moto del sangue nelle arterie, che succede a quel delle vene, raccolto e vivificato, come nel ventricolo del cuore, nella Foronomia del Matematico di Basilea.

IV.

Nel 1736 usciva in Pietroburgo alla luce, dalla tipografia dell'Accademia delle Scienze, un' Opera in due tomi, nel titolo de' quali prometteva l'Autore che s' esporrebbe la Meccanica in una maniera affatto nuova. *Mechanica, sive motus scientia, analytice exposita, auctore Leonhardo Eulero.* In che consista la novità promessa lo scopre facilmente il Lettore, il quale non aveva avuto fin allora tra mano che il Newton e l' Herman, a solamente svolgere le nuove pagine, così magre di parole e tutte infarcite de' segni proprii all' analisi algebrica, ma principalmente alla infinitesimale. In vent' anni s' è fatto un gran cambiamento d' idee intorno al modo più conveniente di trattare la Scienza. L' Herman avvertiva, nella prefazione alla Foronomia, di aver seguito il metodo geometrico, perchè col benefizio di lui *multa elegantius obtinentur, quam calculis analyticis,* mentre l' Eulero professava che senza i calcoli analitici è impossibile affatto aver delle proprietà del moto chiara cognizione e distinta. Ascoltiamo le sue proprie parole, scritte nella prefazione, subito dop' aver commemorati l' Herman e il Newton, ne' libri de' quali diceva non si trovar la Meccanica se non che sinteticamente trattata col metodo degli antichi. « Sed quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum Mechanicis obtingit ut lector, etiamsi de veritate eorum quae proferuntur convincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum coguitionem assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur, proprio marte vix resolvere valeat, nisi ipse in analysim inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evolvat. »

Per verità l' esperienza fatta sopra noi stessi sembrerebbe che provasse tutto il contrario. Abbiamo anche noi da giovani imparato la Meccanica *analytice exposita:* eppure dobbiamo ingenuamente confessare di non esserci fatta un' idea chiara delle particolari proprietà dei moti, se non da poi che le vedemmo dimostrate ne' libri del Torricelli, dell' Huyghens, del Newton, dell' Herman, con i sintetici metodi antichi. I moderni pedagogisti poi confermano che questo s' è confessato da noi avviene in tutti gli altri per legge di natura, dietro l'osservazione, dalla quale stabiliscono per regola doversi la mente dell' alunno dai particolari far risalire alla notizia degli universali. Tale anzi è il processo della mente umana nell' acquisto di qualunque genere di cognizioni, come questa nostra, e ogni altra storia delle Scienze chiaramente ci dimostra.

Dalle sensate osservazioni, e non già da' sistemi de' Filosofi, si scopre questo esser vero: che cioè nell' universale, incompreso ancora e incosciente, vediamo i particolari, i quali poi ci fanno per riflessione risalire a comprendere, e ad aver chiara e distinta scienza dell' universale. Nello spazio etereo, fuor d' ogni vista degli oggetti terreni, l' occhio è in mezzo ai raggi del sole,

eppure ei non se ne avvede, e non s' avvede della presenza del solo stesso, se non che quando riflette que' suoi raggi da qualche parte, tanto più facendone la rivelazion luminosa, quanto è più largo e costipato il campo delle riflessioni. I particolari perciò non formano la vera scienza, la quale consiste nel veder com' essi dipendano da quell' universale, che per mezzo loro s' è saputo riconoscere, e s' è potuto contemplare.

Par che volesse intendere ciò l' Euler, quando diceva che non si possono risolvere le questioni meccaniche, se co' metodi analitici la mente non le svolge. La notizia de' vari teoremi spicciolati non fa il Matematico, come la notizia de' vari individui, o animali o piante o minerali, non fa il Naturalista. Osservano diligentemente gli studiosi della Natura in quali caratteri convengano più individui, e ne forman le specie, i generi e le classi, in che riconoscono poi le particolari proprietà degl' individui stessi. E come, senza aver fatto prima questo ordinamento, al veder qualche nuovo organo accidentalmente sopravvenuto in una pianta, non saprebbe il Botanico più qualificarla; così, dice l' Eulero, se un tantin si rimovano le condizioni a un problema, la mente nel risolverlo si trova impacciata.

Questo discorso però non sembra che si possa giustamente applicare al Newton e all' Herman, i quali sempre ebbero per principale intento di risalire alle generalità, dalle quali le particolari questioni, trattate da Galileo e dall' Huyghens, si facevano scendere, come semplici corollari. Si direbbe che l' Eulero facesse essenzialmente consistere il metodo analitico nel calcolo, confondendo l' opera con lo strumento. Se sia giusta l' accusa contro un tant'uomo, forse molti ne dubiteranno, ma è un fatto che, dopo lui, tanto s' incominciò ad esagerare la potenza del calcolo, da farlo prevalere al raziocinio e all' esperienza. Gli esageratori però sempre hanno male interpetrate le parole, che citano con grand' enfasi dallo stesso Eulero: ***quidquid autem sit, hic calculo potius quam nostro iudicio est fidendum,*** e la mala interpetrazione consiste nel farle così sonare fuori del loro contesto, e contro l' intenzion dell' Autore. Chi legge il passo intero, com' è scritto nel primo tomo della Meccanica analitica, al secondo Scolio dopo la XXXV proposizione, trova esser diversa, e più con la verità conforme, la sentenza. Si propone ivi l' Autore di trovare la velocità in ogni punto del viaggio di un corpo, attratto con qualunque ragion di forze al suo centro, e il calcolo porta che, giunto il mobile in esso centro con velocità infinita, non può proseguire oltre nella medesima direzione. La conseguenza sembra senza dubbio, dice l' Eulero, assai strana, ma comunque sia, poi soggiunge, « ***hic calculo potius quam nostro iudicio est fidendum, atque statuendum nos saltum, si sit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere*** » (pag. 108).

La sentenza dunque euleriana non è assoluta, ma da pronunziarsi solamente colà, dove si tratti di un trapasso dal finito all' infinito, che per noi è incomprensibile. Ma come, si dirà, è incomprensibile l' infinito matematico all' ingegno dell' uomo, se egli è che lo crea? Si risponde che non si tratta dell' infinito in sè stesso, ma del giudizio che si fa di lui, trapassando alle

cose finite. Noi non siamo avvezzi a vedere i corpi cadere, che per uno spazio determinato, e giunto a un termine, con una certa velocità, non si dubita se, non essendo impedito, proseguirebbe oltre nella medesima direzione il suo viaggio. Ciò che avverrebbe però, quando quella velocità fosse infinita, non si può, dice l'Eulero, giudicare da noi, che non abbiamo veduto mai andare un corpo con velocità infinita. Il mondo creato dal calcolo è molto diverso da questo mondo reale, e si governa con altre leggi, che il calcolo solo, avendole create, ha il diritto d'interpetrare. Ecco in quali casi esso calcolo prevale all'esperienza nostra e al nostro giudizio! onde il fallo di molti consiste nell'aver dato all'Analisi la medesima potenza sopra le quantità algebriche, e sopra le infinitesimali; e nell'aver creduto che risegga in essa la virtù di partecipare la verità a tutti i nostri discorsi. Se fu l'Euler che pose il lubrico di cadere in queste fallacie, si deve dir però che cautamente trattenne sull'orlo il piede, benchè anch'egli s'illuse, credendo che le soluzioni generali de' vari problemi di Meccanica, ottenute per via dell'analisi, equivalessero alla generalità di quei principii, che, premostrati da lui, si volsero a ricercare i suoi successori.

Stava infatti da alquanti anni sollevato innanzi all'ammirazione de' Matematici questo grande edifizio della Meccanica euleriana, e nonostante il D'Alembert lamentava che si fosse pensato piuttosto a sollevare il fastigio della gran mole, che a dare al fondamento di lei la stabilità conveniente. I principii, ne' quali consiste un tal fondamento, sono, diceva « *ou obseurs par eux-memes, ou énoncés et démonstrés d'une maniere obscure* » (*Traité de Dinam. cit., Discours prelim.*, pag. IV). È necessario perciò, soggiungeva, stabilire la scienza sopra principii semplici e chiari. Ma se ciò solo basterebbe a chi volesse confermare i teoremi della Meccanica, fin qui dimostrati, non basta però a chi attenda insieme a provvedere ai progressi di lei, e perciò vogliono que' principii inoltre essere scelti tali, da accomodarsi ai nuovi usi, e rifiutar quelli, che inutilmente vi si fossero introdotti.

Ai tempi del D'Alembert, cioè verso la metà del secolo XVIII, non s'era ancora ricomposta con pace una gran questione, incominciata fra i Matematici a' principii del secolo, intorno alle ragioni del misurare le forze, che distinguevano in *morte* e *vive:* questione, alla quale si dava grande importanza, ma che lo stesso D'Alembert riponeva nel numero delle altre cose inutili alla Meccanica. « *La question de la mesure des forces est intierement inutile à la Méchanique, et même sans aucun obiet réel* » (ivi, pag. XXIV). La sentenza in conclusione è giusta, ma perchè tale non potrebbe apparire a chi così asciuttamente se l'udisse pronunziare, giova ridursi alla memoria il commento storico, relativo alle forze vive, e alla più giusta ragione del misurarle.

Ripensando il Leibniz alle contrarietà, alle quali era andata soggetta la verissima teoria ugeniana del centro delle oscillazioni, scoprì che dipendevano da una fallacia de' contradittori, la quale consisteva nel misurare per la quantità di moto il grado e l'intensità di qualunque forza. Ma altro è,

diceva, la forza, che opera con semplice conato, come nella libbra, altro è la forza, che produce un moto attuale, come nella percossa di un cadente da maggiore o minore altezza. Concedasi, soggiungeva il Leibniz, che in ambedue i casi la quantità di moto, ossia la forza, sia misurata dal prodotto della massa per lo spazio passato, ma perchè nella libbra, dove la forza è morta, esso spazio sta come la velocità, e nel cadente, dove la forza è viva, sta come il quadrato della velocità; dunque è falso che dal prodotto della massa per la velocità si possa, come alcuni fanno, misurare allo stesso modo la forza morta e la viva. Il principio cartesiano perciò, che tanta forza ci vuole a sollevare un peso di una libbra a due gradi di altezza, quanto a sollevare a un grado solo il peso di due libbre, non vale che per le macchine in equilibrio. Ma negli altri casi, diceva il Leibniz, essendo una verità già dimostrata da Galileo, e confermata dall' Huyghens, *Corpus cadens ex certa altitudine acquirere vim eousque rursus assurgendi, uti in pendulorum motu evidens est;* la vera regola, da sostituirsi alla cartesiana, è questa: *Tanta vi aptus est ad elevandum corpus A unius librae ad altitudinem quatuor ulnarum, quanta opus est ad elevandum corpus B quatuor librarum usque ad altitudinem unius ulnae.*

Annunziava serenamente il Leibniz agli amatori della verità queste cose, negli atti degli Eruditi di Lipsia del mese di Marzo 1686. Ma quel Catelan, oppositore dell' Huyghens, che vedeva così essere sottilmente scoperta l' origine delle sue fallacie, fieramente se ne risentì, e si risentì insieme con lui Dionigi Papin, appartenente alla setta dei Cartesiani. Si conosceva bene che in ambedue i fumi dell' orgoglio eran saliti a far velo al giudizio, e perchè il Leibniz, vedendo scendere così chiara la conclusione dai premessi principii, non s' era dato troppa cura di confermarla con altri argomenti, vi s' applicò sollecitamente Giov. Bernoulli, dimostrando che se un corpo, con un grado di velocità, tende un elastro, con due gradi ne tende quattro, con tre nove, e così di seguito, d' onde ne concludeva *vires corporum aequalium esse in duplicata ratione celeritatum,* come comunicò per lettera al Wolf, il quale, nel secondo tomo degli Elementi di Matematica universale, pubblicò la nuova bernulliana dimostrazione. (Genevae 1746, pag. 62).

Il Leibniz intanto era entrato nell' agone a difendersi contro i suoi nemici, e specialmente contro il Papin, a cui raccomandava di meditar meglio come stavan le cose. Prese di questo modo di procedere tanta maraviglia il nostro Poleni, che volle consigliare lo stesso Leibniz d' usar co' caparbi non parole ma fatti. Se i quadrati delle velocità son la vera misura delle forze vive debbono, diceva, mostrarcelo le esperienze, e ripensando al miglior modo di farle, trovò questo, che poi descrisse nel suo libro *De Castellis,* pubblicato in Padova nel 1718. Prese un vaso pieno di sego rappreso, sulla piana superficie del quale fece, da due fili, pender due globi di ugual volume, ma l' uno peso il doppio dell' altro, e così disposti, che il più leggiero rimanesse dal sego stesso distante il doppio. Tagliate le sospensure, i globi caddero, e scavarono nella cedente materia sottoposta due callotte, che si trovarono

uguali. Ripetuta l' esperienza più volte, col variare i pesi e le altezze delle cadute, dietro la costanza de' resultati ottenuti credè il Poleni doversi concludere in generale: « Tunc aequales vires corporum cadentium esse, cum ipsorum propria pondera rationem habent reciprocam eius, quam habent spatia ab iisdem corporibus cadendo emensa » (pag. 57). Cosicchè, chiamate F, f le forze, P, p i pesi, e A, a le altezze, le quali stanno come i quadrati delle velocità V, v; l' equazione $F : f = PV^2 : pv^2$, che resulta dalla esperienza, conferma pienamente la teoria leibniziana.

Piacque allo 's Gravesande così la bella e nuova esperienza del Poleni, che costruì per ripeterla quello strumento di precisione, ch' ei descrisse nel capitolo terzo del secondo libro de' suoi Elementi di fisica matematica, sotto il titolo di « Machina, qua corporum directe cadentium vires conferuntur » (*Physices elem. mathem.*, T. I, Leidae 1748, pag. 235). Consisteva in una cassetta parallelepipeda di legno, piena rasa fino all' orlo di molle argilla, sugli angoli della quale cassetta quattro ritti formavano come due spalliere di seggiola, sulle traverse delle quali, poste a uguali distanze, s' appoggiavano regoli per sostenere i pesi, d' onde poi si lasciavan cadere, penetrando nella sottoposta mollizie più o meno, secondo il maggiore o minor impeto delle cadute. Que' pesi constavano di tre globi di rame d' un pollice e mezzo di diametro ciascuno, composti di emisferi, che si ricongiungano a vite, ma le loro diverse gravità stanno come uno, due, e tre. Eseguitasi più volte l' esperienza, da altezze diverse, resultò in generale, come al Poleni, che le cavità non differivano, « quando altitudines sunt inverse ut massae, in quo casu vires sunt aequales » (ibid., pag. 237).

Vincenzo Riccati ridusse all' analisi matematica queste esperienze dello 's Gravesande e del Poleni. Si chiamino m, M le masse, c, C le celerità iniziali degli scavamenti: r, R le resistenze della materia molle, o argila, o sego; n, N le profondità delle fosse scavate. Dalle note formole $m\phi ds = mudu$, $M\phi dS = MVdV$, osservando che $m\phi = -rn$, $M\phi = -R \,.\, N$, per essere le forze delle resistenze ritardatrici, avremo $rnds = -mudu$, $RNdS = -MVdV$, le quali integrate danno

$$rns = -m\left(\frac{u^2}{2} + P\right),\ RNS = -M\left(\frac{V^2}{2} + Q\right).$$

Per determinare le costanti P, Q osserviamo che, quando u, V sono uguali a c, C, le quantità s, S divengono zero, e perciò $rns = \frac{mc^2 - mu^2}{2}$, $RNS = \frac{MC^2 - MV^2}{2}$. Ma quando u, V sono zero, s, S tornano uguali a uno; dunque $rn : RN = mc^2 : MC^2$. « Ecco pertanto, ne conclude il Riccati, che la profondità delle fosse per la costante resistenza moltiplicata, che altro non è se non l' effetto che si vede e che si tocca con mano, riesce proporzionale alla massa, e al quadrato della velocità » (*Dialogo delle forze vive* cit., pag. 49).

Tutto questo faticar dunque di speculazioni, d' esperienze e di calcoli, di

cui i citati da noi non son che pochissimi esempi, diceva il D'Alembert non ebbe altro scopo che di risolvere una question di parole, e perciò affatto inutile alla Meccanica, per le seguenti ragioni: Chi misura l'intensità di una forza dalla velocità, che imprime in un corpo, mette in considerazione piuttosto l'effetto che l'intrinseca causa, essendo chiaro che quel corpo va più o meno veloce, secondo il maggiore o minor numero degli ostacoli, che incontra nel suo viaggio. Ora questi ostacoli possono essere o insuperabili affatto, o tali che facciano la resistenza precisamente necessaria ad arrestare per un momento il moto, come nel caso dell' equilibrio, o tali finalmente. da impedire al mobile il corso a poco a poco, come ne' moti ritardati. I primi dei detti ostacoli è chiaro che non possono servire a misurare la forza, che da essi stessi è distrutta, ma quanto agli altri, « tout le monde, dice il D'Alembert, convient qu'il y a équilibre entre doux corps, quand les produits de leurs masses par leurs vitesses virtuelles, c'est-à-dire par les vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir, sont égaux de part et d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vitesse, ou, ce qui est la même chôse, la quantité de mouvement, peut représenter la force. Tout le mond convient aussi que dans le mouvement retardé le nombre des obstacles vaincus est comme le quarré de la vitesse.... d'ou les partisans des forces vives concluent que la force des corps, qui se meuvent actuellement, est en général comme le produit de la masse par le quarré de la vitesse » (pag. XX). A che disputar dunque di cose, dice il D'Alembert, di cui tutto il mondo conviene?

La conclusione in sostanza è giusta, e tutti que' valentuomini, che intorno al misurar le forze esercitarono l'ingegno e la mano, avrebbero fatto cosa inutile davvero, quando, essendo tutti i Matematici concordi nell'ammettere i principii, avessero anche ugualmente concordato nella logica delle conseguenze. Ma perchè non avvenne così, ecco qual si fu la ragione, il merito e l'utilità del disputare. Che del resto, ne' precisi termini del D'Alembert, aveva alquanti anni prima ridotta la questione il Wolf, il quale, in due distinti teoremi, che sono il XXXVI e il XLIX degli elementi di Meccanica, nel citato secondo tomo della Matematica universale, aveva dimostrato che le forze morte e le vive stanno in ragion composta delle masse, e delle semplici velocità quelle, ma de' quadrati delle velocità queste, concludendo che facevano le dimostrate verità contro coloro « qui promiscue vires omnes in ratione composita massarum et velocitatum esse statuunt » (pag. 61): errore, soggiungeva, che fu primo il Leibniz a scoprire e ad emendare.

Se poi sia vero quel che dice il D'Alembert, che cioè per questo fatto esso Leibniz « a cru pouvoir se faire honneur comme d'une découverte » (pag. XVII) non possiamo dir niente, ma sappiamo di certissimo che la scoperta era stata fatta da più di un mezzo secolo in Italia. Il primo infatti a commettere l'errore di misurar promiscuamente, con una medesima regola, le forze morte e le vive, fu Galileo, seguito poi dal Viviani, quando intesero ambedue concordi d'assegnar la proporzione tra gli effetti de' pesi morti e

delle percosse: errore, che non fu scoperto nè emendato dal Leibniz, ma dal Borelli, il quale osservò che le semplici gravità e gl' impeti son due cose di genere diverso, come di genere diverso, e perciò non comparabili insieme, sono i moti uniformi e gli accelerati (*De vi percuss.*, Cap. XXXIII). Più decisiva era stata la questione rispetto ai liquidi, le velocità de' quali nel fluire da' vasi erano da Galileo e dal Castelli misurate proporzionalmente alle altezze morte, ma il Torricelli dimostrò che dovevano essere invece proporzionali alle radici delle altezze vive. È notabile a questo proposito un teorema dell' Herman, in cui stare gl' impeti de' liquidi erompenti dai fori in ragion composta delle moli e de' quadrati delle velocità si conclude dalla nota proposizion del Castelli, che le quantità son proporzionali alle velocità moltiplicate per le sezioni. Or perchè gl' impeti son misurati dal prodotto delle quantità per le velocità respettive, è manifesto che stanno in ragion composta delle sezioni, ossia delle moli liquide in esse comprese, e de' quadrati delle velocità. Più notabile poi è che di questo si serva l' Herman, per dimostrare il principio idrodinamico del Torricelli, che cioè gl' impeti degli zampilli stanno come le radici delle altezze vive.

Così fatte questioni, che ritorneranno nella Storia dell' Idrodinamica, non furono certamente di semplici parole, e intesero i savi che non si sarebbero potute altrimenti risolvere, che per via delle esperienze, come intese il Poleni di risolvere, a quello stesso modo, la question delle forze vive. Ma forse il D' Alembert prese di qui occasione a riputare inutile le dispute tra il Leibniz e il Papin, perchè la contingenza de' principii, d' onde movevasi da una parte e dall' altra, « ruineroit la certitude de la Méchanique, et la reduiroit à n'etre plus qu'une science experimentale » (pag. XII). E perchè il principale intento dell' Autore era quello di ridur la Meccanica stessa a una scienza puramente razionale, e perciò volle che i principii, posti a lei per fondamento, fossero tutti di verità necessarie, e non contingenti.

L' Eulero aveva creduto di sollevare la Scienza a quella dignità, fra gli altri argomenti estrinseci, col riguardare i corpi come ridotti a punti materiali, e in fatti chi bene osserva le astratte proprietà meccaniche degli urti e delle riflessioni non si verificano esattamente che ne' globuli della luce, e gli stessi teoremi più fondamentali, come quello del piano inclinato, non sono in ogni loro parte applicabili, che ai semplici punti ponderosi. Le censure e i vaniloqui del Marchetti, e di altri, non si sarebbero potuti evitare altrimenti, perchè il corpo che ha sensibili dimensioni o rotola o scivola, secondo che la perpendicolare, abbassata dal suo centro di gravità, cade dentro la base o fuori; e ruzzolando e scivolando non serba secondo la teoria la costante ragione esatta del suo proprio momento. Il D' Alembert dunque, che non parve contentarsi del fatto dall' Eulero, volle rendere la Meccanica una scienza puramente razionale, costituendola sul fondamento di tre principii, reputati da lui semplici e di verità necessaria, quali sarebbero la forza d' inerzia, la composizione dei moti, e l' equilibrio che si fanno insieme due corpi, di masse uguali, e d' uguali velocità virtuali e contrarie. « Le principe de

l' equilibre, joint à ceux de la force d'inertie, et du mouvement composé, nous conduit à la solution de tous les problemes, ou l'on considere le mouvement d'un corps » (pag. XV).

Che, ne' principii dell' inerzia e della composizion delle forze, possa avere i suoi fondamenti la Dinamica, si comprende con facilità, ripensando che per via di quello ritrovò Galileo le leggi della caduta de' gravi, e per via di questo ebbero i Matematici in mano il filo di Arianna, per non smarrirsi ne' meccanici laberinti. Più difficile, anzi quasi impossibile sembrava l' altro assunto del D'Alembert, di derivar cioè dalla quiete le leggi universali del moto. La difficoltà nondimeno può solo sulla mente di coloro, i quali riguardano nella quiete il moto come estinto, mentre in verità non è che contrariato. Il pensiero profondo del Borelli trovò la sua più splendida applicazione nel metodo di ritrovare il centro oscillatorio secondo Giacomo Bernoulli, il quale, considerando essere le parti componenti il pendolo alcune più ritardate e altre più velocitate, che se oscillassero con libertà dal medesimo punto, le une indipendenti dalle altre; vide che il problema si riduceva alle condizioni dell' equilibrio nella leva. Il D' Alembert poi rese generale il metodo bernoulliano, applicandolo a ritrovare la resultante del moto in più corpi, che agiscono comunque gli uni sopra gli altri, e concludendolo in una regola così espressa: « Décomposes les mouvemens A, B, C..., imprimés a chaque corps, chacun en deux autres $a, a', b, b', c, c' \ldots$; qui soient tels que, si l'on n'eùt imprimé aux corps que les mouvemens $a, b, c \ldots$, ils eussent pù conserver ces mouvemens sans se nuire reciproquement, et que, si on ne leur eùt imprimé que les mouvémens $a', b', c' \ldots$, le systeme fùt demeure en repos. Il est clair que $a, b, c \ldots$ seront les mouvemens, que ces corps prendront en vertu de leur action » (pag. 74, 75).

Così tutte le leggi del moto venivano a ridursi a quelle dell' equilibrio de' corpi. La Statica e la Dinamica, che parevano contenere in sè una contradizion naturale, si unirono per opera del D' Alembert a comporre insieme una scienza sola, cosicchè le distinzioni, così utilmente introdotte dall' Herman, non rimasero che di nome.

Ripensando alle cose fin qui discorse concluderemo che all' analisi aveva l' Eulero educato la Meccanica, più co' calcoli che coi principii; il D'Alembert più coi principii che con i calcoli; ma il Lagrange congiunse insieme e contemperò così bene le due virtù, che la Meccanica analitica si può dire giungesse finalmente per lui alla sua perfezione. Ei lo sente e se ne compiace, infin dalle prime parole premesse all' opera, facendovi notar come cosa nuova che il metodo proseguito da lui l' ha dispensato dall' usar le figure illustrative, cosicchè il trattato procede ne' ragionamenti geometrici o meccanici, solamente con operazioni algebriche, regolare e uniforme. « Ceux qui aiment l'analyse, soggiunge e termina così quelle brevi parole, verront avec plaisir la Mechanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine » (*Mechan. anal.*, a Paris 1788, pag. VI).

Ma il metodo, più che dalla forma esteriore del calcolo, prende effica-

cia dalla generalità dei principii, che anche il Lagrange riduce sommariamente a tre: a quello dell' equilibrio nella leva, a quello della composizion delle forze, e all' altro infine delle velocità virtuali. Il D'Alembert, come vedemmo, dietro l' esempio dei predecessori, aveva ridotto questi due ultimi a uno solo, ma il Nostro vide tanta essere l' importanza del principio delle velocità virtuali, che da lui, reso universale, fece principalmente dipendere tutta la Scienza del moto. Il primo uso, che se ne fece nelle questioni meccaniche, lo ravvisa nel trattato delle macchine di Galileo, con quanta ragione poi se lo sanno oramai bene i nostri Lettori, a' quali giova rammemorare in proposito i dubbi de' Discepoli, che si volsero, per dar più fermo fondamento alla Statica, a cercare e a sostituire altri principii diversi da quello delle velocità virtuali, creduto da loro contenere in sè una fallacia. Nè que' dubbi erano irragionevoli, allora che Galileo stesso proponeva intorno alle quantità infinitamente piccole dottrine così imperfette, anzi false, e insegnava a diffidare della bontà de' nuovi metodi del Cavalieri. Di qui è che il principio delle velocità virtuali, benchè verissimo in sè stesso, era ai discepoli di Galileo indimostrabile, e perciò non si potè farne sicuro uso nella Meccanica, se non da poi che s' istitui, e si diffuse il calcolo infinitesimale. Primo infatti a proporlo in forma ben definita fu Giovanni Bernoulli, come dice il Lagrange, e come si riferì da noi in altra occasione, citando la lettera, in cui esso Bernoulli comunicava al Varignon il suo proprio Teorema. Da questa scrittura del Matematico di Basilea s' aprì la mente al Nostro, il quale riconobbe che le velocità virtuali porgevano al Matematico un principio semplice, e nello stesso tempo così preciso, da esser l' unico possibile a tradursi in una equazion generale, in cui si comprenderebbe tutta la varietà de' teoremi, che si potrebbero proporre intorno all' equilibrio dei gravi. « Nous allons exposer cette formule dans toute son étendue; nous tâcherons même de la présentér d'une maniere èncore plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'à present, et d'en donner des applications nouvelles » (pag. 12). Fra queste nuove applicazioni forse è la più notabile quella fatta all' equilibrio di più forze, in un sistema di punti connessi con un filo flessibile o con una verga rigida, ma dal proposto disegno, che poi nella prima parte dell' Opera si vede dall' Autore maestrevolmente eseguito, si possono giudicare le promozioni venute alla Statica per opera del Lagrange.

Rispetto alla Dinamica il teorema generalissimo proposto dal D'Alembert, e che consisteva, come si disse, nel dedurre dalle precedenti condizioni dell' equilibrio, per via indiretta, le equazioni necessarie a risolvere qual si voglia problema concernente il moto; era senza dubbio assai seducente, ma, in venire a farne l' applicazione, s' ebbe più volte a incontrarvi non poche difficoltà, per determinar le forze che debbono esser distrutte, e a fare esperienza che la legge dell' equilibrio fra esse forze menava troppo spesso alla conclusione per vie intralciate e penose. A ridurle perciò più agevoli, e più spedite, il Lagrange sperò che gioverebbero le velocità virtuali, le quali, come lo avevano così facilmente condotto a risolvere tutte le questioni della Sta-

tica; così lo condurrebbero similmente a risolvere le questioni della Dinamica. Se non che, mentre là bastava quel principio solo, qui voleva esser congiunto con un altro, dalla qual congiunzione glie ne venne a resultare un metodo nuovo, molto simile al primo, cosicchè le due Scienze dell' equilibrio e del moto de' gravi, se naturalmente avevano abito vario, non si poteva però dire che l' avessero diverso.

Volendo il Lagrange stesso, nella prima sezione della seconda parte dell' Opera, dare una certa idea di quel metodo a' suoi Lettori, riduce alla loro memoria che il principio delle velocità virtuali consiste in ciò che, essendo un sistema di punti fisici, e sollecitato da qualunque forza, in equilibrio, se diasi al detto sistema un piccolissimo impulso, e tale da promovere ciascun punto per uno spazio infinitesimo; la somma delle forze, moltiplicate a una a una per il respettivo spazio percorso, deve sempre essere uguale a zero. Se inoltre si suppone il sistema esser mosso, e il moto particolare, che ciascuno dei punti componenti ha in un dato istante, si decomponga in due, l' un de' quali sia quello che prenderà il punto stesso nell' istante successivo: si vedrà facilmente che l'altro deve esser distrutto, per l'azion reciproca dei punti materiali, e per quella delle forze motrici, dalle quali sono attualmente sollecitati. Dovendo poi queste forze equilibrarsi con le resistenze opposte, ne consegue che, per applicare a un sistema in moto la formula del suo proprio equilibrio, basta aggiungervi i termini rappresentativi di quelle stesse forze motrici.

« Or si on considere, prosegue a dire il Lagrange, ainsi que nous l'avons déja fait plus haut, les vitesses, que chaque corps a suivant trois directions fixes et perpendiculaires entr'elles, les décroissemens de ces vitesses représenteront les mouvemens perdue suivant les mêmes directions, et leurs accroissemens seront par consequent les mouvemens perdus dans des directions opposées. Donc les pressions resultantes de ces mouvemens perdus seront exprimées en général par la masse multipliée par l'élément de la vitesse, et divisée par l'élément de tems, et auront des directions directement contraires à celles des vitesses. De cette maniere on pourra exprimer analitiquement les termes dont il s'agit, et l'on aura une formule generale pour le mouvement des corps, la quelle renformera la solution de tous les problemes de Dynamique, comme on le verra dans la suite de cet traité » (*Mechan. anal.* cit., pag. 181, 82).

E quei che seguitano a leggere e a meditare il trattato non posson non ammirar la profondità, a cui si ridusse la Meccanica per opera dell' Autore. È una profondità quasi direbbesi paurosa, simile a quella di una immensa cisterna, attraverso alle limpide acque della quale scorge l' occhio ogni oggetto giacente sul fondo: sono i brividi, che mette addosso il pensiero dell' infinito, e che fanno quasi rifuggire dal contemplarlo. E come all' infinito non si può aggiungere nulla di più, così nulla di più sembrava si potesse oramai aggiungere alla Meccanica analitica del Lagrange. Che se anche questo, come tutti gli altri discorsi, che prescrivono un limite al progredir del-

l' ingegno, sembrasse una esagerazione, si ripensi che i progressi fatti di poi dall' analisi applicata alla Scienza del moto riguardano piuttosto la facilità de' calcoli, e la semplicità de' metodi, che la universalità de' principii informativi.

V.

L' indole della Meccanica analitica è, per le cose fin qui discorse, definita in sè stessa, e si vede consistere nel ridur la Scienza del moto alla certezza della verità matematica. La parte fisica o sperimentale è sparita affatto, e si direbbe piuttosto ch' è dissipata, come a un calore intenso si dissipa un corpo, di cui non riman che l' ultima e sottilissima essenza. Ciò che ne avverte dover essersi già posto il termine alla nostra Storia, la quale nulladimeno, non contenta di esser risalita sul monte, ha voluto anche mostrar come su quella cima fermato il piede spiccassero i Matematici il volo sublime. E ora che quel termine è giunto realmente, vogliam dare uno sguardo fuggitivo indietro alla via lunga e faticosa, che vi ci ha condotti.

Della lunghezza non diciamo, ma della fatica può farsi un' idea chiunque ripensi che della Meccanica mancava fin qui una Storia ordinata, e che avesse particolar riguardo alla cultura datasi a questa Scienza in Italia. Ma mentre si meditava da noi l' ardua impresa, e si significava per le pagine dei due Tomi, che son sotto gli occhi del pubblico, i nostri pensieri; nella dotta Germania si leggevano dalle cattedre scritti, e si stampavano libri sullo stesso argomento. I nostri, che non si risolvono a far nulla se non venga a loro l' esempio dagli stranieri, hanno incominciato a delibare il soggetto, non curato fin qui, benchè le istituzioni meccaniche formino una delle glorie più insigni della Scienza italiana. Come poi que' tali prendono dagli altri gli impulsi a fare, così del fare ne imitano fedelmente i modi. Ora, hanno trovato i sapienti d' oltremonti un modo di risolvere facilmente qualunque più arduo problema della Scienza, in quella, ch' essi chiamano legge dell' evoluzione, e per la quale si dà ad intendere come una semplice cellula siasi andata ingradando via via, da venire all' essere di una pianta e di un animale. Il principio informativo e regolatore di così fatti progressi consiste in ciò che, degli organi accidentalmente sopravvenuti, non rimangono se non che quelli, che favoriscono il ben essere dell' individuo, e stringono meglio insieme le relazioni ch' egli ha co' suoi simili, per cui prosperano quegli organi, e prosperando si perfezionano; a differenza degli altri, che vanno a perdersi a poco a poco o a ridursi nello stato di rudimenti. Così, per questo provvido istinto di sceglier sempre il migliore, e di repudiare il peggiore, tutti gli esseri naturali son giunti via via dall' infimo al più alto grado e perfetto.

Chi veramente abbia infuso quell' istinto nella Natura, e da chi sia regolato, la maggior parte de' settatori di queste nuove dottrine non lo sa e

non lo dice, per cui lasciano mancare alla loro scienza il primo fondamento. Ma i più savi la riconoscono da un Dio creatore, e nelle loro mani quella stessa Scienza, per tanti altri così desolata, come viene ad aver fermezza di principii, così ha o potrebbe avere speranza di più lieti progressi. A torto perciò alcuni, per il solito vezzo di recalcitrare a ogni novità, condannano il sistema dell' evoluzione, per il quale è venuta a' nostri giorni a ricevere tanto incremento la Storia naturale, e anche maggiore ne potrebbe ricevere, se con più senno si procedesse dagli uomini in questo mondo. Fin qui sventuratamente ci troviamo stare tra i due eccessi con coloro, che da una parte rifuggono dal così detto darvinismo come da una empietà, e con quegli altri che lo vogliono con incredibile imprudenza costituire a principio supremo di ogni ordine di cose, o sieno percettibili per gli occhi o per la mente, o si tratti insomma di Fisica o di Psicologia. Allo svolgersi del pensiero nel cervello di un uomo s' intende applicar le medesime leggi, che allo svolgimento dell' ovulo in un nido, o del seme in un orto.

Dal pensiero dell' individuo era naturale il trapasso a farne l' applicazione al pensiero di tutto il genere nella Storia delle scienze, fra le quali è toccato finalmente la sorte anche alla Meccanica. Le minute notizie particolari si stimano oramai cose indegne de' novelli scrittori, l' alto ufficio de' quali si è quello di descrivere le lotte, in cui son dovuti entrare l' un contro l' altro i vari principii assunti via via da' vari autori, per farne conseguire le verità dei loro teoremi : lotte, nelle quali, rimasero sopra gli altri vittoriosi, fra i predetti principii, quelli, che più facilmente si porgevano a risolvere le proposte questioni. Così spiegasi come ai tempi per esempio del Lagrange toccasse la fortunata vittoria al principio delle velocità virtuali.

Noi, dietro i canoni di una Filosofia più antica, e confermata anch' essa dalle osservazioni dei fatti, abbiamo riconosciute le ragioni di quel progredire che ha fatto la Meccanica dall' invenzion de' principii, scelti dagli Autori fra i più semplici e universali, ma quella scelta l' abbiamo veduta dipendere e regolarsi con una legge tutta propria dell' intelletto, e che non ha con la selezion darviniana altra analogia, da quella in fuori che passa tra il mondo fisico e il mondo morale. I novelli Filosofi gli confondono in un mondo solo, e in ciò consiste quella imprudenza che si diceva. Si persuadono costoro che medesimi siano gli organi inservienti alla vita intellettiva e all' animale, perchè credono che cotesti organi si riducano solamente a quelli, che si possono dissecare col coltello anatomico, o vedere col microscopio, e che perciò son composti di solidi e di liquidi, in mezzo a' quali se ne scoprono altri aerei e vaporosi. Ma in queste esalazioni, non difficili a raccogliersi e a esaminarsi, termina la serie de' corpi conoscibili da noi con l' uso dei nostri sensi, benchè si comprenda dover essere in natura altre sostanze, più sottili per dir così e più raffinate, e delle quali, come dell' elettricità, non abbiamo altra notizia che dagli effetti osservabili da noi nelle materie crasse. Or chi sa di quante altre varie essenze e proprietà son fluidi eterei in natura ? Eppure, dovendo essere essi gli organi immediati della vita, bisogne-

rebbe conoscerli nella loro più intima essenza, per decider prudentemente, se medesimi essendo della vita fisiologica e della psicologica gli organi e le funzioni, si possano i loro svolgimenti assoggettare alle medesime leggi. In tanta incertezza la filosofica prudenza ci consiglia di starcene all' osservazione de' fatti, da' quali apparisce che son diverse qua e là le funzioni, e che perciò diverse, nell' uno ordine di cose e nell' altro, debbon essere le leggi degli svolgimenti.

Ma o si seguano intorno a ciò le più sane antiche dottrine, o si corra inconsideratamente dietro alle nuove, sembra la questione in ogni modo o affatto estranea, o non toccar che indirettamente la Storia, ufficio della quale è di narrare i principii, da cui mosse la Scienza, e i termini a cui giunse finalmente vittoriosa, dopo il travaglio dei dubbi combattuti, e l' esperienza dei patiti errori. Lo storico insomma non può dispensarsi dal dar notizie, rese dalle testimonianze certe, e dalla critica sincere. La maggior parte degli scrittori è vero ha male adempiuto fin qui a un tale ufficio, facendo per lo più consistere la storia nel descriver la vita civile e letteraria de' varii autori, senza curarsi di penetrare addentro alla vita del pensiero, o leggendola, no negli originali, ma nelle relazioni di questo o di quello, desunte senza giudizio da altre precedenti relazioni.

Riconosciuta l' imperfezione del metodo, tutto rivolto a rappresentar le cose nel solo abito esterno, o nelle loro più insignificanti minuzie; s' è creduto di emendarlo, con risalir d' un tratto a ritrovar le supreme leggi informative di que' fatti particolari: e invece della Storia son venuti que' dotti stranieri a darci una Filosofia della Storia. Ma se questa Filosofia, a qualunque soggetto storico si riferisca, suppone com' è ragionevole la notizia dei fatti particolari, da' quali si vuol risalire al principio universale che gl' informa, per dedurne la legge degli svolgimenti; è manifesto che si crede da costoro essere cotali fatti bene accertati, perchè altrimenti sarebbero senza fondamento le loro speculazioni. Ora a noi sembra questa opinione inconsiderata, e ci fa maraviglia che non se ne siano accorti que' valentuomini, se fu la detta imperfezione de' metodi storici precedenti, che gli consigliò così risolutamente a repudiarli. E se gli avessero per ciò solo repudiati, perchè si trattenevano in minuzie, si potrebbe dire che una certa boria filosofica fu che ve gl' indusse, perchè avrebbero dovuto invece prima esaminare se quelle sparse e minuziose notizie almeno erano vere, e sopra quelle riconosciute verità, come sopra stabile fondamento, edificare la nuova Storia filosofica.

Quell' esame, dannosamente trascurato dai nostri predecessori, l' abbiamo voluto istituir noi, non facendo alcun conto delle relazioni altrui, ma ricercando i pensieri e le scoperte de' varii autori nelle loro opere originali. E perchè di que' pensieri e di quelle scoperte, per ciò che particolarmente concerne la Scuola italiana, rimaneva tuttavia la miglior parte nei manoscritti, abbiamo usato una special diligenza nel produrli alla luce con i loro commenti storici, superate le difficoltà, che avevano fatto fin qui arretrar dall' impresa tanti altri, senza dubbio più valorosi di noi, ma forse meno pazienti.

Nè del trascrivere da quelli, che volgarmente si chiamerebbero scarabocchi, tante proposizioni, e anzi trattati interi, fu solo il nostro pensiero quello di far note al mondo le importanti verità dimostrate, ma di aggiungere esempi nuovi di ciò, che valesse alle mani di quegli antichi il calcolo infinitesimale, sotto l' abito geometrico degl' indivisibili cavalierani. I canoni di questo metodo si desumono con facilità da pochi teoremi degli Elementi di Euclide, cosicchè possono speditamente maneggiarlo anehe i giovani principianti, e con esso risolvere in Geometria e in Meccanica grandissima parte de' più ardui problemi. Ora, cotesti problemi non si propongono alla gioventù studiosa, se non che dopo quel lungo e periglioso tirocinio, che è necessario per giungere a trattar le regole de' calcoli differenziale e integrale. Si sperava perciò da noi che non inutili riuscirebbero gli esempi del Roberval, del Torricelli, del Nardi e degli altri, che ricorrono in questa Storia, se consigliassero qualche maestro a imitarli, e a suoi giovani discepoli, che hanno appena varcate le soglie della Geometria, facesse pregustare molte di quelle verità, il penetrar le quali non si credè possibile a nessuno, che non abbia in mano le chiavi della Matematica più sublime. La fallacia di una tale opinione fu primo a riconoscerla, e a mostrarla l' Herman, il quale, come si legge nella sua prefazione alla *Foronomia,* per molteplici esperienze ammaestrato fornirsi dalla meditazione delle figure soluzioni più semplici ed eleganti che dall' analisi speciosa; applicò gli stessi segni e simboli leibniziani allo schietto metodo geometrico del Cavalieri.

Per quel che riguarda poi i documenti ricavati da' libri, che sono alla pubblica luce, non ci siam contentati d' indicar semplicemente le pagine dell' Opere via via citate, ma ne abbiamo trascritte le parole proprie, perchè rimeditandole possano per sè medesimi giudicare i Lettori se le abbiamo sempre interpetrate a dovere, o se ci fossimo anche più spesso ingannati. In tali inganni, quando qualcuno ve gli scoprisse, confessiamo che consisterebbe il maggior difetto della nostra Storia, la quale, qualunque ella si sia, presentiamo al pubblico perchè, o approvandola o correggendola, possa stare in quel giusto mezzo in cui ci siamo studiati di metterla, cosicchè da una parte supplisca alle notizie o false o insufficienti, date da chi ci ha preceduto, e dall' altra possa fornire a chi ci succede materia di più sublimi storiche speculazioni.

INDICI

INDICE DEI CAPITOLI

CAPITOLO I.

Delle correzioni e delle riforme ne' Dialoghi delle due Scienze nuove.

CAPITOLO II.

Del quinto Dialogo aggiunto alle due Scienze nuove, ossia della Scienza delle proporzioni.

CAPITOLO III.

Del sesto Dialogo aggiunto alle due Scienze nuove, ossia della forza della percossa.

Capitolo IV.

Del settimo Dialogo da aggiungersi alle due Scienze nuove, ossia dei Problemi fisici e matematici.

Capitolo V.

Del trattato dei centri di gravità di Evangelista Torricelli.

Capitolo VI.

Di varie altre cose di Meccanica lasciate dal Torricelli.

Capitolo VII.

Di altri Discepoli di Galileo, promotori della Scienza del moto.

Capitolo VIII.

Dei matematici stranieri principali promotori della Scienza del moto.

Capitolo IX.

Della proposta di una Meccanica nuova, e della composizione dei moti.

Capitolo X.

Dei progressi fatti dalla Meccanica nuova.

INDICE

DEI DOCUMENTI ESTRATTI DAI MANOSCRITTI GALILEIANI
E NOTATI SECONDO L' ORDINE DEI CAPITOLI

Nel Capitolo I.

Nel Capitolo II.

Nel Capitolo III.

Nel Capitolo IV.

Nel Capitolo V.

Nel Capitolo VI.

Nel Capitolo VII.

Nel Capitolo VIII.

Nel Capitolo IX.

INDICE ALFABETICO

DEGLI AUTORI E DELLE COSE

Co' numeri s' accenna alle pagine